This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

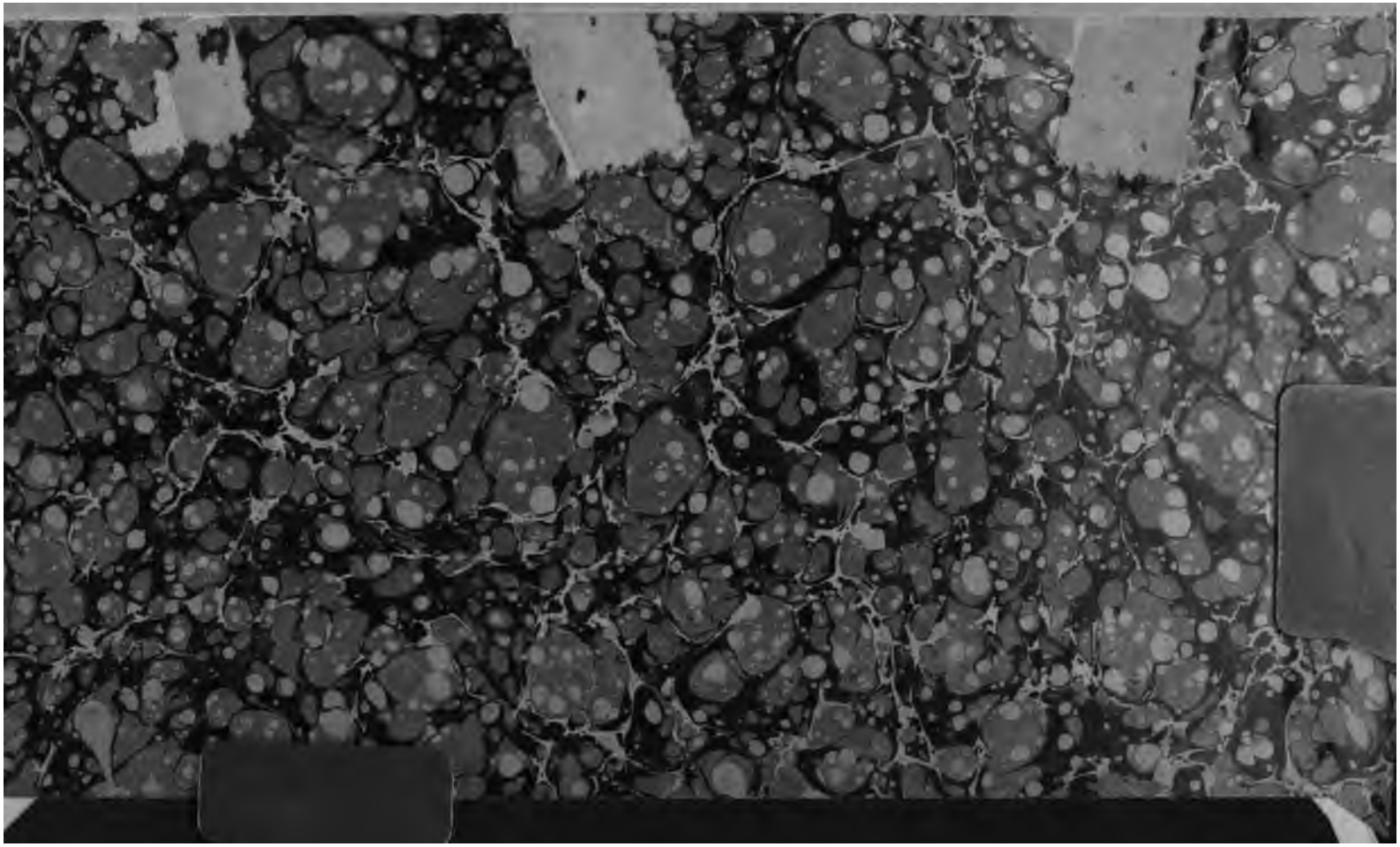
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

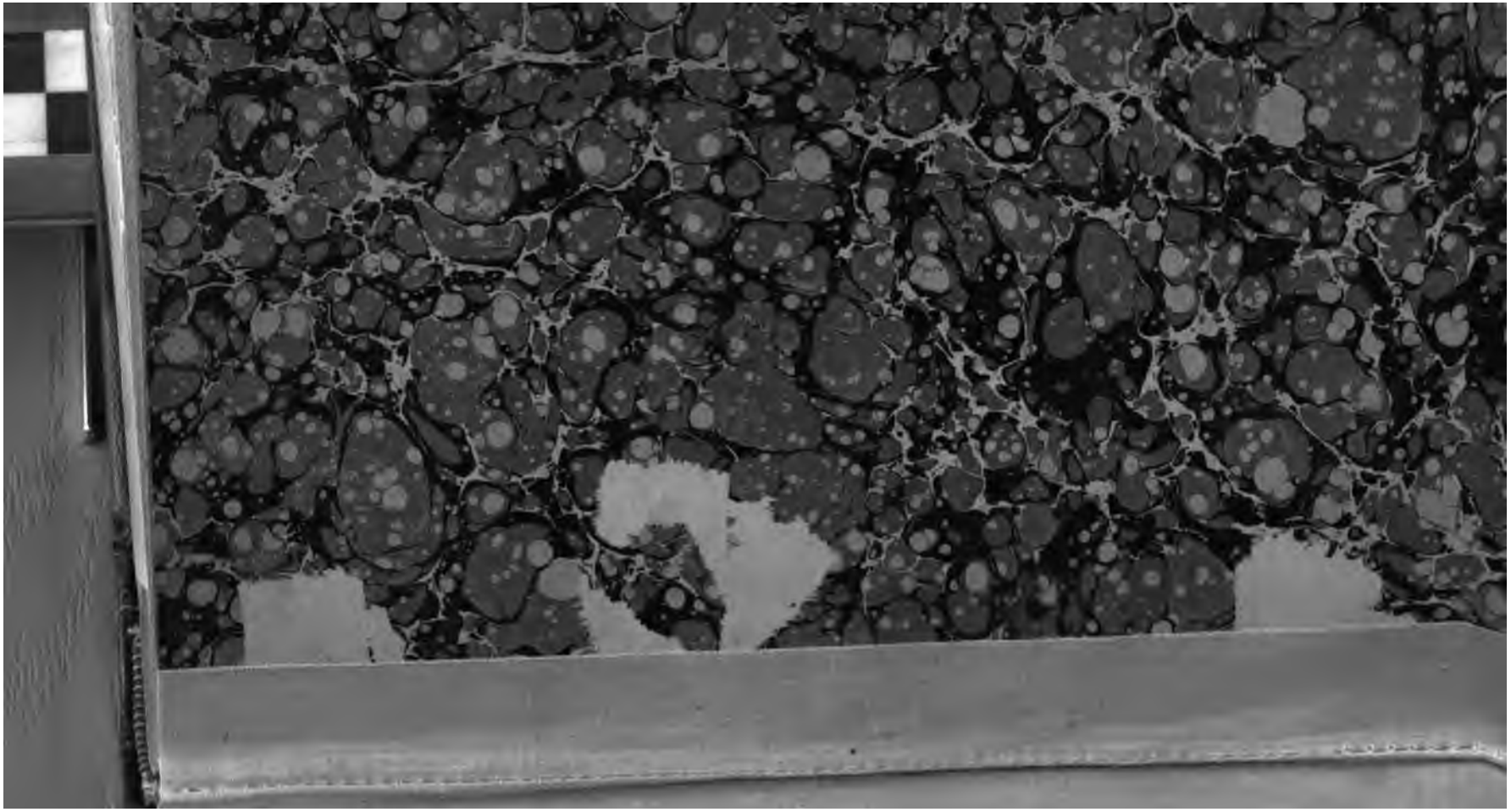
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.





373-2:4/2

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE.

BAND 25.

ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 25.

DER GANZEN REIHE 330. BAND.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

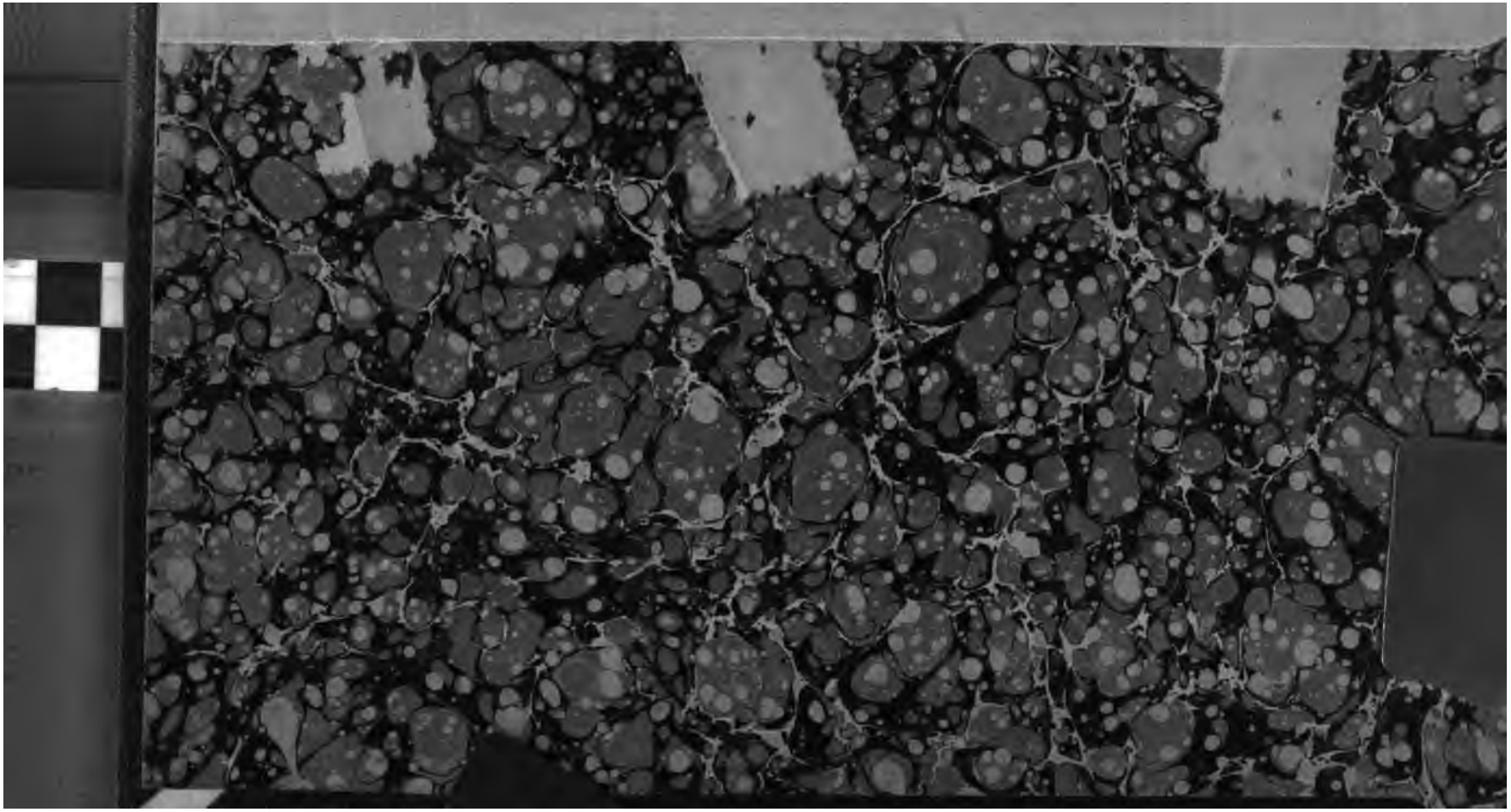
HERAUSGEGEBEN VON

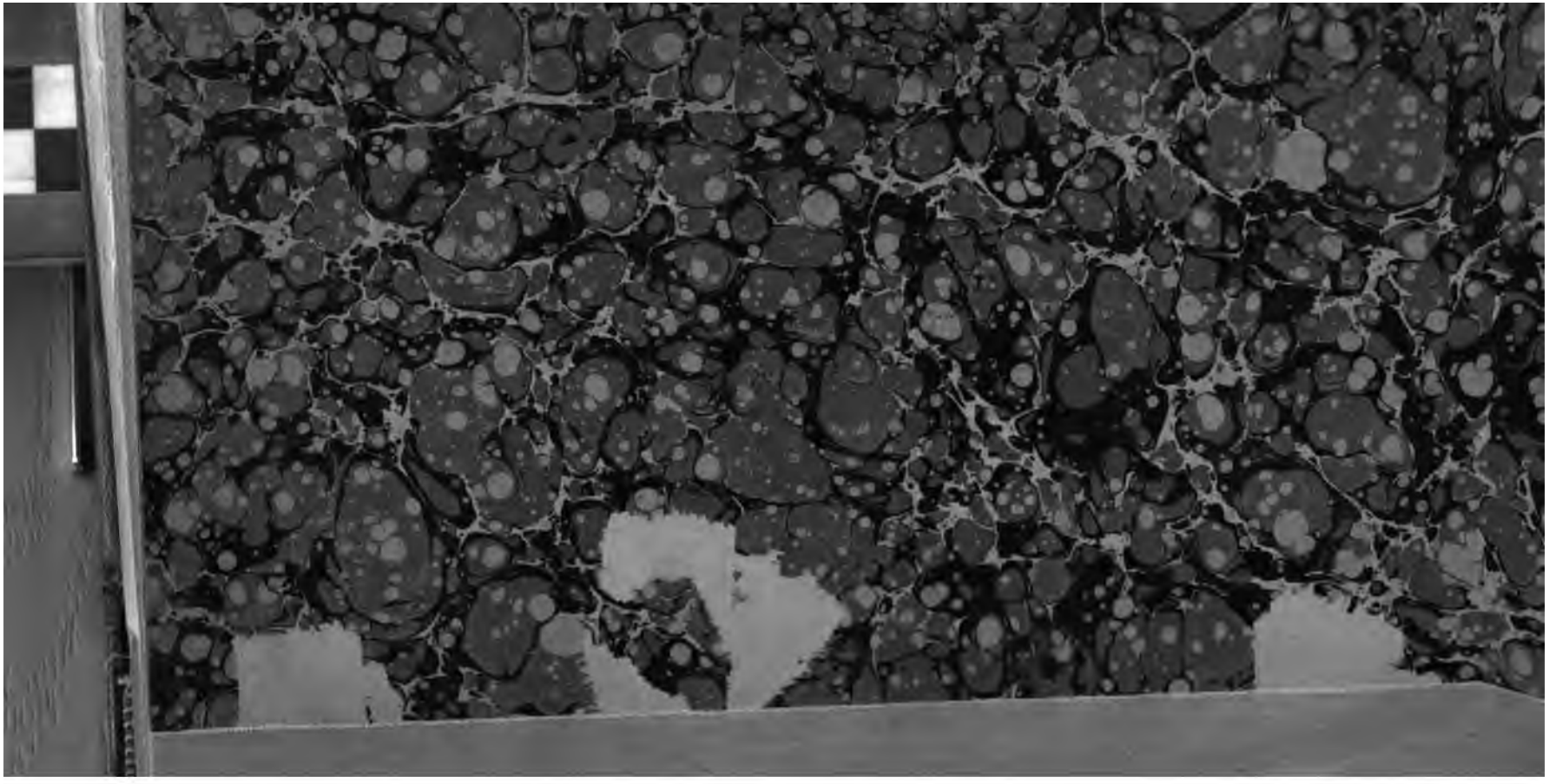
W. WIEN UND M. PLANCK.

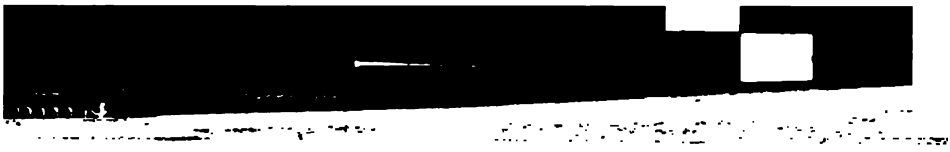
MIT EINEM PORTRÄT UND FÜNF FIGURENTAFELN.

LEIPZIG, 1908.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.







373-204/2

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE.

BAND 25.

ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 25.

DER GANZEN REIHE 330. BAND.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINEM PORTRÄT UND FÜNF FIGURENTAFELN.

LEIPZIG, 1908.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

121226

Inhalt.

Vierte Folge. Band 25.

Erstes Heft.

		Seite
	Lord Kelvin. Nachruf. (Mit Porträt)	1
1.	Max Wien. Über die Verstimmung gekoppelter Systeme .	7
2.	Eugen Klupathy. Die magnetische Wirkung der Kathodenstrahlen	31
3.	Adolf Heydweiller. Über Dämpfung und Widerstand in Kondensatorfunken	48
4.	G. A. Schott. Über den Einfluß von Unstetigkeiten bei der Bewegung von Elektronen	63
5.	G. Athanasiadis. Das Verhältnis der Beleuchtung zum Leitungsvermögen des Selens	92
6.	W. v. Ignatowsky. Diffraktion und Reflexion, abgeleitet aus den Maxwellschen Gleichungen	99
7.	Otto Fischer. Über ein von Max Wien geäußertes Bedenken gegen die Helmholtzsche Resonanztheorie des Hörens . .	118
8.	P. Riebesell. Über die Theorie des Gleichstromgenerators .	135
9.	H. A. Bumstead. Bemerkung zu der Abhandlung des Hrn. Angerer: „Ursprung der Wärmeentwickelung bei Absorption von Röntgenstrahlen“	152
10.	Emil Kohl. Über die Entropiefunktion beim Umsatz von chemischer und elektrischer Energie	155
11.	J. Laub. Zur Optik der bewegten Körper	175

Ausgegeben am 17. Januar 1908.

Zweites Heft.

1.	Chr. Jensen. Bemerkungen zu meiner Arbeit über Münzdurchdringungsbilder. (Hierzu Taf. I.)	185
2.	M. v. Smoluchowski. Molekular-kinetische Theorie der Opaleszenz von Gasen im kritischen Zustande, sowie einiger verwandter Erscheinungen	205

Seite

3. Karl Dörsing. Messung der Geschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten und des Verhältnisses der beiden spezifischen Wärmen des Äthers mit Hilfe Kundtscher Staubfiguren. (Hierzu Taf. II.) 227
4. George Mc Phail Smith. Bemerkungen zu der Arbeit von Max von Wogau: Die Diffusion von Metallen in Quecksilber 252
5. G. Jaffé. Über die Ionisation flüssiger Dielektrika durch Radiumstrahlen 257
6. Fritz Deininger. Über den Austritt negativer Ionen aus einigen glühenden Metallen und aus glühendem Calciumoxyd 285
7. Burton Evans Moore. Über die Zerlegung der Spektrallinien von Barium, Yttrium, Zirkon und Osmium im magnetischen Felde 309
8. Ernst Cuno. Über Lösungen in Gemischen von Alkohol und Wasser 346

Ausgegeben am 7. Februar 1908.

Drittes Heft.

1. Gustav Mie. Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen 377
2. Reinhold Rüdenberg. Der Empfang elektrischer Wellen in der drahtlosen Telegraphie 446
3. P. Ludewig. Über die sogenannten elektrolytischen Stromunterbrecher. (Hierzu Taf. III u. IV.) 467
4. M. Thiesen. Eine Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Luft von 0° 506
5. Fritz Reiche. Gesetze der Kompression einer Hohlraumstrahlung durch eine „semipermeable" Platte. 521
6. C. Dieterici. Über die innere Verdampfungswärme . . . 569
7. K. Schild. Die magnetischen Eigenschaften elektrolytischer Eisenniederschläge 586
8. Eduard Riecke. Berichtigung zu dem Aufsatze: „Untersuchungen über Entladungserscheinungen in Geisslerschen Röhren" 623

Ausgegeben am 3. März 1908.

Viertes Heft.

1. Max Wien. Über die Dämpfung von Kondensatorschwingungen. I. Rückwirkung eines resonierenden Systems. II. Erzeugung wenig gedämpfter Schwingungen 625

Seite

2. W. Ritz. Magnetische Atomfelder und Serienspektren . . . 660
3. L. Hermann. Zur Theorie der Kombinationstöne 697
4. B. Walter und R. Pohl. Zur Frage der Beugung der Röntgenstrahlen. (Hierzu Taf. V, Figg. 1 u. 2.) 715
5. Hans Georg Möller. Zur Theorie der Überspannung bei elektrolytischer Gasabscheidung 725
6. Max Toepler. Gleitbüschel auf Flüssigkeitsoberflächen . . 745
7. Edgar Meyer und Erich Regener. Über Schwankungen der radioaktiven Strahlung und eine Methode zur Bestimmung des elektrischen Elementarquantums 757
8. Günther Schulze. Die elektrolytische Ventilwirkung des Niobs und eine Klassifizierung des Verhaltens elektrolytischer Anoden 775
9. Erich Mayer. Ein neues Universalvariometer für Lokalvariationen, Intensitäts- und Deklinationsschwankungen . . . 783
10. Theodor Lohnstein. Zur Theorie des Adhäsionsplattenversuches 807
11. P. Debye. Eine Bemerkung zu der Arbeit von Hrn. F. A. Schulze: „Einige neue Methoden zur Bestimmung der Schwingungszahlen höchster hörbarer und unhörbarer Töne usw.“) 819
12. G. A. Schott. Berichtigung zur Arbeit: „Über den Einfluß von Unstetigkeiten bei der Bewegung von Elektronen“ . . . 824

Ausgegeben am 31. März 1908.

Fünftes Heft.

1. E. Grüneisen. Die elastischen Konstanten der Metalle bei kleinen Deformationen. II. Torsionsmodul, Verhältnis von Querkontraktion zu Längsdilatation und kubische Kompressibilität 825
2. O. Lehmann. Zur Geschichte der flüssigen Kristalle . . . 852
3. E. Gehrcke und O. Reichenheim. Anodenstrahlen. I . . 861
4. Johann Sahulka. Über das Verhalten fester, insbesondere pulverförmiger Körper in bewegten Flüssigkeiten und Gasen . 885
5. H. Sirk. Zur Berechnung der molekularen Dimensionen . . 894
6. D. A. Goldhammer. Über die Temperatur der Sonne. Erste Mitteilung 905
7. Paul Pallme König. Der Widerstand des Wismuts im veränderlichen Magnetfelde und für veränderlichen Meßstrom . . 921

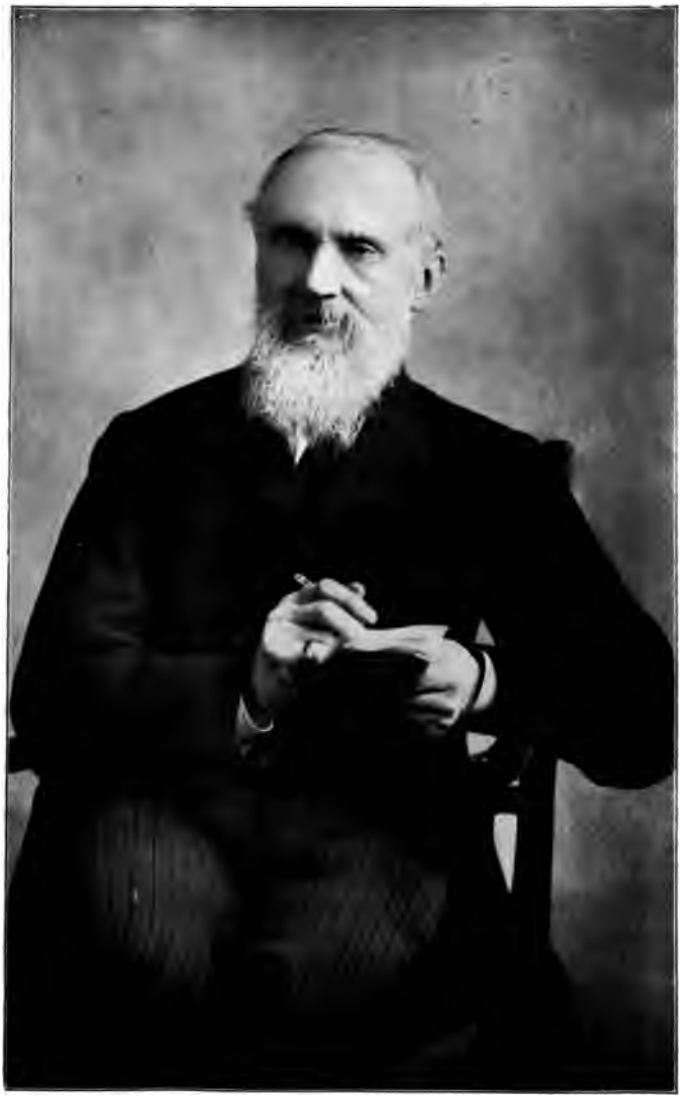
Seite

8. W. Ruckes. Untersuchungen über den Ausfluß komprimierter Luft aus Kapillaren und die dabei auftretenden Turbulenzerscheinungen 983
9. F. Richarz. Über die Erhitzung von Elektrolyten an kleinen Elektroden bis zur Siedetemperatur (zur Berichtigung von Hrn. Paul Ludewig) 1022

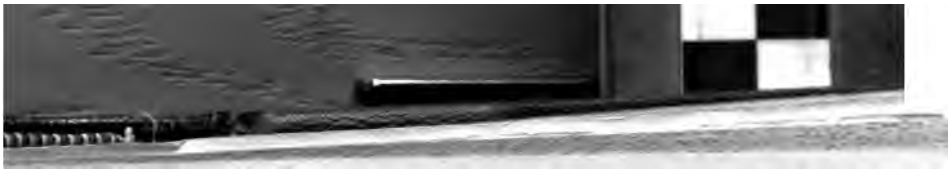
Ausgegeben am 28. April 1908.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel I. Jensen.
„ II. Dörsing.
„ III u. IV. Ludewig.
„ V. Walter u. Pohl, Figg. 1 u. 2.



Sir William Thomson (Lord Kelvin)
geboren 26. Juni 1824, gestorben 17. Dezember 1907.



1908. № 1.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 25.

Lord Kelvin †

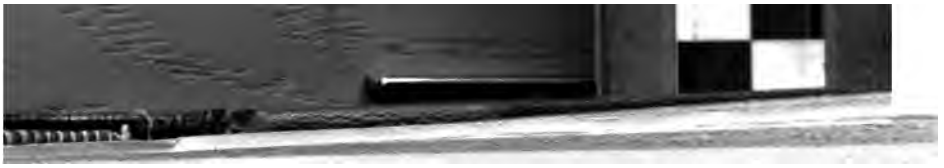
Die Kunde, die vor kurzem aus England kam, daß der große Altmeister der Physik William Thomson nun auch heimgegangen, hat in Deutschland sicher gleiche Teilnahme erregt wie in seinem Vaterlande. Denn mit ihm verlieren wir einen der größten Forscher des neunzehnten Jahrhunderts, mit dem sich wohl nur noch Helmholtz und Maxwell vergleichen lassen. Seine außerordentliche Vielseitigkeit und Arbeitskraft haben es ihm ermöglicht, in die meisten Gebiete der Physik bahnbrechend oder doch anregend einzugreifen, so daß eine ausführliche Darstellung seiner Leistungen sich nur in umfangreichem biographischem Werk wird erreichen lassen. Wir wollen uns hier nur mit einem kurzen Rückblick auf seine längst historisch gewordene Gestalt begnügen.

Man kann wohl sagen, daß William Thomson (wir nennen ihn mit dem Namen, den die meisten seiner großen Werke tragen) in erster Linie mathematischer Physiker war. Schon in jungen Jahren gelangen ihm die Lösungen schwieriger Probleme über die elektrische Verteilung, durch die er nicht nur die Entwicklung der Physik, sondern auch die der Mathematik beeinflußt hat. Ein Lieblingsgebiet ist ihm

während seines ganzen Lebens die Hydrodynamik geblieben. Besonders in der Theorie der Wellen hat er außerordentliches geleistet; die Behandlung der Wellen, die durch Störungen der Oberfläche fließenden Wassers gebildet werden, zu denen auch die von Schiffen erregten Wellen gehören, hat er durch eine sehr originelle Anwendung der Fourierschen Integrale begründet. Diese Untersuchungen, die zum Teil erst vor kurzem veröffentlicht wurden, gewähren einen tiefen Einblick in die verwickelten Verhältnisse der Wellensysteme.

Zu den bedeutendsten Leistungen William Thomsons gehören die Untersuchungen über die mechanische Theorie der Wärme. Seine Arbeiten laufen mit denen von Clausius zunächst durchaus parallel, wie ihm ja auch die analytische Formulierung des zweiten Hauptsatzes unabhängig von Clausius, allerdings ein wenig später, gelang. Ihm eigentümlich ist aber der mit Joule unternommene Versuch zur Bestimmung der inneren Arbeit der Gase und besonders die hierauf gegründete Definition der absoluten Temperatur. Seine Arbeiten über Thermoelektrizität und die Entdeckung des nach ihm benannten Effekts haben sich unmittelbar an diese angeschlossen.

Auch über die Wärmeleitung, wie sie von Fourier begründet war, hat W. Thomson besonders mit Hinblick auf die Anwendung auf die Abkühlung der Erde mathematische Untersuchungen angestellt. Besonders am Herzen lag ihm von jeher die Theorie der Materie. Er gehörte am entschiedensten zu den Physikern, die sich nicht mit der Darstellung der Tatsachen durch



die Differentialgleichungen begnügen wollten, sondern das Bedürfnis fühlten, bestimmte, ins einzelne gehende Vorstellungen über die innern Kräfte der Materie, über den Bau der Atome und des Äthers zu bilden. Von ihm rührt die Theorie eines aus vielen konzentrischen, elastischen Kugelschalen bestehenden Atoms her, deren Schwingungen nun alle Wirkungen der Materie, Elektrizität und Licht, ergeben sollten, ebenso die Vorstellung, daß der Äther ein seifenschaumähnliches, elastisches Gebilde sei, dessen Schwingungen in der Tat den Forderungen der Optik besser genügt als ein kontinuierliches elastisches Medium; von ihm rührt auch die kinetische Theorie der Elastizität her, indem er eine große Zahl von Kreiseln annimmt, die durch die gyroskopischen Kräfte die der elastischen Körper ersetzen.

Es scheint mir die Bedeutung dieser Arbeiten heute unterschätzt zu werden. William Thomson ist jedenfalls der letzte gewesen, der geglaubt hat, durch derartige Spekulationen die letzten Fragen über den Aufbau der Materie endgültig zu beantworten. Er hat diesen Untersuchungen sicherlich keinen andern als einen eminent heuristischen Wert zuerkennen wollen. Wie groß dieser sein kann, zeigt am besten das Beispiel Maxwells, der im wesentlichen an der Hand bestimmter mechanischer Modelle zu seiner Theorie der Elektrodynamik vorgeschritten ist.

Das Bedürfnis nach bestimmten Vorstellungen über die unbekannten Elemente der Materie ist auch heute nicht minder groß. Daß wir heute Elektronen

und Gruppen von Elektronen anordnen, um uns Vorstellungen über die Atome zu bilden, sollte uns nicht darüber täuschen, daß diese Theorien auch zunächst nur heuristischen Wert haben und wahrscheinlich bald wieder andern werden weichen müssen. Aber als Leitfaden für die experimentelle Forschung sind sie von großem Wert, und wenn die gewonnenen Tatsachen dann in feste analytische Formen gebracht sind, wenn die Differentialgleichungen der Vorgänge erkannt sind, dann haben diese Theorien das ihrige geleistet und sind entbehrlich geworden. So sind auch die Spekulationen W. Thomsons über die Materie in hohem Grade anregend gewesen. Die atomistische Theorie tritt beständig mehr in den Vordergrund und seine Untersuchungen über die Größe der Atome werden immer von ganz besonderem Werte bleiben.

Neben seinen theoretischen Untersuchungen hat William Thomson viel experimentiert und besonders in der Konstruktion wissenschaftlicher Apparate eine außergewöhnliche Erfindungsgabe gezeigt. Seine Elektrometer, sein Spiegelgalvanometer sind allbekannt. Aber auch viele Instrumente für rein technische Zwecke, einen neuen Kompaß hat er erfunden. Sehr große Verdienste erwarb er sich um die transatlantischen Kabel. Hier ermöglichte ihm die genaue Theorie der durch Kabel fortgepflanzten Elektrizität, verbunden mit der Kenntnis der Apparate und Meßinstrumente, die Grundlagen für die praktische Kabeltelegraphie zu schaffen.

So kann man sagen, daß William Thomson

die gewaltige Entwicklung der Physik in der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts miterlebt und mitbestimmt hat. Als einziger seiner großen Zeitgenossen erlebte er noch die mannigfachen Umwälzungen, welche die Physik in den neunziger Jahren erfuhr. Mit dem größten Interesse nahm er alle neuen Entdeckungen auf und suchte immer wieder anregend und befruchtend zu wirken. Wer noch vor wenigen Jahren von ihm in ein wissenschaftliches Gespräch gezogen wurde, mußte sich verwundern über die jugendliche Lebhaftigkeit und die unermüdliche Frische, mit der er die aktuellsten wissenschaftlichen Fragen zu behandeln liebte. Hierbei zeigte er die erstaunlichste Kenntnis der neuesten Literatur.

Allerdings war er nicht ganz mit der neueren Entwicklung der theoretischen Forschung einverstanden. Die Verallgemeinerung des Temperaturbegriffs auf die vollständig von der Materie losgelöste Strahlung wollte er nicht anerkennen.

Ganz besondere Bedenken hatte er gegen die Theorie der Umwandlung des Atoms, die auf der letzten Versammlung der British Association zum lebhaften Durchbruch kamen.

Wenn man seine Worte als Mahnung zur Vorsicht auffaßt, wird man sie nicht ganz abweisen können. Ob die Atome der uns früher bekannten Stoffe wirklich sich verwandeln können, d. h. daß ein wirkliches Verschwinden des einen chemischen Elementes auftritt, begleitet von einem Entstehen mehrerer anderer, ist bisher nicht nachgewiesen. Daß bei den radioaktiven

Stoffen solche Verwandlungen der Atome auftreten, ist allerdings nicht zu bezweifeln, und hier wird man wohl W. Thomsons Bedenken nicht vollständig teilen können.

Bis zur letzten Zeit seines dreiundachtzigjährigen Lebens ist William Thomson für seine Wissenschaft tätig gewesen.

Nach einem treffenden Ausspruch von Helmholtz fallen der Jugend und dem Alter verschiedene Aufgaben in der Wissenschaft zu. Die erstere hat die neuen Pfade zu suchen, die neuen Gedankenkombinationen zu finden, das Alter dagegen mit abgeklärten wissenschaftlichen Vorstellungen die gewonnenen Ergebnisse immer mehr zu klären und zu befestigen. Beiden Aufgaben ist Thomson in hohem Maß gerecht geworden.

So liegt denn ein Leben abgeschlossen vor uns, das unermeßlich reich war an innerem Reichtume, ein Leben, das sich lohnte gelebt zu werden, denn wenn irgend jemand, so hat W. Thomson das Goethesche Ziel erreicht: Das Höchste, wozu der Mensch gelangen kann, ist das Bewußtsein eigener Gesinnungen und Gedanken.

W. Wien.

1. *Über die Verstimmung gekoppelter Systeme;* *von Max Wien.*

Bezeichnungen.

$C_1\ C_2\ C_3$ Kapazitäten des Primär (1)- und Sekundär (2)-Systems des Senders und des Empfängers (3).

$\delta_1\ \delta_2\ \delta_3$ Dämpfungen der beiden ungekoppelten Systeme des Senders und des Empfängers.

$\delta\ \delta'$ Dämpfungen der gekoppelten Systeme des Senders.

E_{e0} Amplitude der elektromotorischen Kraft im Empfänger.

F Funkenpotential.

$J^2_{\text{eff.}}$ Stromeffekt im Empfänger.

$J^2_{r\,\text{eff.}}$ Stromeffekt im Empfänger bei Resonanz.

k Koppelungskoeffizient.

$L_{11}\ L_{22}\ L_{33}$ Selbstpotentiale der drei Systeme.

$L_{12}\ L_{23}$ Gegenseitige Induktionskoeffizienten.

$p_{21} = \frac{1}{2}\,\frac{L_{21}}{L_{22}}\cdot\frac{C_1}{C_2}$.

$\tau_1\ \tau_2$ Schwingungsdauern der ungekoppelten Systeme des Senders dividiert durch 2π.

$\tau\ \tau'$ Schwingungsdauern des gekoppelten Systems des Senders dividiert durch 2π.

$\vartheta_1 = \frac{W_1 C_1}{2} = \delta_1 \tau_1^2, \quad \vartheta_2 = \frac{W_2 C_2}{2} = \delta_2 \tau_2^2$.

$V_2\ V_2'$ Potentiale der gekoppelten Schwingungen im Sekundärsystem des Senders.

$W_1\ W_2\ W_3$ Widerstände in den drei Systemen.

Bei der drahtlosen Telegraphie pflegt man gewöhnlich anzunehmen, daß zur Erzielung der günstigsten Wirkung Primär- und Sekundärsystem eines gekoppelten Senders genau aufeinander eingestimmt sein müßten. Damit schien in Übereinstimmung zu stehen, daß, wie Drude[1]) gezeigt hat, sowohl das Potential wie der Stromeffekt beider Koppelungswellen im sekundären System ein Maximum besitzen, wenn die

1) P. Drude, Ann. d. Phys. **13**. p. 512. 1904.

Systeme in Resonanz sind. Demgegenüber glaubte Slaby[1]) aus seinen Versuchen schließen zu müssen, daß eine sehr erhebliche Verbesserung der Wirkung durch Verstimmung der beiden Systeme erzielt werden könnte. Obgleich, wie ich nachgewiesen habe[2]), diese Versuche nicht einwandfrei sind und keinen Beitrag zur Lösung der Frage liefern, so ergab sich bei dieser Gelegenheit doch, sowohl theoretisch wie experimentell, daß sich eine geringe Verbesserung des Stromeffektes im *Empfänger* durch Verstimmung erzielen läßt. Die hauptsächlichsten Resultate dieser Untersuchung habe ich schon an der angegebenen Stelle gebracht und zugleich einen ausführlicheren Bericht in Aussicht gestellt. Dieser soll jetzt nachgeholt werden.

I. Theorie der Verstimmung.

Die physikalische Erklärung der Verstärkung des Stromeffektes durch die Verstimmung ist folgende: Bei verschiedener Dämpfung der beiden Systeme des Senders besitzt die Dämpfung der weniger gedämpften der beiden Koppelungswellen für den Fall der Resonanz ein Maximum und wird *durch Verstimmung verringert.*[3]) Je geringer die Dämpfung der eintreffenden Wellen, um so größer ist der Stromeffekt im Empfänger. Hierin liegt die Möglichkeit, daß trotz des geringeren Stromeffektes in der ausstrahlenden *Antenne* doch infolge der gleichzeitigen Verminderung der Dämpfung der Stromeffekt im *Empfänger* durch Verstimmung vergrößert werden kann.

Bei der Ableitung der Theorie schließe ich mich an die Drudeschen Gleichungen[4]) an. Es sei vorausgesetzt, daß die Dämpfung nicht zu groß, und die Koppelung eng sei. Dann ist bei dieser nur angenäherten Berechnung nicht nur die übliche Vernachlässigung der Dämpfung gegen die Schwingungszahl, sondern nach Drude (p. 539) auch die Vernachlässigung der Größe $4\beta^2$ gegen $(\tau - \tau')^2$ zulässig.

1) A. Slaby, Elektrotechn. Zeitschr. 1904 und 1905.

2) M. Wien, Elektrotechn. Zeitschr. p. 837. 1906 und Physik. Zeitschr. 8. p. 10 und 38. 1907.

3) M. Wien, Wied. Ann. 61. p. 151. 1897.

4) P. Drude, l. c.

Unter diesen Voraussetzungen ergeben sich aus den Drudeschen Gleichungen (107) und (108) die Ausdrücke für die Anfangsamplituden der Potentiale im sekundären System[1]):

$$V_{20} = V'_{20} = \frac{p_{21}\,(\tau_2^2 \cdot F}{2\,(\tau^2 - \tau'^2)}.$$

Wir beschäftigen uns zunächst nur mit der einen der beiden Koppelungsschwingungen (τ, V_2). Die Rechnung für die andere (τ', V_2') ist ganz die gleiche.

Wir nehmen an, daß mit diesem Sender ein resonierendes Empfangssystem (3) lose magnetisch gekoppelt sei (gegenseitiger Induktionskoeffizient L_{23}). Der Stromeffekt in diesem Empfangssystem ist nach Bjerknes:

$$J^2_{r\,\text{eff.}} = \frac{E_{a0}^2}{16\,L_{33}^2\,\delta\,.\,\delta_3\,(\delta + \delta_3)},$$

wenn E_{a0} die Amplitude der vom Sender induzierten elektromotorischen Kraft, δ die Dämpfung der eintreffenden Welle, δ_3 und L_{33} Dämpfung und Selbstpotential des Empfangssystems sind.

Ist, entsprechend den tatsächlichen Verhältnissen bei der Telegraphie ohne Draht bei lose gekoppeltem Empfänger (vgl. p. 13), δ_3 klein gegen δ[2]), so wird

(I) $$J^2_{r\,\text{eff.}} = \frac{E_{a0}^2}{16\,L_{33}^2\,\delta_3\,\delta^2}.$$

Die elektromotorische Kraft E_{a0} erhalten wir aus der Gleichung

$$E_{a0} = -\,I_{23}\,\frac{J_{20}}{\tau}.$$

Darin ergibt sich J_{20}, die Anfangsamplitude des Stromes, aus der Gleichung

$$J_2 = 2\,C_2\,\frac{d\,V_2}{d\,t} \quad \text{(Drude, p. 519 Anm.)}$$

zu:

$$J_{20} = \frac{p_{21}\,\tau_2^2\,.\,F\,.\,C_2}{(\tau^2 - \tau'^2)\,\tau},$$

---

1) Die Bezeichnungen sind am Eingang der Arbeit zusammengestellt.

2) Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so ist die Verstärkung des Stromeffektes durch die Verstimmung wesentlich geringer.

oder nach Einführung von

$$p_{21}\,\tau_2^2 = \frac{L_{21}\,C_1}{2} \quad \text{(Drude, Gl. (23))}$$

zu:

$$J_{20} = \frac{L_{21}\cdot C_1\,C_2\,F}{2\,(\tau^2-\tau'^2)\,\tau}.$$

Hieraus:

$$E_{a0} = -\frac{L_{21}\,L_{22}\cdot C_1\,C_2\,F}{2\,(\tau^2-\tau'^2)\cdot\tau^2}.$$

Diesen Wert für E_{a0} und den Wert für δ aus Drudes Gleichung (108) gleich

$$\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}-\beta\right)^{1})$$

setzen wir in die Bjerknessche Gleichung (I) ein und erhalten:

$$\text{(II)}\qquad J^2_{r\,\text{eff.}} = \left[\frac{L_{21}\,L_{22}\,C_1\,C_2\,F}{8\,L_{22}\sqrt{\delta_2}}\right]^2\cdot\left[\frac{1}{(\tau^2-\tau'^2)\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}-\beta\right)}\right]^2.$$

In der zweiten Klammer müssen wir für $(\tau^2-\tau'^2)$ und β die Werte einsetzen. Dazu benutzen wir die Gleichungen (91) und (92) von Drude. (92) erhält bei Vernachlässigung der Dämpfung (vgl. p. 8) und unter Berücksichtigung davon, daß bei mäßiger Verstimmung $(\tau_1-\tau_2/\tau_1+\tau_2)^2$ klein gegen 1 ist, die Form:

$$\tau^2-\tau'^2 = (\tau_1+\tau_2)\sqrt{(\tau_1-\tau_2)^2+k^2\tau_1\tau_2}.$$

Dazu die zweite Gleichung von (91):

$$(\tau^2-\tau'^2)\beta = \frac{(\tau_1+\tau_2)}{2}(\tau_1-\tau_2)\cdot(\vartheta_1-\vartheta_2).$$

Hieraus:

$$\begin{aligned}(\tau^2-\tau'^2)\left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}-\beta\right) &= \frac{\tau_1+\tau_2}{2}\Big[(\vartheta_1+\vartheta_2)\sqrt{(\tau_1-\tau_2)^2+k^2\tau_1\tau_2}\\ &\qquad -(\tau_1-\tau_2)(\vartheta_1-\vartheta_2)\Big]\\ &= \frac{\tau_1+\tau_2}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2)\,k\cdot\sqrt{\tau_1\tau_2}\\ &\qquad \left[\sqrt{1+\frac{(\tau_1-\tau_2)^2}{k^2\tau_1\tau_2}}-\frac{\vartheta_1-\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2}\cdot\frac{\tau_1-\tau_2}{k\sqrt{\tau_1\tau_2}}\right].\end{aligned}$$

1) In dem „$-\beta$" steckt die oben p. 8 erwähnte Verminderung der Dämpfung durch die Verstimmung.

Wenn wir dies in Gleichung (II) einsetzen, erhalten wir schließlich für den Stromeffekt im Empfänger:

$$J_{r\,\text{eff.}}^2 = \left[\frac{L_{21}\,L_{23}\,C_1\,C_2\,F}{4\,L_{33}\,k\,.\,(\tau_1+\tau_2)(\vartheta_1+\vartheta_2)\sqrt{\tau_1\,\tau_2\,\delta_3}}\right]^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(\tau_1-\tau_2)^2}{k^2\,\tau_1\,\tau_2}-\frac{\vartheta_1-\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2}\,.\,\frac{\tau_1-\tau_2}{k\,.\,\sqrt{\tau_1\,\tau_2}}}}\right]^2.$$

Ebenso wird für die andere Schwingung des gekoppelten Systems:

$$J_{r\,\text{eff.}}'^2 = \left[\frac{L_{21}\,L_{23}\,C_1\,C_2\,F}{4\,L_{33}\,k\,(\tau_1+\tau_2)(\vartheta_1+\vartheta_2)\sqrt{\tau_1\,\tau_2\,\delta_3}}\right]^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(\tau_1-\tau_2)^2}{k^2\,\tau_1\,\tau_2}+\frac{\vartheta_1-\vartheta_2}{\vartheta_1+\vartheta_2}\,.\,\frac{\tau_1-\tau_2}{k\,\sqrt{\tau_1\,\tau_2}}}}\right]^2.$$

Unsere Aufgabe besteht nun darin, zu untersuchen, wie sich diese beiden Ausdrücke mit der Verstimmung $(\tau_1-\tau_2)$ ändern. Offenbar wird der Wert der ersten eckigen Klammer nur wenig durch die Verstimmung beeinflußt, besonders wenn man die Verstimmung dadurch bewirkt, daß man die Selbstinduktion in beiden Systemen ändert und zwar so, daß die Selbstinduktion und damit die Schwingungsdauer des einen Systems um ebensoviel steigt, als die des anderen abnimmt, so daß $\tau_1+\tau_2$ konstant bleibt.

$J_{r\,\text{eff.}}^2$ und $J_{r\,\text{eff.}}'^2$ unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen des zweiten Gliedes im Nenner der zweiten Klammer. Die Stromeffekte beider Wellen sind mithin einander gleich, wenn dieses Glied $= 0$ wird, d. h. wenn die ungekoppelten Systeme in Resonanz stehen $(\tau_1=\tau_2)$, aber auch, *wenn* $\vartheta_1=\vartheta_2$, also bei gleicher Dämpfung. In diesem Fall haben beide Stromeffekte ein Maximum für $\tau_1=\tau_2$. Eine Erhöhung durch Verstimmung tritt nicht ein.

Ist $\vartheta_1 \gtrless \vartheta_2$, so tritt das Maximum nicht im Falle der Resonanz ein, sondern man kann durch Verstimmung eine Verstärkung eines der beiden Stromeffekte auf Kosten des anderen erzielen.

Wenn $\vartheta_1 > \vartheta_2$, so bewirkt eine Vertiefung des Primärsystems eine Verstärkung der höheren Koppelungswelle, und

eine Erhöhung der Schwingungszahl des Primärsystems eine Verstärkung der tieferen Koppelungswelle.

Wenn $\vartheta_1 < \vartheta_2$, so tauschen sich die Vorzeichen um, eine Vertiefung des Primärsystems bedingt eine Verstärkung der tieferen Koppelungswelle, eine Erhöhung der Schwingungszahl des Primärsystems eine Verstärkung der höheren Koppelungswelle.

Die Verstärkung erreicht bei einer gewissen Verstimmung einen *Höchstwert*, um dann wieder zu fallen. Um diesen Höchstwert zu berechnen, setzen wir

$$\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} = b \quad \text{und} \quad \frac{\tau_1 - \tau_2}{k\sqrt{\tau_1 \tau_2}} = z.$$

Dann wird die zweite Klammer bei $J^2_{reff.}$

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + z^2} - b z}\right)^2,$$

bei $J'^2_{reff.}$

$$B' = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + z^2} + b z}\right)^2.$$

B und damit $J^2_{reff.}$ hat ein Maximum für $z = b/\sqrt{1 - b^2}$, der zweite Wert von z, für den B ein Maximum wird, $z = 1/\sqrt{b^2 - 1}$, kommt als imaginär nicht in Betracht. Das Maximum von B hat den Wert $1/1 - b^2$, gleichzeitig hat B' den Wert $1 - b^2/(1 + b^2)^2$, während für $z = 0$ $B = B' = 1$ ist.

Über die Lage der Höchstwerte und ihre Höhe gegenüber dem Stromeffekt im Resonanzfall ($= 1$) gibt die folgende Tab. 1 und Fig. 1 Auskunft. Um sie den Verhältnissen bei der drahtlosen Telegraphie anzupassen, ist $\vartheta_2 > \vartheta_1$ gewählt, ferner $\tau_1 < \tau_2$ angenommen, mithin $J^2_{reff.} < J'^2_{reff.}$.

Tabelle 1.

	$z = \frac{\tau_1 - \tau_2}{k\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$	$J^2_{reff.}$	$J'^2_{reff.}$
$\vartheta_2 = \vartheta_1$	0	1	1
$\vartheta_2 = 2\,\vartheta_1$	0,35	0,72	1,12
$\vartheta_2 = 3\,\vartheta_1$	0,58	0,48	1,33
$\vartheta_2 = 4\,\vartheta_1$	0,75	0,35	1,56

Die Wirkung der Verstimmung ist hiernach um so größer, und der maximale Stromeffekt tritt bei um so stärkerer Verstimmung ein, je größer die Dämpfungsdifferenz der beiden Systeme ist. Für die Praxis der drahtlosen Telegraphie ist im Mittel — bei Schirmantennen ist das Verhältnis etwas kleiner, bei Einfach- und Mehrfachantennen größer — ϑ_2 etwa gleich $2{,}5\,\vartheta_1$, die durch Verstimmung erreichbare Vermehrung

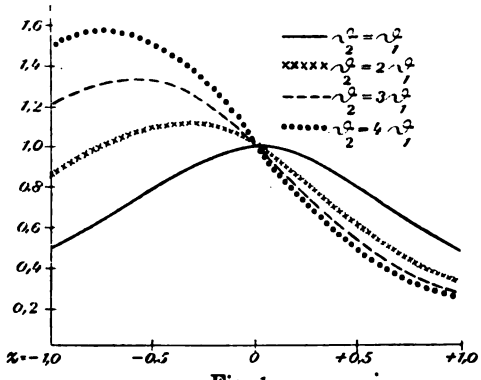


Fig. 1.

des Stromeffektes der höheren oder der tieferen Schwingung beträgt für $\vartheta_2 = 2{,}5\,\vartheta_1$ theoretisch 23 Proz. Dieselbe wird erreicht für $\tau_1 - \tau_2 = \pm\, 0{,}47\, k \sqrt{\tau_1\, \tau_2}$. Die absolute Verstimmung hängt von der Koppelung k ab. Je enger die Koppelung und je größer die Dämpfung (Ausstrahlung) des Sekundärsystems ist, um so größer muß die Verstimmung sein.

II. Versuche.

Zur Prüfung der Theorie wurde eine Reihe von Versuchen nach der Bjerknesschen Resonanzmethode mit verschiedenen Anordnungen gemacht, wobei direkte und indirekte Koppelung, offene und geschlossene Sekundärsysteme zur Anwendung gelangten. Einer dieser Versuche sei im folgenden ausführlicher beschrieben.

Primär- und Sekundärsystem I und II, Fig. 2 waren geschlossene Kreise, Selbstinduktion und Kapazität beider Kreise waren einander möglichst gleich gemacht ($L_{11} = L_{22}$, $C_1 = C_2$). Die Koppelung war eine direkte, indem ein Teil der Selbst-

induktion beiden Systemen gemeinsam war. Die Verstimmung geschah dadurch, daß Teile von L_{11} zu L_{22} hinzugefügt wurden, und umgekehrt; dabei blieb die Summe der Schwingungs-

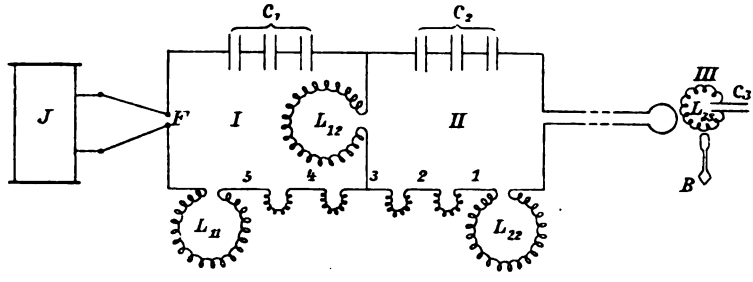


Fig. 2.

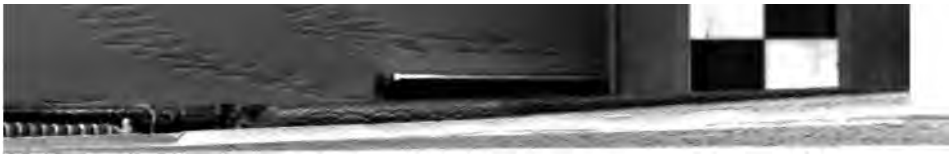
dauern ($\tau_1 + \tau_2$) annähernd die gleiche (vgl. p. 11). Die Vergrößerung der Dämpfung wurde durch Einschalten von gleich langen Stücken Manganindraht an Stelle von Kupferdraht bewirkt.

Mit dem Sekundärsystem sehr lose magnetisch gekoppelt war das Empfangssystem (III). Dasselbe bestand aus fester Selbstinduktion und variablem Luftkondensator. Der Stromeffekt in diesem System wurde in der bekannten Weise bolometrisch gemessen.

Im einzelnen war die Anordnung folgende: Der Strom wurde von einem großen Induktorium (J) mit A. E.-G. Turbinenunterbrecher geliefert. Die Zinkfunkenstrecke F betrug in der Regel 0,6 cm. Die Anzahl der Funken war etwa 8 in der Sekunde. Es wurde sorgfältig darauf geachtet, daß keine Partialfunken auftraten.

Die *Kapazitäten* C_1 und C_2 bestanden aus je drei hintereinander geschalteten großen Leidener Flaschen aus Flintglas. Die Kapazität von C_1 war der von C_2 merklich gleich und betrug $0{,}99 \cdot 10^{-3}$ M.F.

Die *Selbstinduktiven* L_{11} und L_{22} waren ebenfalls abgeglichen und betrugen je 19100 cm. Sie bestanden, abgesehen von den Verbindungsstücken, aus ringförmig gewickelten Spulen (Torroiden) aus 2 mm Cu-Draht. Diese Form war hier sowohl wie bei dem Resonanzkreis (3) gewählt, um unbeabsichtigte gegenseitige Wirkungen der einzelnen Kreise möglichst auszuschließen.



Die *Koppelung* wurde durch den gemeinsamen Ring L_{12} (Fig. 2) bewirkt. Der Koppelungskoeffizient k betrug 0,18.

Um die beiden Systeme gegenseitig zu *verstimmen*, waren vier gleiche kleine Selbstinduktionsrollen nebeneinander in die Kreise eingeschaltet (vgl. Fig. 2, Verbindungsstellen 1, 2, 3, 4, 5). Wurde der gemeinsame Zweig mit dem Punkt 3 verbunden, so waren die Schwingungszahlen einander gleich. Durch Verbindung mit den Punkten 2 und 1 konnte das Primärsystem gegen das Sekundärsystem vertieft, mit den Punkten 4 und 5 erhöht werden. Die Größe der kleinen Selbstinduktionsrollen war so gewählt worden, daß für die Punkte 2 und 4 die relative Verstimmung $z = \tau_1 - \tau_2 / k\sqrt{\tau_1 \tau_2}$ etwa $^1/_2$, für 1 und 5 etwa 1 betrug.

Über die Schwingungsdauern der beiden Systeme und die relative Verstimmung für die verschiedenen Verbindungsstellen gibt folgende Tabelle Auskunft.

Tabelle 2.

Verbindungsstelle	1	2	3	4	5
τ_1	1,26	1,31	1,37	1,43	$1{,}48 \cdot 10^{-7}$ sec
τ_2	1,48	1,43	1,37	1,31	1,26 „
τ_1 / τ_2	0,85	0,92	1	1,09	1,17 „
$z = \frac{\tau_1 - \tau_2}{k\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$	−0,90	−0,49	±0	+0,49	+0,90 „

τ ist die Schwingungsdauer dividiert durch 2π, die Schwingungsdauer in der Sekunde ist also z. B. im Resonanzfall $2\pi \cdot 1{,}37 \cdot 10^{-7}$ sec $= 8{,}6 \cdot 10^{-7}$ sec, die Wellenlänge würde demnach 258 m betragen.

Die Verbindung des Schwingungssystems mit dem *Resonanzsystem* (III) wurde durch eine mehrere Meter lange, bifilar geführte Leitung bewirkt, an deren Ende eine einzige Windung zu einer sehr losen magnetischen Koppelung mit dem Resonanzsystem diente.

Das Resonanzsystem bestand wieder aus einer ringförmig gewickelten Spule aus 3 mm Cu-Draht, welcher 14100 cm

Selbstinduktion besaß. Damit verbunden war ein variabler Luftkondensator der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie, dessen Teilung in 180° geteilt war. Die Kapazität dieses Kondensators C_3 und die Schwingungsdauer τ_3 des Resonanzkreises für die verschiedenen Stellungen C^0 des variablen Kondensators innerhalb des benutzten Bereiches sind durch folgende Tabelle gegeben:

Tabelle 3.

C^0	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°
C_3	0,86	1,02	1,18	1,34	1,51	1,67	$1{,}83 \cdot 10^{-3}$ M.F.
τ_3	1,10	1,20	1,29	1,37	1,45	1,53	$1{,}61 \cdot 10^{-7}$ sec.

In den folgenden Tabellen und Kurven ist stets C^0 angegeben, durch die obige Tab. 3 können die Angaben leicht auf die Schwingungsdauer zurückgeführt werden.

Zur Messung des Stromeffektes war der Resonanzkreis in der bekannten Weise mit einer empfindlichen Bolometeranordnung verbunden.[1])

Der Versuchsplan war folgender:

Die *Dämpfung* der beiden gekoppelten Systeme sollte bei einer Versuchsreihe annähernd gleich, bei einer zweiten sollte die Dämpfung des Primärsystems wesentlich kleiner als die des Sekundärsystems sein, bei einer dritten umgekehrt die des Sekundärsystems wesentlich kleiner als die des Primärsystems sein. Um einen Vergleich dieser drei Fälle zu ermöglichen, sollte die Summe der Dämpfung der beiden Systeme $(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ in allen drei Fällen möglichst gleich sein. Um dies durchzuführen, wurden 7 Ohm Manganinwiderstand in folgender Weise auf die beiden Systeme verteilt: Fall 1: Primärsystem, worin auch die Funkenstrecke sich befand, 3 Ohm Manganinwiderstand, Sekundärsystem 4 Ohm. Fall 2: Primär 0 Ohm, Sekundär 7 Ohm. Fall 3: Primär 6 Ohm, Sekundär 1 Ohm. Im Fall 3 ist

1) Bei dem Vergleich des Integraleffektes der beiden Schwingungen (τ und τ') könnte hier in Frage kommen, ob die Angaben des Bolometers unabhängig von der Schwingungsdauer sind (vgl. J. Zenneck, Elektromagnetische Schwingungen usw. Stuttgart, Enke 1905. p. 582). Wie leicht nachzuweisen, ist die Abhängigkeit, solange die Selbstinduktion im Bolometerzweig nicht zu klein ist, sehr gering, so daß sie nur bei *sehr* enger Koppelung, also großer Differenz von τ und τ' merklich sein könnte.

ϑ_1 etwa $= 2{,}5\,\vartheta_2$, im Fall 2 $\vartheta_2 = 2{,}5\,\vartheta_1$. Wegen der eigentümlichen Wirkung der Funkenstrecke (vgl. p. 21) ist eine genaue zahlenmäßige Angabe der Dekremente der beiden gekoppelten Systeme hier nicht möglich.

Die folgenden Tabellen geben die Resultate, die Zahlen unter C^0 bedeuten die Teilstriche des variablen Kondensators, die anderen die Galvanometerausschläge.

Tabellen und Kurven ergeben folgendes: Qualitativ wird die Theorie durchaus bestätigt, wie man sogleich aus der folgenden Zusammenstellung mit den Resultaten der Theorie ersieht:

1. $\vartheta_1 = \vartheta_2$ (vgl. Tab. 4, Fig. 3). Die Stromeffekte beider Schwingungen haben ein Maximum im Resonanzfall ($\tau_1 = \tau_2$).

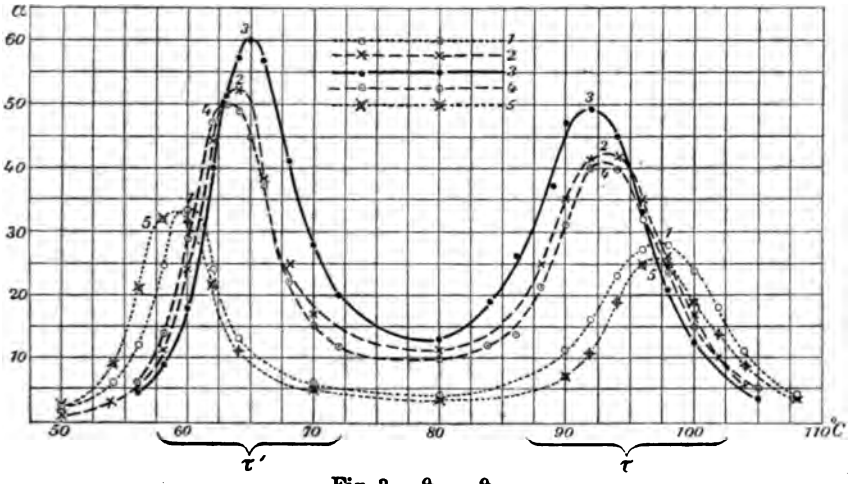


Fig. 3. $\vartheta_1 = \vartheta_2$.

Dementsprechend zeigt die Kurve (3) die höchsten Maxima, bei Verstimmung werden sie niedriger (Kurven 2 und 4 bzw. 1 und 5). Verstimmung nach oben und nach unten bewirkt annähernd dasselbe.

2. $\vartheta_1 > \vartheta_2$ (vgl. Tab. 5, Fig. 4). Eine Erhöhung des Primärsystems bewirkt eine Verstärkung der höheren Koppelungswelle (τ'). Dementsprechend sind auch die τ'-Maxima von (4) und (5) höher als das von (3). Andererseits bewirkt eine Vertiefung des Primärsystems eine Verstärkung der tieferen

Tabelle 4. Fig. 3.

Manganinwiderstände:
Primär 3 Ohm, Sekundär 4 Ohm.

C°	1	2	3	4	5
54	6	3	—	—	9
56	12	5,5	5	6	21
58	25	11	9	14	32
60	33	24	18	29	31
62	24	44	40	47	21,5
63	—	—	51	50	—
64	13	52	57	49	11
65	—	—	60	45	—
66	—	38	57	37	—
68	—	25	41	22	—
70	6	17	28	15	5
80	4,5	11,5	18	10	3,5
84	—	—	19	12	—
86	—	—	26	14	—
88	—	25	37	21	—
90	11	35	47	31	7
92	16	41	49	40	11
94	23	42	45	40	19
96	27	35	33	32	25
98	28	26	21	24	25
100	24	17	13	15	19
104	11	6	5	6	9

Tabelle 5. Fig. 4.

Manganinwiderstände:
Primär 0 Ohm, Sekundär 7 Ohm.

C°	1	2	3	4	5
54	4,5	—	—	—	12
56	—	4,5	4,5	7	36
58	16	9,0	9,0	18	71
60	22	18	19	44	56
62	18	34	41,5	72	28
63	—	39	53	75	—
64	13	40	63	70	11
65	—	39	66	57	—
66	—	33	63	43	—
67	—	28	55	30	—
68	—	23	44	22	—
70	6	16,5	28	16	4,5
80	5	11,0	15	9	4
84	—	15,0	20	12	—
86	—	19,5	27	18	—
88	—	29,0	39	16	—
90	13,5	42	48	23	7,5
92	22	55	50	31	8,5
94	37,5	57	48	31	11,5
96	52	47	32	27	15,5
98	53	31	22	20	16
100	40	17	13	14	14
102	24	10	8	8	11
104	12,5	—	—	—	7,5

Tabelle 6. Fig. 5.

Manganinwiderstände { Primär 6 Ohm / Sekundär 1 Ohm.

C°	1	2	3	4	5
56	18	7	—	—	15
58	47	15	12	15	17
60	65	37	23	27	16
62	45	65	45	33	11,5
64	17	71	58	28	—
66	—	49	52	20	—
68	—	25	33	14	—
70	7	17,5	22	10,5	5
75	—	11,0	14	—	4
80	4,5	11,0	—	8,5	4,5
82	—	—	16	—	—
84	—	—	21	—	—

C°	1	2	3	4	5
85	—	17,5	—	13,5	—
86	—	—	30	—	—
88	—	26	42	23	—
90	12,5	33	50	40	10,5
92	15,5	34	50	52	13
93	—	—	—	55	—
94	18	32	42	52	25
96	19	24	31	42	36,5
98	17	17	19,5	27	37
100	13,5	11	11	17	30
102	—	—	—	—	22

Koppelungswelle. Dementsprechend liegen die τ-Maxima 2 und 1 höher als die von (3).

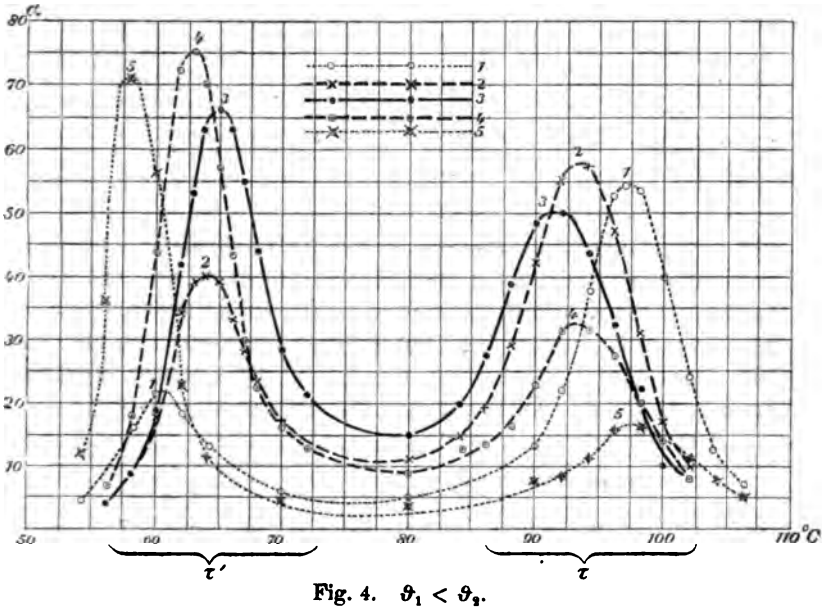


Fig. 4. $\vartheta_1 < \vartheta_2$.

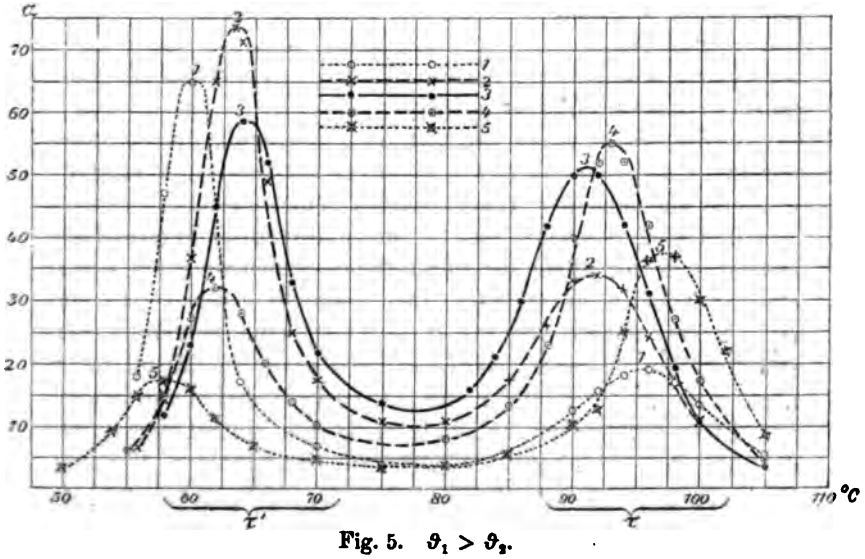


Fig. 5. $\vartheta_1 > \vartheta_2$.

3. $\vartheta_1 > \vartheta_2$ (vgl. Tab. 6, Fig. 5). Die Rollen von τ und τ' sind gegenüber dem vorigen Fall vertauscht. Eine Vertiefung des Primärsystems bewirkt eine Verstärkung von τ' (Kurve (1) und (2)); eine Erhöhung des Primärsystems eine Verstärkung von τ (Kurve (4)).

Maximum des Stromeffektes. Der Theorie nach soll, wenn $\vartheta_1 = 2{,}5\,\vartheta_2$ ist, der Stromeffekt der τ-Schwingung für

$$z = \frac{\tau_1 - \tau_2}{K\sqrt{\tau_1\,\tau_2}} = +\,0{,}47\,,$$

der τ'-Schwingung für $z = -\,0{,}47$ ein Maximum haben, und für größere Verstimmungen wieder sinken. Ebenso, nur mit Vertauschung von τ und τ', wenn $\vartheta_2 = 2{,}5\,\vartheta_1$ ist. Dementsprechend sehen wir auch, daß in den Figg. 4 und 5 die Kurven (2) und (4), bei denen die Verstimmung $z = \pm\,0{,}49$ ist, höhere Maxima erreichen, als die Kurven (1) und (5), bei denen $z = \pm\,0{,}90$ ist.

Der Theorie nach ist

$$\tau^2 - \tau'^2 = (\tau_1 + \tau_2)\sqrt{(\tau_1 - \tau_2)^2 + k^2\tau_1\,\tau_2}$$

(vgl. p. 10); die Differenz der Schwingungsdauern τ und τ' wächst also mit der Verstimmung der Einzelsysteme. Demgemäß liegen in allen Figuren die τ- und τ'-Maxima der Kurven (2) und (4) weiter auseinander als die der Kurven (3), und wieder die Maxima der Kurven (1) und (5) weiter als die von (2) und (4).

Quantitativ treten zwischen Theorie und Versuch folgende charakteristische Differenzen hervor:

1. Der Stromeffekt der tieferen Schwingung (τ) ist unter gleichen Umständen durchweg niedriger als der der höheren (τ'), während sie nach der Theorie gleich sein sollten.

2. Die Verstärkung des Stromeffektes durch Verstimmung erweist sich vor allem bei der tieferen Schwingung als *kleiner* als die Theorie es verlangt. So ergibt sich theoretisch für $\vartheta_1 = 2{,}5\,\vartheta_2$ ebenso wie für $\vartheta_2 = 2{,}5\,\vartheta_1$ eine maximale Verstärkung von 22 Proz., während die Kurven im Mittel für τ' noch nicht 20 Proz., für τ nur ca. 10 Proz. Erhöhung zeigen.

Diese Differenzen haben ihren Grund einmal darin, daß die bei der Ableitung der Theorie eingeführten Vernachlässigungen recht weitgehend sind, z. B. ist ϑ_3 neben $\vartheta_1 + \vartheta_2$ als verschwindend angenommen, dann wirken bei den Ver-

suchen stets *beide Schwingungen auf das Resonanzsystem gleichzeitig ein*, und, wenn auch in unserem Fall in der Nähe der Resonanz der einen Schwingung die Wirkung der anderen klein ist, so bleibt doch ein Einfluß in dem Sinne übrig, daß die Verstärkung des Stromeffektes durch Verstimmung geringer ausfällt als nach der Theorie.

Vor allem jedoch ist es der Einfluß der *Funkenstrecke*, welche die quantitativen Abweichungen von der Theorie verursacht. Am deutlichsten muß die Wirkung der Funkenstrecke hervortreten, wenn man keine Zusatzwiderstände aus Manganindraht in den beiden Systemen hinzufügt. Dann ist natürlich das primäre System wegen der in ihm vorhandenen Funkenstrecke viel stärker gedämpft wie das sekundäre System; in unserem Falle war in diesem Falle ϑ_1 ca. $= 2{,}5\,\vartheta_2$, es hätte sich also etwa das Bild der Fig. 5, Tab. 6 ergeben müssen, nur mit steileren Resonanzmaximis.

Tab. 7 und Fig. 6 zeigen die Versuchsergebnisse.

Tabelle 7.

C^0	2	3	4	C^0	2	3	4
56	8	9,5	9	70	21	32	17
58	19	17	23	75	11	16	10
60	51	37	80	80	12	15	10
61	106	61	132	85	—	30	11
62	186	115	166	88	33	60	—
63	213	176	157	90	64	122	52
64	171	210	110	92	112	163	118
65	98	180	64	94	128	127	142
66	59	117	—	96	93	66	104
67	43	70	31	98	44	27	45
68	33	52	—	100	19	14	8

Wir sehen, daß das τ'-Maximum von (2) nur wenig höher ist als das von (3), und daß das τ-Maximum von (4) sogar unter dem τ-Maximum von (3) liegt. Andererseits liegt das τ-Maximum von (2) und das τ'-Maximum von (4) trotz der entgegengesetzten Verstimmung verhältnismäßig hoch. Das Ganze verhält sich so, als ob ϑ_1 nicht erheblich, sondern nur ein wenig größer wäre als ϑ_2, der Funkenwiderstand sich also auf

beide Systeme verteilte. Auch bei den obigen Versuchen ist diese Erscheinung, wenn auch viel schwächer, zu erkennen. Ferner ist bei diesen Kurven charakteristisch — ist aber ebenfalls bei allen übrigen merklich —, daß das Dekrement der Schwingung τ nicht, wie die Theorie es verlangt, kleiner

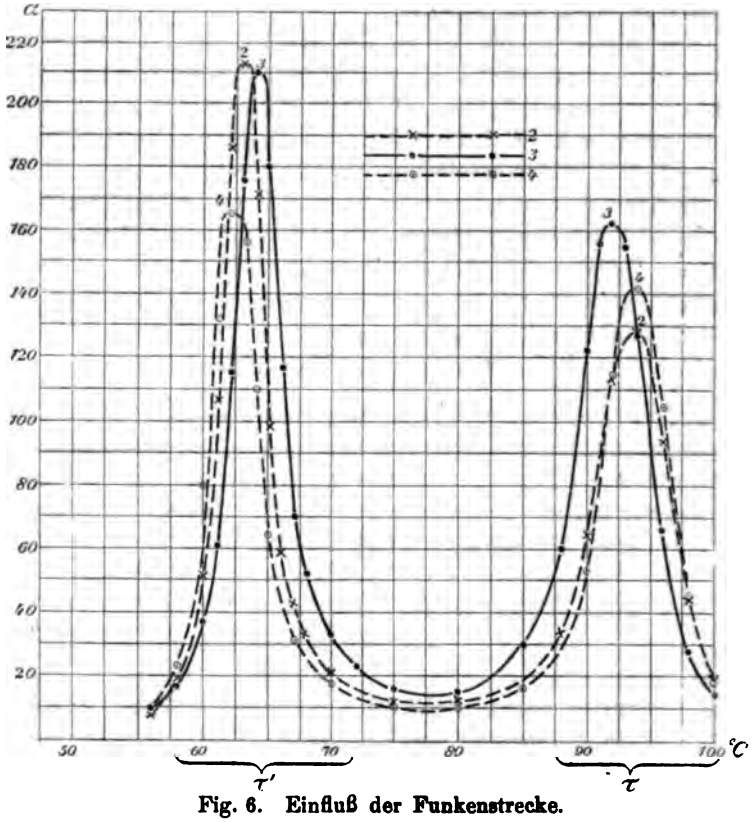


Fig. 6. Einfluß der Funkenstrecke.

ist als das von τ', sondern eher noch größer ist. In bezug hierauf verweise ich auf die Arbeit von C. Fischer[1]), der diese Fragen nach der Dämpfung der gekoppelten Schwingungen eingehend behandelt. Alles dieses hängt offenbar damit zusammen, daß eine Funkenstrecke sich durchaus nicht wie ein einfacher Widerstand verhält, wie es in der Theorie vorausgesetzt wird.

1) C. Fischer, Ann. d. Phys. **19.** p. 182. 1906.

Durchaus analoge Ergebnisse erhielt ich bei Versuchsreihen mit anderen Schwingungszahlen und anderer Koppelung, vor allem auch mit *offenen* sekundären Sendern. Hierüber habe ich schon an anderer Stelle berichtet.[1]) Überall waren die Resultate des Versuches der Theorie entsprechend, nur war die Erhöhung des Stromeffektes durch Verstimmung vor allem bei der tieferen Schwingung kleiner als es die Theorie verlangt. Bei größerem Unterschiede in den Dämpfungen ($\vartheta_2 = 4\,\vartheta_1$ und $\vartheta_2 = 5\,\vartheta_1$) blieb die tatsächlich erreichbare Erhöhung des Stromeffektes noch mehr hinter der theoretischen zurück, statt über 50 Proz. erhielt ich höchstens etwa 30 Proz.

Für *die drahtlose Telegraphie ist mithin von der Verstimmung wenig Erfolg zu erwarten.* Die Verhältnisse bei eng gekoppelten Sendern liegen etwa so wie bei Fig. 4, Tab. 5. Durch Verstimmung um etwa 5—10 Proz. — nach oben oder nach unten, je nachdem man die hohe oder die tiefe Koppelungswelle benutzen will — kann man eine geringe Erhöhung des Stromeffektes im Empfänger erzielen. Gleichzeitig sinkt die Dämpfung, die Resonanzfähigkeit wird also etwas erhöht. Die Maxima sind innerhalb eines gewissen Bereiches der Verstimmung ziemlich gleich hoch, so daß es nicht genau darauf ankommt, ob man um 5 oder 10 Proz. verstimmt (vgl. Fig. 4 τ'-Maxima von (3), (4), (5)). Eine genaue Einstimmung ist daher nicht notwendig, was unter Umständen bequem ist.

Die gleichen Wirkungen — höheren Stromeffekt im wenig gedämpften Empfänger, kleiner Dämpfung der Wellen — kann man anstatt durch Verstimmung auch durch *losere Koppelung* der beiden Systeme des Senders erzielen. Auf diesem rationelleren Wege ist in den letzten Jahren die Praxis der Telegraphie ohne Draht vorgegangen, und, wie es scheint, mit gutem Erfolg.

Physikalisch von größerem Interesse ist die Wirkung der Verstimmung auf die Schwingungen im *primären* System.

III. Wirkung der Verstimmung auf das primäre System.

Aus den Drudeschen Gleichungen können die Potentiale der beiden Schwingungen im *primären* System in der gleichen Weise berechnet werden wie die im sekundären System. Das

1) M. Wien, Physik. Zeitschr. 8. p. 10. 1907.

Verhältnis der Dämpfungen ist hier nicht von dem gleichen entscheidenden Einfluß wie dort; es genügt daher, wenn wir den Fall gleicher Dämpfung ($\vartheta_1 = \vartheta_2$) behandeln.

Unter Einführung derselben Vernachlässigungen wie oben ergeben die Drudeschen Gleichungen (27) und (106), (107), (108) für die Amplituden der Potentialdifferenzen der beiden gekoppelten Schwingungen:

$$V_{01} = \frac{F}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\,k^2\,\tau_1^2\,\tau_2^2}{(\tau_1^2 - \tau_2^2)^2}}}\right),$$

$$V'_{01} = \frac{F}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\,k^2\,\tau_1^2\,\tau_2^2}{(\tau_1^2 - \tau_2^2)^2}}}\right).$$

Für $\tau_1 = \tau_2$ wird $V_{01} = V'_{01} = F/2$. Ist $\tau_1 \gtrless \tau_2$, so nimmt V_{01} mit wachsender Verstimmung schnell zu, während V'_{01} sinkt. V_{01} strebt schließlich dem Wert F, V'_{01} dem Wert Null zu. In der Nähe der Resonanz ($\tau_1 = \tau_2$) bewirkt schon eine kleine Änderung von τ_1/τ_2 eine starke Änderung des Verhältnisses V_{01}/V'_{01}. Ganz entsprechend verhält sich der Stromeffekt in einem lose gekoppelten resonierenden System.

Als Beispiel sei eine Versuchsreihe mit derselben Anordnung angeführt, die oben die Tab. 4 und Fig. 3 ergeben hatte, und wurde jetzt an Stelle des sekundären das primäre System mit dem Resonanzsystem lose magnetisch gekoppelt.

Tabelle 8. Fig. 7.

Manganinwiderstände: Primär 3 Ohm, Sekundär 4 Ohm.

$C°$	2	3	4	$C°$	2	3	4
54	13	—	—	84	—	6	11
56	22	—	7	86	—	12	18
58	37	16	11	88	—	25	32
60	67	27	18	90	10	40	54
61	—	—	21	92	17	58	80
62	93	45	19	94	23	58	93
63	101	50	—	95	—	—	100
64	94	49	11	96	25	54	97
66	68	35	4	98	23	44	85
68	34	16	2	100	17	31	68
70	18	7	1	102	—	—	45
80	2	3	4	105	7	12	25

Aus Fig. 7 ist deutlich zu entnehmen, wie stark die Maxima von τ und τ' durch die Verstimmung beeinflußt werden. Ein charakteristischer Unterschied des primären und sekundären Systems ist auch das viel stärker ausgebildete Minimum zwischen den beiden Maximis bei dem primären System.

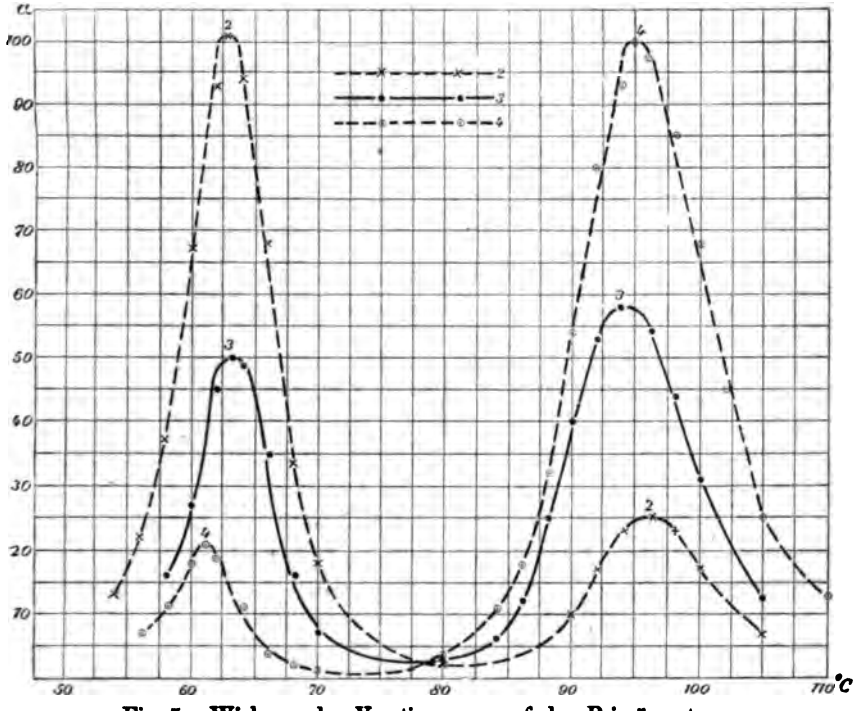


Fig. 7. Wirkung der Verstimmung auf das Primärsystem.

Offenbar liegt hierin ein empfindliches Reagenz auf die Genauigkeit der Einstimmung zweier Systeme aufeinander. Sobald eine Dissonanz vorhanden, werden die Maxima ungleich hoch. Die Methode ist um so empfindlicher (vgl. obige Formel p. 24) je kleiner die Koppelung k ist. Man darf darin allerdings auch nicht zu weit gehen, da bei allzu loser Koppelung das Minimum zwischen den Maximis schlecht ausgebildet ist. Meiner Erfahrung nach ist es am günstigsten, wenn man die Koppelung so lose wählt, daß im Minimum der Ausschlag des Galvanometers etwa halb so groß ist, wie in den beiden Maximis

(vgl. Fig. 8). Diese „empfindliche Figur" wird sofort geändert, sobald eines der beiden Systeme verstimmt oder die Dämpfung verändert wird.

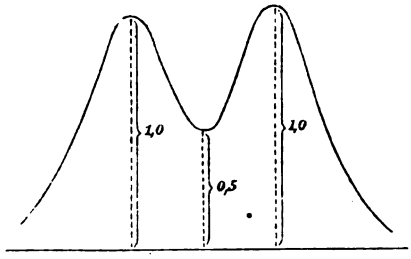


Fig. 8.

Tab. 9, Fig. 9 gibt die Resultate einer Versuchsreihe, bei der zwei Systeme so lose miteinander gekoppelt waren, daß

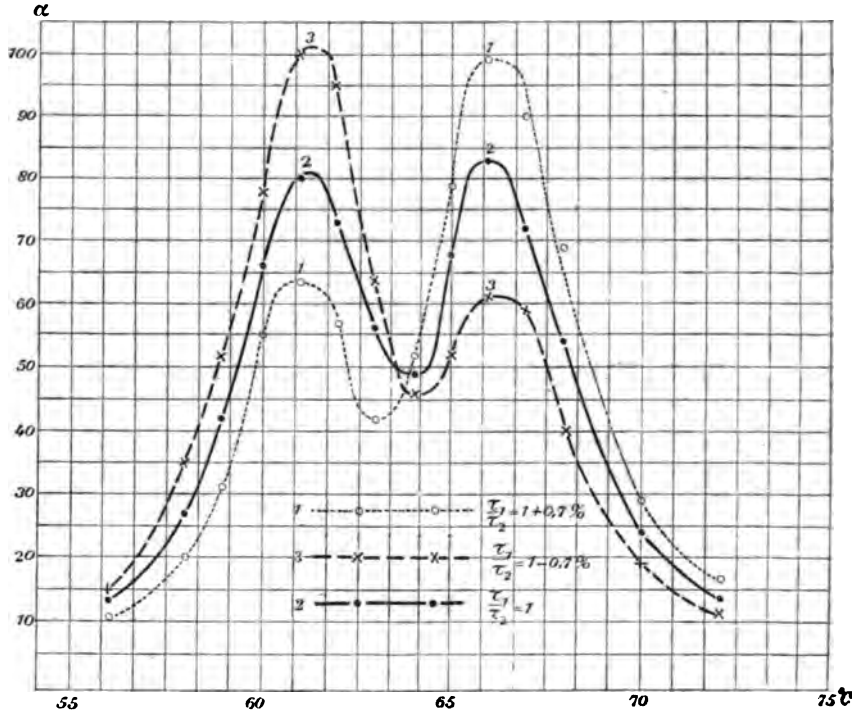


Fig. 9. Empfindliche Figur, Einwirkung der Verstimmung.

die „empfindliche Figur“ entstand. Bei Kurve (2) sind die Systeme in Resonanz, bei Kurve (1) ist das Primärsystem um 0,7 Proz. tiefer, bei Kurve (3) um 0,7 Proz. höher gestimmt als das Sekundärsystem. Es ist klar, daß noch viel kleinere Dissonanzen bis zu 0,1 Proz. herab merklich wären.

Die Empfindlichkeit hängt offenbar von der Dämpfung ab; eliminiert man die Hauptursache der Dämpfung: den Funken[1]), so kann die Methode noch sehr verfeinert werden. Tab. 10 enthält die Versuche mit zwei Systemen, deren Dekre-

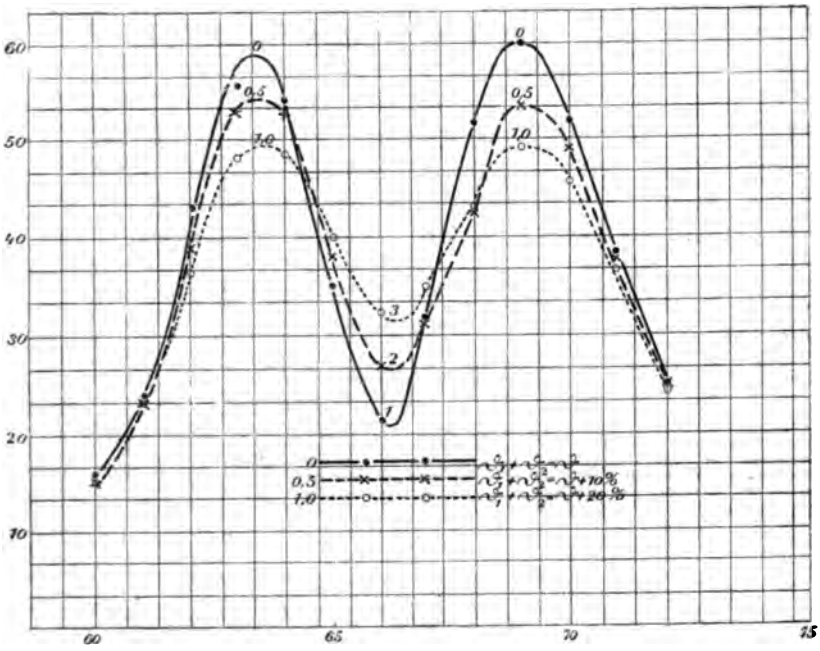


Fig. 10. Empfindliche Figur, Wirkung der Dämpfungsänderung.

ment nur etwa = 0,015 war. Die Verstimmung betrug hier nur ein Zehntel der vorhergehenden, also bei (1) + 0,07 Proz., bei (3) −0,07 gegen (2). Der Verlauf der Kurven ist etwa der gleiche wie in Fig. 9. *Eine Verstimmung um etwa zwei Zehntausendstel war noch mit Sicherheit zu erkennen.*

1) Über die Art der Erzeugung dieser schwach gedämpften Schwingungen wird nächstens berichtet werden.

Tabelle 9. Fig. 9.

C^0	(1)	(2)	(3)
56	10,5	13,5	15
58	20	27	35
59	31	42	52
60	55	66	78
61	64	80	100
62	57	73	95
63	42	56	64
64	52	49	46
65	79	68	52
66	99	83	61
67	90	72	59
68	69	54	40
70	29	24	19
72	16,5	13,5	11

Tabelle 10.

$1^0\ C^0 = \frac{1}{2250}\ \tau$

C^0	(1)	(2)	(3)
110	56,8	58,1	61,7
113	70,4	76,5	88,9
115	67,9	81,4	98,8
117	59,3	72,8	96,7
119	50,6	60,3	82,7
121	44,4	49,4	67,9
125	53,1	44,4	45,7
129	85,2	64,2	53,1
131	98,8	76,5	65,4
133	101,2	82,7	74,1
135	90,6	81,4	76,5
137	80,2	72,7	71,6
139	67,9	61,7	63,0
141	56,8	51,8	50,6

Tabelle 11. Fig. 10.

C^0	0 Ω	0,5 Ω	1,0 Ω
60	16	15	15
61	24	23,5	23,5
62	43	39	36,5
63	56	53	48
63,5	59	54	49
64	54	53	48,5
65	35	38	40
66	21	27	32
67	30,5	30	34
68	51,5	42	43
69	60,0	53,5	49
70	52	49	45,5
71	38,5	38	36,5
72	25	25	24

In dieser Methode besitzen wir demnach ein äußerst empfindliches Mittel, um bei schnellen Schwingungen Schwingungsdauern, Kapazitäten und Selbstinduktionen miteinander zu vergleichen und kleine Änderungen dieser Größen zu messen.

Die Zunahme der Dämpfung eines der beiden Systeme bewirkt, daß die Maxima niedriger werden, das Minimum höher. Als Beispiel ist in Tab. 11, Fig. 10 eine Versuchsreihe mit etwa der gleichen Anordnung wie bei Tab. 9, Fig. 9 angeführt, bei der im sekundären Kreis zunächst 0 Ohm, dann $^1/_2$ Ohm, schließlich 1,0 Ohm Manganinwiderstand hinzugefügt wurde. Dadurch erhöht sich die Summe der Dämpfungen der beiden Systeme $(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ jedesmal um ca. 10 Proz.

Der Einfluß auf die Kurvenform ist deutlich erkennbar. Der Stromeffekt im Maximum zu dem im Minimum verhält sich bei den drei Kurven annähernd wie 3 bzw 2 und 1,5. Eine Änderung von $\vartheta_1 + \vartheta_2$ um ca. 2 Proz. war noch erkennbar.

Ergebnisse.

Das Sekundärsystem eines eng gekoppelten Senders sendet zwei Wellen verschiedener Perioden aus. Es fragt sich, ob der durch eine dieser Wellen erzeugte Stromeffekt in einem resonierenden Empfänger durch *Verstimmung* der beiden Systeme des Senders gegeneinander auf Kosten der anderen Welle erhöht werden kann.

1. Die *Theorie* ergibt, daß eine mäßige Erhöhung des Stromeffektes durch Verstimmung sowohl bei der höheren wie bei der tieferen Welle unter Umständen möglich ist. Diese Erhöhung ist gleich Null, wenn die Dämpfungen der beiden Systeme des Senders gleich sind, und steigt mit der Differenz dieser Dämpfungen.

2. Das *Experiment* bestätigt die Theorie, jedoch ist die Erhöhung des Stromeffektes besonders bei der tieferen der beiden Koppelungswellen kleiner als die Theorie es verlangt; sie erreichte bei meinen Versuchen im Maximum ca. 30 Proz. Der Grund dieser Abweichung liegt hauptsächlich in der der Theorie nicht entsprechenden Wirkung des Funkens.

3. Der Stromeffekt des *primären Systems* des Senders wird stark durch Verstimmung beeinflußt, indem schon bei einer sehr geringen Differenz der Schwingungszahlen der beiden Systeme die Maxima der beiden Koppelungswellen verschieden hoch ausfallen. Hierauf läßt sich eine empfindliche Methode zur Messung kleiner Änderungen der Wellenlänge, Selbstinduktion, Kapazität gründen.

Danzig, Physikal. Institut der Technischen Hochschule,
29. November 1907.

(Eingegangen 2. Dezember 1907.)

2. *Die magnetische Wirkung der Kathodenstrahlen; von Eugen Klupathy.*

Unter den charakteristischen Eigenschaften der Kathodenstrahlen steht ihre Ablenkbarkeit durch den Magneten obenan. Dies war schon im Anfang die kräftigste Stütze der Emissionstheorie, weil der Sinn der Ablenkung im magnetischen Felde ein solcher ist, wie der eines zur Kathode geknüpften geraden, biegsamen Leiters, in welchem negative elektrische Strömung vor sich geht.

Betrachten wir nun die Versuchsergebnisse von Rowland, Himstedt, wonach die mit elektrischer Ladung begabten, in rascher Bewegung begriffenen Körper ein magnetisches Feld erzeugen, dessen Stärke der Bewegungsgeschwindigkeit und der Ladungsgröße proportional ist, ferner die Tatsache, daß die Kathodenstrahlen negative Ladung mit sich führen, so scheint es gerechtfertigt, die Kathodenstrahlen als einen Strom bewegter negativer Ladungen anzusehen. In diesem Falle natürlich müßte in erster Reihe die magnetisierende Wirkung der Kathodenstrahlen selbst auszuweisen sein, was aber bis jetzt nicht gelang. Ich habe Kenntnis zweier diesbezüglicher Versuche. Den ersten unternahm Hertz[1]), den zweiten v. Geitler[2]); beide mit negativem Ergebnis.

Hertz setzte bei seinen Versuchen eine kompensierte Magnetnadel über eine 30 cm lange Kathodenröhre; das eine Ende des Rohres enthielt die kreisrunde Kathodenplatte, durch deren durchbrochene Mitte der isolierte Anodenstift hervorragte. Durch diese Anordnung wollte er die Wirkung des die Kathodenstrahlen erregenden Stromkreises auf die Magnetnadel ausschließen. Über die Empfindlichkeit der Anordnung bemerkt Hertz, daß der Gesamtstrom der Röhre ca. 0,01 $\frac{\text{Daniell}}{\text{Siemens}}$,

1) H. Hertz, Wied. Ann. 19. p. 789—816. 1883.
2) E. v. Geitler, Ann. d. Phys. 5. p. 924. 1901.

d. h. 0,01 Amp. 30—40 Skt. Ausschlag ergab, wobei noch $^1/_{10}$ Skt. ablesbar war. Hieraus folgerte er, daß die magnetisierende Wirkung der Kathodenstrahlen kleiner ist als $^1/_{300}$ der Wirkung des Gesamtstromes, d. h. kleiner als $^1/_{30000}$ Amp.

Hertz unterstützte durch dieses negative Ergebnis seine Auffassung über die Kathodenstrahlung, laut welcher diese dem Licht ähnliche Wellenstrahlen seien. Er betont, daß von der Ablenkung der Kathodenstrahlen im magnetischen Felde auf das einer Rückwirkung entsprechende Verhalten der Kathodenstrahlen auf den Magneten noch durchaus nicht geschlossen werden kann. Er hält es für wahrscheinlicher, daß die Ablenkung im Magnetfeld die Folge der Magnetisierungsänderung des Mediums ist, und man müsse sagen, daß sich die Kathodenstrahlen anders im magnetisierten als im unmagnetisierten Medium fortpflanzen. Die Analogie mit der Ablenkung des geraden Leiters sei wahrscheinlich nur eine oberflächliche und die Erscheinung wäre eher der Drehung der Polarisationsebene des Lichtstrahles in magnetisierten Medien ähnlich.

Josef v. Geitler hielt die Betrachtungen von Hertz für unwahrscheinlich und suchte die Ursache des negativen Ergebnisses in der Versuchsanordnung. Nach seiner Auffassung wird die Röhrenwand durch die Kathodenbestrahlung negativ elektrisch, und diese negativen Ladungen entladen sich nach rückwärts, entlang der Röhrenwand zur Anode. Die magnetische Wirkung dieser nach rückwärts verlaufenden negativen Ströme kompensiert dann jene der Kathodenstrahlen; daher keine Wirkung nach außen, wie bei einem bifilar geführten Leitungsdraht. Dementsprechend brachte er die Magnetnadel ungefähr in die Mitte des Rohrquerschnittes, damit die Wirkung der symmetrisch rückströmenden Ladungen aufgehoben werde. Das Ergebnis seiner ersten Versuche war eine starke Ablenkung der Magnetnadel im Sinne der elektrodynamischen Wirkung der in den Kathodenstrahlen strömenden negativen Elektrizität. Die Schwingungsdauer von v. Geitlers kompensierter Magnetnadel war 1,7 Sek., die Empfindlichkeit aber nur von der Größe, daß ein 1 cm unter der Nadel fließender Strom von 0,011 Amp. 6 cm Ausschlag bei 130 cm Skalenabstand ergab; also entsprach 1 mm Ausschlag 0,00015 Amp.

Die als Wirkung der Kathodenstrahlen erhaltenen Ausschläge betrugen 3—17 cm, was im Mittel einem Strom von 0,01 Amp. entsprechen würde.

Daß dieses Ergebnis falsch sein muß, zeigt schon die Größenordnung des Beobachtungsmaterials, und Hr. v. Geitler kam bald zur Wahrnehmung der Fehlerquelle, worauf er im folgenden Jahre die Folgerungen aus seinen Ergebnissen, daß die Kathodenstrahlen eine magnetisierende Wirkung hätten, zurückzog.

Es hat sich nämlich gezeigt, daß das Gefäß des Magnetometers unten mit einem anderen Metall verlötet war und die auffallenden Kathodenstrahlen dort starke Erwärmung bewirkten, dessen thermoelektrische Wirkung ganz den beobachteten Ausschlägen entsprochen haben. So bewies also schließlich auch Hr. v. Geitler nicht, ob die Kathodenstrahlen magnetisierende Wirkung besitzen. Es war aber auch bei seiner Versuchsanordnung wegen der Unempfindlichkeit des Magnetometers kein Ergebnis zu erwarten; kann man doch auf die Größenordnung der zu erwartenden magnetischen Wirkung der Kathodenstrahlen aus den auf deren elektrische Ladung bezüglichen Messungen im voraus Schlüsse ziehen.

Die von einer gegenüber der Kathode befindlichen Elektrode — von der Antikathode — ableitbare elektrische Ladung wurde von vielen mittels Galvanometers gemessen und der Strom ergab sich aus diesen Messungen in 10—12 cm Abstand von der Kathode, im Mittel von der Größenordnung 10^{-5} Amp. Natürlich ist diese Größe von vielen Faktoren abhängig, in der Hauptsache aber sind die Ladungen um so geringer, je weiter die Antikathode entfernt und je enger die Röhre ist. Ewers[1]) erhielt z. B. bei einer weiten Röhre bei 13 cm Abstand von der Kathode 10^{-4} und 10^{-5} Coul./sec, aber dies ist beiläufig der größte beobachtete Wert.

Daraus ist es wahrscheinlich, daß die mit normal starken, dünneren Kathodenröhren erreichbaren Grenzen über 1 Mikroampère nicht hinausgehen werden, hauptsächlich weil man wegen den störenden Nebenumständen den wirkungsvollen Teil

1) P. Ewers, Wied. Ann. **69**. p. 167. 1899.

der Röhre weiter von der Kathode verlegen muß als der Abstand der Antikathode bei Ewers' Versuchen war.

Nun ist das negative Ergebnis der Hertzschen Versuche auch erklärlich, es entsprach ja dort 0,1 Skt. nur $4 . 10^{-5}$ Amp. Bei dieser Empfindlichkeit ist 0,1 Skt. selbst bei den günstigsten Verhältnissen wegen Schwankungen der erdmagnetischen Intensität kaum ausweisbar.

Soll nun die Frage der magnetisierenden Wirkung der Kathodenstrahlen durch normal starke Kathodenröhren entschieden werden, so muß ein Magnetometer benutzt werden, welches in einem 1—2 cm abstehenden geraden Leiter fließenden Strom von 10^{-6} Amp., d. h. 10^{-7} C.G.S. Feldintensitätsänderung anzeigt. Da nun weder die Anordnung von Hertz, noch jene von v. Geitler dieser Bedingung entsprach, so können ihre negativen Ergebnisse in erster Reihe auch diesem Umstande zugeschrieben werden.

Ausgehend von diesem Gesichtspunkte versuchte ich ein Magnetometer herzustellen, welches die besagte Empfindlichkeit besitzt und auch den übrigen bei der Versuchsanordnung auftretenden Erfordernissen gerecht wird. So wird Unempfindlichkeit gegen schnelle magnetische Störungen gefordert. Letztere besonders aus dem Grunde, weil in jenem Raum des Physikalischen Instituts, wo die Beobachtungen angestellt waren, viele Eisentraversen eingebaut sind und die Stromänderungen der nahen elektrischen Straßenbahn und der elektrischen Beleuchtung sehr zu verspüren waren.

Für diese Zwecke hielt ich jene Einrichtung für die geeignetste, welche P. Weiss[1]) zu galvanometrischen Zwecken und Baron Roland v. Eötvös[2]) in seinen äußerst empfindlichen magnetischen Variationsinstrumenten mit Erfolg benutzte, nämlich eine mit vertikaler Achse aufgehängte Magnetnadel.

Nach vielen Versuchen gelang es, auf diese Weise ein Magnetometer herzustellen, welches die gewünschte Empfindlichkeit besaß, wobei ein Teil der störenden Einflüsse auszuschließen möglich war.

1) P. Weiss, Journ. de Phys. 4. p. 214. 1895.
2) R. v. Eötvös, Wied. Ann. 59. p. 357. 1896.

Leider gelang es nicht, die magnetischen Störungen in gehörigem Maße einzudämmen und so beschränken sich die Versuche lediglich darauf, die Wirkung der Kathodenstrahlen auf die Nadel nachzuweisen.

Zur Gewinnung von Meßresultaten müßten die Versuche an einem Orte angestellt werden, wo diese Störungen geringer sind, oder es müßte deren Beseitigung angestrebt werden. Diesbezügliche Versuche sind im Gange und es steht zu hoffen, daß auf Grund dieser die störenden Einflüsse auf ein Geringes herabgemindert werden können.

Die Versuchsanordnung.

Fig. 1 zeigt das Schema der Versuchsanordnung. Auf einem etwa 40 cm langen Quarzfaden, dessen Torsionsmoment

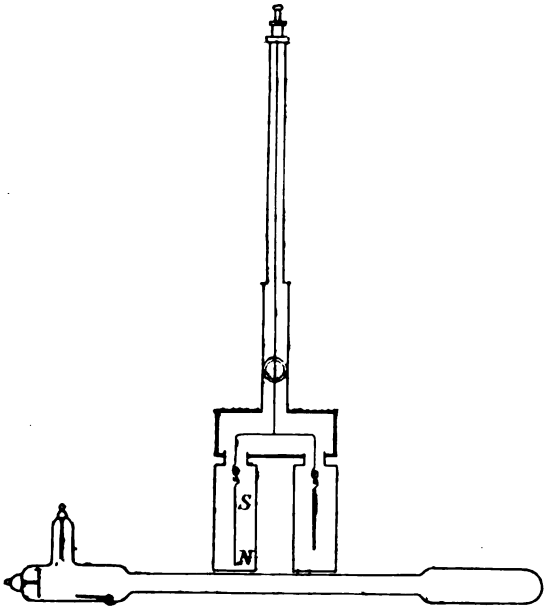


Fig. 1.

0,0005 C.G.S. beträgt, hängt der 6,5 cm lange, aus dünnem Kupferdraht gebogene Arm, dessen eines Ende die vertikal hängende aus Wolframstahl gefertigte Magnetnadel, das andere

Ende ein Gegengewicht aus Kupferdraht trägt. Das magnetische Moment der Nadel beträgt 42, die Polstärke 6,6, das Trägheitsmoment des ganzen Systems 14 C.G.S. Aus zweierlei Gründen wählte ich ein so leichtes und verhältnismäßig schwaches Magnetsystem. Erstens ist die Empfindlichkeit der Torsionswage — maximale Belastung des Drahtes vorausgesetzt — um so größer, je kleiner die angehängte Masse und daher der Drahtquerschnitt ist; andererseits muß die Rückwirkung der in dem Kathodenbündel vorausgesetzten sehr kleinen und intermittierend wirkenden Teilchen auf einen Magneten von kleiner Masse größer sein, weil die Polstärke mit der Masse nicht proportional wächst.

Die Magnetnadel ist mittels Spitze, Häkchen und Ose am Ende des Armes aufgehängt, wobei sie um ihre vertikale Achse verstellbar ist. Dies war notwendig, um die Horizontalkomponente des magnetischen Momentes der Nadel in den Meridian stellen zu können, damit der Faden ohne Torsion in die Gleichgewichtslage gebracht werden könne. Mit einiger Übung ist dies leicht zu erreichen, so daß die Gleichgewichtslage des Magnetometers dieselbe ist, als wenn statt der Nadel ein entsprechender Kupferdraht eingehängt wird.

Die Länge der Magnetnadel wurde so gewählt, daß die Wirkung eines geraden im Meridian verlaufenden als unendlich angesehenen Leiters maximal sein soll; da bei dieser Anordnung die Differenz der Drehmomente beider Pole in Wirkung tritt, welche bei gegebenem Leiterabstand ein Maximum besitzt.

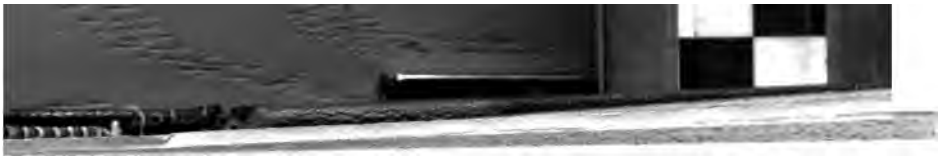
Setzt man voraus, daß der sehr lange gerade Leiter in der durch die Nadel gehenden vertikalen Meridianebene horizontal angebracht ist, wobei seine Entfernung von der Nadel gleich r ist, ferner nehmen wir die Pole der Nadel im zwölften Teil ihrer Länge von den Enden an, so ist die Kraft

$$P = \frac{2i\mu}{r + \frac{l}{12}} - \frac{2i\mu}{r + \frac{11}{12}l} = \frac{5/3\, i\mu . l}{\left(r + \frac{l}{12}\right)\left(r + \frac{11}{12}l\right)},$$

wo i die Stromstärke, μ die Polstärke bezeichnet. P wird Maximum, wenn

$$r^2 = \frac{11}{144}l^2 \quad \text{oder} \quad l = \frac{12}{\sqrt{11}} \cdot r.$$

Ist $r = 2$ cm, hat man $l = 7{,}2$ cm.



Daß die Nadel vor Luftströmung und Wärmestrahlung möglichst geschützt sei, benutzte ich die Aufhängevorrichtung und das Verschlußkästchen eines Kohlschen Gravitationsinstrumentes mit der Modifikation, daß sowohl der den schwingenden Arm umgebende Teil überall doppelwandig und ganz eisenfrei war, als auch das zylindrische Gefäß, das die Nadel enthält, aus reinem elektrolytischen Kupfer hergestellt war, welches unten gehämmert und an der Seite längs einer Erzeugenden mit Silber verlötet war. Da der Boden des parallelepipedischen Kästchens aus Aluminium besteht, wobei Eisenspuren zu befürchten waren, ist das Ende des Kupferarmes senkrecht nach unten gebogen, so daß das obere Ende der Nadel 2 cm vom Boden des Kästchens absteht. Die Glaswand des Kästchens ist mit Stanniolschicht überklebt, und an die Säulchenträger um den Arm sind ebenfalls Stanniolblättchen befestigt, so daß dadurch ein dreiwandiger Kasten entsteht.

Die innere Wand dient zur Erhöhung der Dämpfung. Solcherweise gelang es, die Schwingungen der Nadel fast aperiodisch zu machen.

Die Schwingungsdauer der Nadel betrug ohne Kompensation 85 Sek. und ein linearer Strom von 0,00002 Amp. Stärke bei 1 cm Abstand ergab einen kommutierten Ausschlag von 8,5 Skt. (1 Skt. = 2 mm). Da diese Empfindlichkeit nicht ausreicht, kompensierte ich die Horizontalintensität durch zwei im Meridian symmetrisch angelegte Magnete. Die Empfindlichkeit hängt natürlich vom Grad der Kompensierung ab; bei vollständiger Kompensierung würde ein Strom von 10^{-7} Amp. bei 1 cm Abstand und 8 Min. Schwingungsdauer 1 Skt. Ausschlag ergeben. Dieser Zustand kann natürlich nicht erreicht werden, schon aus dem Grunde nicht, weil kleine Erschütterungen, Temperaturänderungen der Magnete und hauptsächlich die Variationen des Erdmagnetismus die fortwährende Wanderung der Nadel bewirken.

Indes ließ sich die Schwingungsdauer durch Kompensation auf 7 Min. bringen, wobei die Empfindlichkeit eine solche war, daß 2.10^{-5} Amp. 140 Skt. bei 190 cm Skalenabstand ergab. Diese Empfindlichkeit nähert sich also der Maximale und ist ungefähr 1000mal größer als bei der Hertzschen Anordnung. Der Übelstand ist hierbei nur, daß störende

Änderungen bei der langen Schwingungsdauer stark zur Wirkung kommen können, daher diese Elongationen nicht immer mit der gehörigen Sicherheit festzustellen waren. Die starke Dämpfung hatte den Zweck, wenigstens die Wirkung schnell verlaufender, durch die Nähe der elektrischen Straßenbahn und die im Versuchsraum befindlichen großen Eisenmassen verursachten Störungen auszugleichen. Trotzdem ließ es sich selbst bei nächtlichen Beobachtungen selten erreichen, daß die Nadel in Ruhe verharre, obwohl Magnetometer, die in der Nähe aufgestellt waren, z. B. das Kohlrauschsche Variometer, zur selben Zeit vollständig stillstanden.

Das Instrument war als Leiter ganz geschlossen und geerdet, so daß in seinem Innern elektrostatische Wirkungen nicht zur Geltung kommen konnten. Die Füße des Kohlschen Gravitationsinstrumentes mußten wegen Eisengehalt kassiert und durch ein mit Holzschrauben verstellbares Holzgestell ersetzt werden, wodurch jede von der Anordnung selbst ausgehende magnetische Wirkung ausgeschlossen war.

Die Kathodenröhren bestanden aus einer 50 cm langen, 14 mm im Durchmesser betragenden geraden Röhre, an deren Enden zwei erweiterte Elektrodengefäße angeschmolzen waren, in welchen die Achsen der Kathoden mit der Röhrenachse zusammenfielen und senkrecht zu diesen im Abstand von 4 cm die Anoden angebracht waren. Ich umging die Hertzsche Anordnung der Anode, weil dieser Teil der Röhre eine verschwindend kleine magnetische Wirkung besitzt, wenn er genügend weit von der Nadel absteht. Die Kathode stand bei den Versuchen im allgemeinen 20—30 cm von der Nadel entfernt, außerdem war die Röhre so gestellt, daß die Ebene der Elektrodenachsen und der Zuführungsdrähte horizontal war, wobei die in die Drehrichtung fallende Komponente der elektromagnetischen Wirkung des ganzen Systems fast verschwindet, wovon ich mich durch Beobachtungen überzeugt habe.

Das Mittelstück der Röhre wurde verjüngt, um es näher an die Nadel bringen zu können, hierbei wurde aber das Kathodenbündel schwächer und brachte an der Verengung starke Erwärmung hervor. Des weiteren versuchte ich mit gleichmäßig dicken Röhren zu arbeiten, wobei der größere Querschnitt des Kathodenbündels für den größeren Abstand genug-

sam entschädigen, ja die Wirkung der dünneren Röhre übertreffen kann.

Zur Kontrolle dessen, ob infolge der symmetrisch angebrachten Kathoden etwa Stromverzweigung zur untätigen Kathode stattfindet, wandte ich auch eine Röhre an, deren eines Ende elektrodenlos war. In die Verengung dieser Röhre stellte ich auch ein Glimmerfenster in den Weg der Strahlen, um sie durch Öffnen und Schließen desselben in das Rohrmittelstück eintreten lassen bzw. von dort ausschließen zu können (Fig. 1).

Um den Einfluß der Erwärmung an der Rohrverengung auszuschließen, setzte ich außen an die Röhre bei der Verengung einen senkrecht zur Röhrenachse stehenden, mit Stanniol bezogenen Schirm von 20 cm Durchmesser.

Besondere Aufmerksamkeit widmete ich der Vermeidung der Wärmewirkungen, besonders da ihr schädlicher Einfluß bei den ersten Beobachtungen sehr auffallend hervortritt. Die hier beschriebene Anordnung erwies sich aber gegen thermische Einflüsse als so unempfindlich, daß die Strahlung einer Kerzenflamme im Abstand von 10 cm kaum zur Geltung kam und nur dann einen starken Ausschlag ergab, wenn man die Flamme ganz nahe unter das Zylindergefäß hielt.

Ich traf dabei die Einrichtung so, daß dieser Ausschlag entgegengesetzten Sinnes mit dem von den Kathodenstrahlen zu erwartenden sei. Die Kathodenstrahlen mußten bei der getroffenen Anordnung einen Ausschlag im Sinn der zunehmenden Zahlen auf der Skala ergeben, während die Erwärmung die Nadel nach den abnehmenden Zahlen hin trieb. Man konnte dies durch entsprechende Lage der Polvorzeichen erreichen, bei meiner Anordnung durch Verlegung des Nordpols nach unten.

Die ganze Kathodenröhre war mit ihrer Achse unter der Nadel ins magnetische Meridian gerichtet, damit das erwartete Drehmoment das größte sei.

Die Röhre wurde durch eine 20-Scheiben-Influenzmaschine betrieben, ohne Kondensatoren und vermied auch in den Zuleitungen sorgsam Funkenstrecken, um keine Oszillationen zu bekommen. Den in der Röhre auftretenden Potentialunter-

schied maß ich einigemal mit einer parallel geschalteten Funkenstrecke.

Versuchsresultate.

Das Instrument wurde anfänglich für die Beobachtung konstanter Ausschläge hergestellt, hierzu dienten die symmetrischen Röhren wegen Kommutation eventuell Multiplikation; da es sich nun herausstellte, daß bei den gegebenen Ortsverhältnissen konstante Ausschläge zu beobachten kaum möglich war, mußte ich mich auch mit der Beobachtung der während der Schwingung der Nadel wahrnehmbaren Wirkungen zufrieden geben, so daß ich das Instrument bis zu einem gewissen Grade ballistisch benutzt habe.

Der Vorgang war folgender: Nachdem die Wirkung gegen die zunehmenden Zahlen zu erwarten stand, gab ich der Nadel eine Elongation nach den abnehmenden Zahlen, und war die Bewegungsgeschwindigkeit nicht zu groß, setzte ich das Magnetometer dem Einfluß der Kathodenstrahlen aus, indem die Influenzmaschine in 1—2 minutlichen Zeitabständen in Gang gesetzt wurde. War die Geschwindigkeit der Nadel hierbei entsprechend klein, so wechselte sie ihre Richtung bei Einwirkung der Strahlen, war sie größer, so verminderte sie sich dabei; bei Aufhebung der Wirkung kehrte die Nadel zurück, bzw. nahm sie an Geschwindigkeit wieder zu.

Natürlich war dies nicht immer zu beobachten, da es vorkam, daß die Nadel inzwischen durch äußere Störungen in gleichem Sinne Impulse bekam, welche dann den Effekt der Strahlen ganz verdeckte. Jedoch kam die Wirkung der Strahlen in der Überzahl der Beobachtungen regelmäßig zur Geltung.

Diesbezüglich möchte ich nur einige Zahlenangaben mitteilen, während die meisten übrigen Beobachtungen in Fig. 2 graphisch dargestellt sind; diese zeigen die Wirkung am deutlichsten.

Schön zeigt sich die Wirkung der Strahlen bei der nachstehenden nächtlichen Beobachtungsreihe (15. Dezember 1906), wo die symmetrische Röhre zur Anwendung kam und die Wirkung der Kommutation auffallend hervortritt. Die Röhre war sehr hart, so daß das Kathodenbündel flimmerte. Die Pfeile bezeichnen den Zeitpunkt des Ingangsetzens der Kathoden-

röhre und den Sinn, nach welchem die Strahlen, vom Fernrohr aus gesehen, gingen. Dem von links nach rechts weisenden

Mit Kathodenstrahlen.

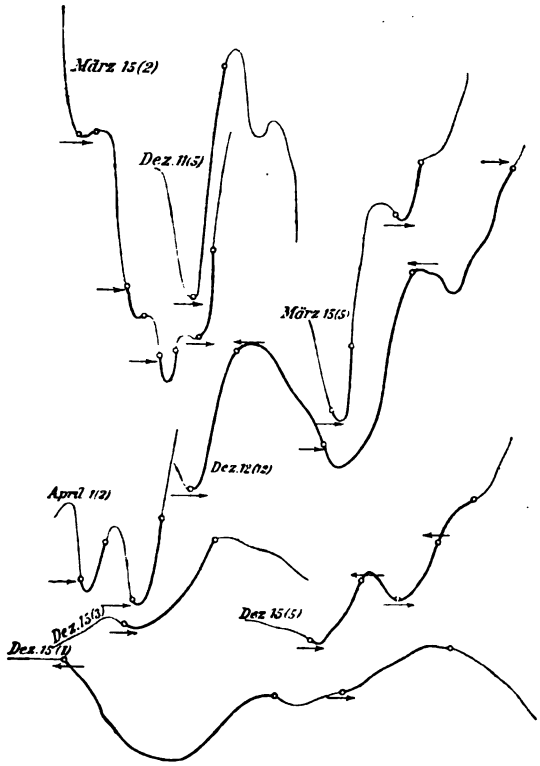


Fig. 2. Die fetter gezeichneten Teile der Kurven beziehen sich auf die Wirkung der Kathodenstrahlen, und zwar so, daß der Einschaltung in der Richtung ⟶ ein Ausschlag in der Zeichnung nach oben entspricht und umgekehrt.

Pfeil entspricht ein Ausschlag nach den zunehmenden Zahlen. Die Kathode war geerdet, bei anderen Beobachtungen die Anode, aber das beeinflußte das Resultat nicht.

0°	219,6	2,5°	219,1	
0,5	219,6	3	219,0	
1	219,5	3,5	218,7	
1,5	219,3	4	218,3	⟶ Röhre eingeschaltet
2	219,2	4,5	218,2	

5'	218,8		11'	222,0	
5,5	219,4		11,5	223,1	
6	220,0		12	224,5	←
6,5	221,0		12,5	225,7	
7	222,0	← kommutiert	13	226,3	
7,5	222,7		13,5	226,7	
8	222,4		14	226,9	
8,5	222,0		14,5	227,1	unterbrochen
9	221,4		15	227,7	
9,5	221,0		15,5	228,8	
10	221,0	→	16	229,7	
10,5	221,1				

Die nächste Reihe stammt auch von derselben Nachtbeobachtung mit derselben sehr harten Röhre, ohne Kommutierung, Kathode geerdet.

0'	220,0		7'	221,1	
0,5	220,1		7,5	222,5	
1	220,4		8	223,0	
1,5	220,6		8,5	223,9	
2	221,0		9	224,8	
2,5	221,5		9,5	225,6	
3	221,7		10	226,5	unterbrochen
3,5	221,5		10,5	226,8	
4	221,3	→	11	226,7	
4,5	221,0		11,5	226,4	
5	221,0		12	226,2	
5,5	221,2		12,5	226,0	
6	221,5		13	225,8	usw.
6,5	221,7				

Aus der Beobachtungsreihe mit der unsymmetrischen, mit Glimmerfenster versehenen Röhre, bei welcher die Kathode geerdet war, sei folgende Reihe mitgeteilt.

0'	317,4		4,5'	315,9	
0,5	318,0		5	312,7	→
1	318,2		5,5	312,5	
1,5	318,2		6	314,1	
2	315,2	→	6,5	317,7	unterbrochen
2,5	313,0		7	320,0	
3	314,5		7,5	323,2	
3,5	316,3	unterbrochen	8	326,0	
4	317,4		8,5	329,1	

Zur Kontrolle dessen, ob das magnetische Feld der Stromzuleitungen nicht störend wirkt, diente bei der symmetrischen Röhre die Vertauschung der Kathode mit der Anode, bei der neueren Röhre das Schließen des Glimmerfensters. Aus diesen Beobachtungen teile ich auch Angaben

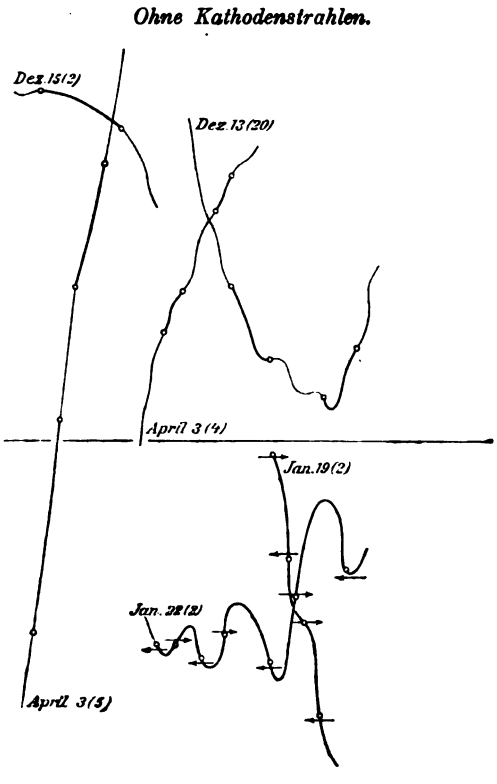


Fig. 8. Die Pfeile bedeuten die Richtung des eingeschalteten Stromes, und zwar so, daß ⟶ einem Ausschlage in der Zeichnung nach unten entspricht.

zweier mit, zur Verifizierung dessen, daß die Zuleitungen keine beobachtbare Wirkung auf die Nadel hatten (Fig. 3). Die erste Reihe stammt aus der nächtlichen Beobachtung vom 15. Dezember.

0'	232,4		4,5'	231,4	
0,5	232,3		5	231,0	
1	232,4		5,5	230,5	
1,5	232,5	eingeschaltet	6	230,0	unterbrochen
2	232,5		6,5	229,4	
2,5	232,4		7	—	
3	232,3		7,5	228,0	
3,5	231,9		8	226,6	
4	231,6		8,5	225,7	

Die zweite mit dem verschließbaren Glimmerfenster (3. April).

0'	202,5		4,5'	227,5	
0,5	209,8		5	229,7	
1	215,0		5,5	230,2 →	eingeschaltet
1,5	279,6		6	—	
2	221,8		6,5	232,2	unterbrochen
2,5	222,4 →	eingeschaltet	7	232,6	
3	—		7,5	232,6	
3,5	225,2	unterbrochen	8	232,7	
4	225,6				

Nun kann gefragt werden, ob doch die Wirkung nicht dem thermischen Effekt der Kathodenstrahlen zuzuschreiben ist, oder ob die Strahlen etwa longitudinale Wirkung geäußert hätten. Zur Kontrolle stellte ich die Röhre auch senkrecht zum Meridian unter die Nadel; da blieb aber der Einfluß der Strahlen auf den Gang der Nadel aus.

Diese Zahlenreihen, aber besonders die Kurven der Beobachtungen, meine ich, weisen trotz störender Einflüsse die Wirkung der Kathodenstrahlen überzeugend nach.

Bei den langwierigen und ermüdenden Beobachtungen und deren Aufarbeitung, so auch bei der Ausfertigung beigefügter Zeichnungen stand mir Hr. Paul Selényi tätig zur Seite, wofür ich ihm aufrichtigen Dank schulde.

Die Beobachtungen lassen es also klar ersehen, daß das Kathodenstrahlenbündel ein magnetisches Feld erzeugt, welches einem von der Kathode ausgehenden negativen Strom entspricht.

Was die Größe der Wirkung anbelangt, so ließ sie sich bei den obwaltenden Ortsverhältnissen vorderhand nicht messen. Zu diesem Zwecke müßten die Messungen an einem Ort ge-

schehen, der frei von der Einwirkung diverser Stromleitungen ist. Da hierzu hier in Budapest wenig Aussicht vorhanden ist, befasse ich mich mit der Schaffung einer Methode, die eine bedeutende Herabminderung dieser Einflüsse ermöglichen soll.

Nun läßt sich aber aus den angestellten Beobachtungen die Größenordnung der untersuchten Wirkung ableiten und somit feststellen, ob sie unseren bisherigen Kenntnissen entsprechenden Schätzungen entspricht.

Hierzu bieten sich zwei Wege. Der eine ist, daß man die Röhre unter der Nadel durch einen geraden Stromleiter ersetzt, und bestimmt, welche Stromstärke der Wirkung der Kathodenstrahlen entspricht. Als Resultat erhielt ich 4.10^{-6} Amp. Folgende Beobachtungsdaten und die entsprechenden Kurven zeigen auch dies (Fig. 3).

4.10^{-6} Amp. kommutiert, ergab folgende Reihe:

0°	222,2		4,5°	224,6	kommutiert
0,5	222,8		5	225,2	
1	222,7	eingeschaltet nach abnehmenden Zahlen	5,5	223,0	
			6	220,0	
1,5	221,6		6,5	219,8	
2	221,2	kommutiert	7	220,9	
2,5	220,6		7,5	220,8	
3	221,0		8	221,3	
3,5	221,7		8,5	221,2	unterbrochen
4	223,0		9	221,6	

Der zweite Weg ist der, daß man die Winkelbeschleunigung schätzt, die das Kathodenbündel der Nadel während der Schwingung mitteilte. Hieraus und dem bekannten Trägheitsmoment des Systems läßt sich das Drehmoment, aus diesem schließlich die äquivalente Stromstärke berechnen.

Aus den Beobachtungsdaten und Kurven ergibt sich, daß die Geschwindigkeitsänderung pro Minute 3,6 Skt. entsprach; bei 1900 mm Skalendistanz ist die entsprechende Winkeländerung 3,6/1900 (1 Skt. = 2 mm). Konstante Kraft vorausgesetzt, ist die Winkelbeschleunigung

$$\gamma = \frac{2\beta}{t^2} = \frac{2 \cdot 3{,}6}{3600 \cdot 1900} = 105 \cdot 10^{-8} \text{ C.G.S.}$$

Nun ist $\gamma = F/K$, wo $F = Pd$, $K = 2m \cdot d^2$, wenn m die Masse des Magnetes, d die Länge des Armes, P die Differenz der an den Polen angreifenden Kraft ist. Sonach

$$\gamma = \frac{P}{2md} \quad \text{und} \quad P = 2md \cdot \gamma = 2 \cdot 0{,}65 \cdot 3{,}25 \cdot 105 \cdot 10^{-8},$$

also

$$P = 4{,}3 \cdot 10^{-6} \text{ C.G.S.}$$

Annähernd aber ist auch:

$$P = \frac{\frac{5}{4} \cdot i\mu l}{\left(r + \frac{l}{12}\right)\left(r + \frac{11}{12} l\right)},$$

woraus

$$i = \frac{8P\left(r + \frac{l}{12}\right)\left(r + \frac{11}{12} l\right)}{5 \cdot \mu l}.$$

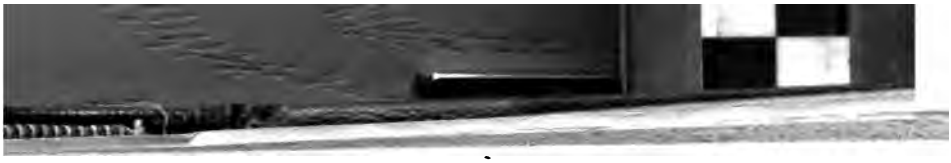
Da $\mu = 6{,}6$, $r = 1$ cm, $l = 7$ cm, so ist

$$i = 6 \cdot 10^{-7} \text{ C.G.S.} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Amp.}$$

Dieser Wert stimmt nach Möglichkeit mit jenem durch die Kalibrierung gewonnenen, $4 \cdot 10^{-6}$ Amp., überein.

Beide Wege führen also zur selben Größenordnung und zwar zur selben, wie sie auf Grund anderweitiger Versuche zu berechnen war, *und so kann ausgesprochen werden, daß die Kathodenstrahlen ein magnetisches Feld erzeugen, deren Größenordnung — dem elektromagnetischen Grundgesetz entsprechend — einem längs des Kathodenbündels verlaufenden negativen Strom entspricht.*

Von der exakten Messung der magnetischen Wirkung kann ich vorderhand nicht berichten; zu diesem Behufe müßte einerseits das Magnetometer störungsfreier gemacht, anderseits die Stärke des Kathodenbündels vergrößert werden. Ich dachte auch daran, die an der Wehneltschen Oxykathode entstehenden Kathodenstrahlen von geringer Geschwindigkeit zu Hilfe zu ziehen. Dieselben führen nach den vorläufigen Messungen von Wehnelt 10^{-3} bis 10^{-4} Coul./sec Ladung mit sich, also fast die gesamte Strommenge, während die gewöhnlichen Kathodenstrahlen nach Ewers etwa 16 Proz. des Gesamtstromes übertragen. Ich verfertigte eine solche Kathodenröhre nach Wehnelt und erhielt ein schönes Kathodenbündel bei 700



bis 900 Volt, wobei die Kathode zur Vermeidung der magnetischen Beeinflussung mit Wechselstrom erhitzt wurde.

Zu meiner Überraschung aber zeigten diese Röhren gar keine magnetische Wirkung, was vielleicht mit der geringen Geschwindigkeit dieser Strahlen im Zusammenhang steht. Dies scheint um so wahrscheinlicher, da ich bei Durchsicht der Beobachtungsdaten zur Wahrnehmung kam, daß in jenen Fällen, wo das Kathodenbündel eine sichere und starke Wirkung ergab, die Röhren hart waren, die Strahlen von etwa 20000 Volt herrührend; waren die Beobachtungen zweifelhaft, so waren die Röhren weich.

Dieser Zusammenhang könnte auch durch die v. Geitlersche Bemerkung erklärt werden; es ist nämlich möglich, daß das Medium in der Wehneltröhre besser leitet, mehr Ionen besitzt, wo es dann tatsächlich möglich wird, daß die negativen Ladungen der Röhrenwände sich nach der Anode und nach allen Richtungen ausgleichend die Wirkung der Kathodenstrahlen aufheben würden. Dies kann um so eher der Fall sein, weil diese Strahlen von geringerer Geschwindigkeit vermöge ihrer stärkeren Absorption das Medium besser leitend machen und so stärkere Ionisatoren sind.

Wie weit diese Erklärung den Tatsachen entspricht, werden fernere Untersuchungen zeigen, so auch im Zusammenhang mit diesen die Erforschung dessen, wohin eigentlich die durch die Kathodenstrahlen mitgeführten elektrischen Ladungen gelangen und welche Effekte sie hervorbringen.

Vorderhand muß ich mich auf die Feststellung beschränken, *daß die Kathodenstrahlen magnetische Wirkung äußern, welche jener des geraden negativen Stromleiters entspricht.*

Budapest, Physik. Inst. d. k. ung. Univ., September 1907.

(Eingegangen 25. November 1907.)

3. *Über Dämpfung und Widerstand in Kondensatorfunken;* *von Adolf Heydweiller.*

Zweite Mitteilung.

1. Die Funkenkonstanten.

In einer ersten Mitteilung über diesen Gegenstand[1]) zeigte ich, wie man auf Grund der Feststellung, daß die Charakteristik der Funkenentladung übereinstimmt mit der der Glimmentladung, zu einer rechnerischen Durchführung des Einflusses der Funkenstrecken in Kondensatorkreisen gelangen kann, und daß die Ergebnisse dieser Berechnungen mit den Tatsachen befriedigend übereinstimmen.

Energie und Dämpfung im Funken sind bestimmt durch die Konstanten a und b der Funkencharakteristik, der Beziehung

$$v = a + \frac{b}{i} \tag{1}$$

zwischen der Elektrodenspannung v und der Stromstärke i. Die experimentellen Bestimmungen derselben ergaben sie als lineare Funktionen der Funkenlänge, die *bei nicht zu großen Stromstärken* unabhängig sind von dieser und übereinstimmen mit den entsprechenden Konstanten der Glimmentladung. Indessen erstreckten sich die früheren Messungen nur auf kleine Funkenlängen bis zu 3 mm Länge. Auf meine Veranlassung hat daher Hr. Stuff solche Messungen für größere Funkenlängen bis zu 7 mm ausgeführt[2]); darüber hinaus gelang es ihm, wegen eigentümlicher noch zu besprechender Schwierigkeiten, auch nicht, die Messungen fortzuführen. Die Ergebnisse seiner in der Dissertation ausführlicher beschriebenen Messungen will ich hier kurz zusammenfassen.

Die benutzte Meßmethode ist die erste der in meiner früheren Mitteilung angeführten und beruht auf der Bestimmung

1) A. Heydweiller, Ann. d. Phys. **19**. p. 649. 1906.

2) W. Stuff, Wärme und Energie von Kondensatorfunken; Inaug.-Diss., Münster 1907.

der Restpotentiale v_r bei der Funkenentladung von Leidener Flaschen durch verschieden große Leitungswiderstände r und auf der John Kochschen Beziehung

$$v_r = a + 2\sqrt{b\,r}. \tag{2}$$

Die Restpotentiale wurden galvanometrisch durch die Restladungen bestimmt. Aus einer größeren Anzahl zusammengehöriger Wertepaare von v_r und r wurden a und b nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet.

Bei einer Variation der Widerstände zwischen 400 und $4 \cdot 10^6$ Ohm etwa erwies sich die lineare Beziehung zwischen v_r und $\sqrt{r}$ innerhalb der Grenzen der Versuchsfehler sehr befriedigend erfüllt.

Bei 7 mm Funken wurden die Versuchsergebnisse allerdings unsicher und lieferten darüber hinaus keine brauchbaren Ergebnisse mehr und zwar, wie sich später herausstellte, weil bei den erforderlichen hohen Entladungsspannungen das Sprühen der Leidener Flaschen einsetzt und hierdurch ihre Kapazität veränderlich wird.

Die folgenden Tabb. 1—4 enthalten eine Zusammenstellung von Hrn. Stuffs Meßergebnissen. Neben die beobachteten Werte von v_r sind die nach Gleichung (2) mit den am Kopf der Tabellen angegebenen Werten von a und b berechneten gestellt, sowie die Differenzen zwischen beiden, die durch Beobachtungsfehler erklärt sind.

Tabelle 1.

4 mm Funkenstrecke. $a = 675$ Volt. $b = 2{,}36$ Watt.

r Ohm	v_r Volt		Δ
	beobachtet	berechnet	v_r beob. $- v_r$ ber.
435	744	739	+ 5
1810	806	805	+ 1
47 600	1335	1344	− 9
73 700	1510	1508	+ 2
146 200	1875	1848	+27
262 300	2240	2247	− 7
526 700	2910	2902	+ 8
916 900	3641	3614	+27
1 569 000	4441	4519	−78
2 125 000	5120	5152	−32
3 161 000	6129	6132	− 3
3 869 000	6769	6712	+57

Tabelle 2.

5 mm Funkenstrecke. $a = 721$ Volt. $b = 3{,}22$ Watt.

r Ohm	v_r Volt		Δ
	beobachtet	berechnet	v_r beob. $- v_r$ ber.
435	839	796	+ 43
1810	995	874	+121
47 600	1589	1504	+ 85
73 700	1730	1695	+ 35
146 200	2010	2093	− 83
262 300	2435	2558	−123
526 700	3219	3324	−105
916 900	4177	4156	+ 21
1 569 000	5001	5215	−214
2 125 000	5976	5950	+ 26
3 161 000	7258	7099	+159
3 869 000	7810	7777	+ 53

Tabelle 3.

6 mm Funkenstrecke. $a = 855$ Volt. $b = 3{,}55$ Watt.

r Ohm	v_r Volt		Δ
	beobachtet	berechnet	v_r beob. $- v_r$ ber.
435	929	934	− 5
1810	1094	1016	+ 78
47 600	1714	1678	+ 36
73 700	1852	1879	− 27
146 200	2216	2296	− 80
262 300	2714	2785	− 71
526 700	3559	3590	− 31
916 900	4595	4464	+131
1 569 000	5582	5576	+ 6
2 125 000	6310	6348	− 38

Tabelle 4.

7 mm Funkenstrecke. $a = 1114$ Volt. $b = 3{,}53$ Watt.

r Ohm	v_r Volt		Δ
	beobachtet	berechnet	v_r beob. $- v_r$ ber.
435	1213	1192	+ 21
1810	1390	1274	+116
47 600	1993	1933	+ 60
73 700	2157	2133	+ 24
146 200	2445	2550	−105
262 300	2774	3037	−263
526 700	3804	3839	− 35
916 900	4894	4710	+184

Tabelle 5.

Die Funkenkonstanten a und b.

	$\delta = 4$ mm	$\delta = 5$ mm	$\delta = 6$ mm	$\delta = 7$ mm	
a	621 Volt	691 Volt	761 Volt	831 Volt	ber. nach Stuchtey
	634 „	703 „	740 „		beob. nach Stuchtey
	646 „	732 „	818 „	904 „	ber. nach Koch
	675 „	721 „	855 „	1114 „	beob. nach Stuff
b	2,25 Watt	2,82 Watt	3,38 Watt	3,95 Watt	ber. nach Stuchtey
	2,15 „	2,72 „	3,54 „		beob. nach Stuchtey
	2,40 „	3,00 „	3,60 „	4,20 „	ber. nach Koch
	2,36 „	3,22 „	3,55 „	3,53 „	beob. nach Stuff

Tab. 5 gibt noch eine Zusammenstellung der so bestimmten Funkenkonstanten mit denen der Glimmentladung nach Stuchtey[1]) und den aus den linearen Beziehungen zwischen a, b und der Funkenlänge δ

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a = 300 + 86{,}4 \,.\, \delta \text{ Volt} \\ b = 0{,}600 \,.\, \delta \text{ Watt} \end{array} \right\} \text{ nach J. Koch}^2)$$

und

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a = 340 + 70 \,.\, \delta \text{ Volt} \\ b = 0{,}568 \,.\, \delta - 0{,}025 \text{ Watt} \end{array} \right\} \text{ nach Stuchtey}^2)$$

folgenden Werten. Wie man sieht, schließen sich die Stuffschen Werte den John Kochschen besser an, als den Stuchteyschen. Die Werte für 7 mm Funken sind schon recht unsicher, und es ist daher auf deren größere Abweichung kein Gewicht zu legen.

Jedenfalls hat durch diese Versuche die Annahme eine weitere Stütze erhalten, daß die Konstanten der Funkencharakteristik lineare Funktionen der Funkenlänge sind, ebenso wie dies für die Glimm- und die Bogenentladung nachgewiesen ist, und es scheint mithin nicht allzu gewagt, die Werte der Konstanten für größere Funkenstrecken aus jenen linearen Beziehungen durch Extrapolation abzuleiten, wie es im folgen-

1) C. Stuchtey, Inaug.-Diss. Bonn 1904.
2) Vgl. A. Heydweiller, l. c. p. 671 f.

den geschehen soll, und zwar auf Grund der John Kochschen numerischen Werte (3).

2. Die Funkendämpfung.

Wir sind hierdurch nach den von mir früher gegebenen Entwickelungen imstande, die Dämpfung bei oszillierender Kondensatorentladung durch Funkenstrecken, wenigstens für den Fall langsamer Aufladung, d. h. wenn die Entladungspotentiale bekannt sind, zu berechnen; allerdings mit einer Einschränkung.

Die Werte der Funkenkonstanten sind bisher nur abgeleitet aus Beobachtungen mit verhältnismäßig geringen Stromstärken und haben sich hier innerhalb weiter Grenzen als unabhängig von letzterer erwiesen. Aber es ist, wie ich schon einmal betonte, sehr wahrscheinlich, daß bei den ungleich viel größeren Stromstärken, wie sie in kurzen und dicken Schließungsbogen auftreten können, das Dielektrikum in der Funkenstrecke so stark verändert wird, daß sich daraus auch beträchtliche Änderungen in den Werten der Funkenkonstanten, die natürlich von der Natur des Dielektrikums abhängig sind, ergeben müssen. Dafür spricht der Umstand, daß vielfach die beobachtete Zahl von auftretenden Schwingungen viel größer ist, als die mit den obigen Annahmen über die Funkenkonstanten berechnete.

Dazu kommt noch, daß bei Aufladung der Kondensatoren mit dem Induktorium, wie sie meist bei den Versuchen über die Dämpfung angewandt wurde, infolge der bekannten Verzögerungserscheinungen die Werte der Entladungspotentiale eine bedeutende Steigerung erfahren können. Wir müssen von der Berücksichtigung dieser Umstände vorläufig Abstand nehmen, da sich ihr Einfluß zahlenmäßig noch nicht angeben läßt.

Daß sie aber von Einfluß sein müssen, folgt aus meiner l. c. gegebenen Theorie der Dämpfung im Funken, wonach diese nicht, wie die Widerstandsdämpfung, ein konstantes Verhältnis, sondern eine konstante Differenz der aufeinander folgenden Amplituden ergibt. Es ist also das in gewöhnlicher Weise definierte Dämpfungsverhältnis, oder das logarithmische Dekrement nicht konstant, sondern nimmt mit abnehmender

Amplitude beträchtlich zu. Diese Aussage der Theorie ist wie ich gezeigt habe, in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Befunden (l. c. p. 656 ff.).

Vernachlässigt man die Widerstandsdämpfung, so sind die aufeinander folgenden Stromamplituden

$$(5)\qquad \begin{cases} i_1 = (v_0 - a)\sqrt{\dfrac{c}{p}}, \\ i_2 = (v_0 - 3\,a)\sqrt{\dfrac{c}{p}}, \\ i_3 = (v_0 - 5\,a)\sqrt{\dfrac{c}{p}} \end{cases}$$

(c die Kapazität, p die Selbstinduktion) und die Dämpfungsverhältnisse sind also

$$(6)\qquad \frac{v_0 - a}{v_0 - 3\,a}, \quad \frac{v_0 - 3\,a}{v_0 - 5\,a}, \quad \ldots \quad \frac{v_0 - (2n-3)\,a}{v_0 - (2n-1)\,a},$$

wobei n diejenige ganze Zahl ist, die zwischen $v_0 - a/2\,a$ und $v_0 - 3\,a/2\,a$ liegt[1]), sie sind also wesentlich bedingt durch das Verhältnis der Funkenkonstanten a zum Entladungspotential v_0.

Nun ist aber nach dem Vorhergehenden a eine lineare, v_0 dagegen bekanntlich eine verzögert ansteigende Funktion der Funkenlänge, und zwar um so stärker verzögert, je kleiner der Krümmungsradius der Elektroden an den Entladungsstellen ist.[2]) Daraus folgt, daß die Dämpfung mit wachsender Funkenlänge abnehmen muß bis zu einem Minimum, das um so früher erreicht wird, je größer die Krümmung an den Entladungsstellen ist.

Diese Folgerung der Theorie wird bekanntlich wiederum auf das beste bestätigt durch die Versuche von P. Drude[3]), G. Rempp[4]) und T. Noda.[5])

---

1) Auf 660 meiner früheren Mitteilung sind die Ungleichheitszeichen in die entgegengesetzten zu verwandeln.

2) Vgl. z. B. F. Paschen, Wied. Ann. 37. p. 69. 1889; J. Freyberg, Wied. Ann. 38. p. 250. 1889; A. Heydweiller, Wied. Ann. 48. p. 235. 1893.

3) P. Drude, Ann. d. Phys. 15. p. 709. 1904.

4) G. Rempp, Ann. d. Phys. 17. p. 627. 1905.

5) T. Noda, Ann. d. Phys. 19. p. 715. 1906.

Will man aber diese Versuche mit der Theorie vergleichen, so ist vor allem zu beachten, daß es sich bei der Funkendämpfung nicht um ein konstantes Dämpfungsverhältnis handelt, und daß jene Versuche nur Mittelwerte liefern.

Aus den unter (6) angeführten Dämpfungsverhältnissen würde als Mittelwert des logarithmischen Dekrementes folgen

$$\Omega = \frac{1}{n-1} \log n \cdot \frac{v_0 - a}{v_0 - (2n-1)a}. \tag{7}$$

Aber das ist nicht der Wert, der durch die meist nach Bjerknes' Resonanzmethode angestellten Versuche ermittelt wird. Denn bei diesen wird eine den Quadraten der Stromamplitude proportionale Wirkung gemessen, und es kommen daher die ersten schwächer gedämpften Amplituden ungleich mehr zur Geltung als die späteren schwächeren von viel größerem Dekremente, so daß die so bestimmten Werte viel kleiner ausfallen müssen, als die nach (7) berechneten Mittelwerte. Will man vergleichbare Mittelwerte bilden, so muß man jedes Dekrement mit dem Quadrat der zugehörigen mittleren Amplitude multiplizieren und die Summe durch die Summe der mittleren Amplitudenquadrate dividieren. Diese etwas umständliche Rechnung kann man dadurch abkürzen, daß man das Anfangsdekrement, $\log n \,.\, (v_0 - a / v_0 - 3a)$, mit einem empirisch festgestellten Zahlenfaktor, 1,4 etwa, multipliziert.

In dieser Weise sind die Zahlen der folgenden Tab. 6 erhalten unter Benutzung der *statischen* Entladungspotentiale nach den Messungen von J. Freyberg für Spitzen und von mir für Kugeln von verschiedenem Radius ϱ als Elektroden, ergänzt durch einige Werte von J. Algermissen[1]) für größere Funkenstrecken δ.

Hinzugefügt sind in den letzten vier Spalten eine Anzahl der von G. Rempp beobachteten Werte des natürlichen logarithmischen Dekrementes für verschiedene Kugelradien. Die für $\varrho = 0{,}75$ sind mit der Influenzmaschine, die anderen mit dem Induktorium erhalten.

1) J. Algermissen, Ann. d. Phys. **19.** p. 1007. 1906.

Tabelle 6.

Mittleres natürliches logarithmisches Dekrement.

δ mm	Spitzen-elektroden	Berechnet				Beobachtet nach G. Rempp			
		Kugelelektroden, Radius in cm				Kugelelektroden			
		$\varrho = 0{,}25$	0,5	1,0	2,5	0,75	1,5	2	2,5
1	0,370	0,269	0,269	0,269	—	0,154			
1,5	**0,351**	—	—	—	—				
2	0,356	0,177	0,177	0,188	—	0,107	0,108	0,110	0,106
3	0,377	0,151	0,151	0,151	—	0,085			
4	0,387	0,149	0,137	0,137	—	0,077			
5	0,426	**0,143**	0,129	0,127	0,120	0,072	0,069	0,071	0,076
6	0,438	0,148	0,126	0,122	0,115	0,068			
7	0,448	0,152	**0,125**	0,118	0,111				
8	0,456	0,162	0,126	0,116	0,109	0,068			
9	0,489	0,176	0,129	0,113	0,108				
10	0,525	0,182	0,132	**0,112**	0,107	0,077	0,078	0,076	0,077
15	0,678	0,285	0,141	0,122	**0,104**				
20	0,977	0,298	0,177	0,130	0,105		0,115	0,112	0,115
30	1,355	0,440	0,230	0,156	0,107		0,133	0,149	0,160
40	—	—	0,293	0,221	0,116				

Man erkennt zunächst, daß die Berechnungen in mehrfacher Hinsicht durch die Erfahrung gut bestätigt werden. Man sieht, daß in allen Reihen mit wachsender Funkenlänge ein Minimum der Dämpfung auftritt, das bei Spitzenelektroden bei etwa 1,5 mm Funkenlänge eintritt, in Übereinstimmung mit Beobachtungen von Drude und von Noda, bei Kugelelektroden, wie es Rempp gefunden hat, zwischen 5 und 10 mm Funkenlänge, mit wachsendem Kugelradius etwas mehr zu größeren Funkenstrecken rückend und im übrigen namentlich bei größeren Elektroden ziemlich flach verlaufend. Für Elektroden verschiedener Größe wächst die Dämpfung im allgemeinen mit zunehmender Krümmung[1]); nur für größere Elektroden und kleinere Funkenstrecken ist die Dämpfung nahe unabhängig von der Elektrodengröße in Übereinstimmung mit Rempps Versuchen. Endlich ist auch das Verhältnis

1) Vgl. H. Rausch v. Traubenberg u. W. Hahnemann, Physik. Zeitschr. 8. p. 500. 1907.

der Minimumdämpfung zur Dämpfung in einer Funkenstrecke von 1 mm (nahezu 1 : 2) ebenso groß, wie Rempp es fand.

In anderer Hinsicht sind freilich beträchtliche Unterschiede zwischen Theorie und Beobachtung vorhanden. Zunächst fällt auf, daß die berechneten Dekremente durchweg bedeutend (fast um das Doppelte) größer sind, als die beobachteten. Das kann zum Teil in den auf p. 52 erwähnten Verhältnissen begründet sein, indem die Werte der Entladungspotentiale v_0 zu niedrig und die der Funkenkonstanten α zu hoch angenommen sein können.[1])

Bei den Versuchen von Rempp kommt aber noch hinzu, daß seine Anordnung keine reine Funkendämpfung ergibt; sie ist nämlich die sogenannte symmetrische, bei der zwei Leidener Flaschenbatterien verwendet wurden mit zwei Schließungsbogen für die inneren und für die äußeren Belegungen, von denen nur der erste eine Funkenstrecke enthielt; es waren also zwei stark gekoppelte Schwingungen vorhanden, von denen nur die eine stark durch den Funken, die andere aber verhältnismäßig schwach gedämpft war.

Andererseits haben bei größeren Funkenstrecken die Remppschen Versuche relativ zu große Werte der Dämpfung ergeben wegen des Sprühens der Leidener Flaschen, das bei etwa 6 mm Funkenlänge einsetzt. Aus diesem Umstande, auf den in letzter Zeit von mehreren Seiten aufmerksam gemacht worden[2]) ist, erklärt sich, daß das Minimum der Dämpfung nach Rempps Versuchen viel ausgeprägter, das Ansteigen bei größeren Funkenstrecken viel stärker erscheint, als es die Berechnungen ergeben, und zwar um so mehr, je größer die Elektroden und damit die Entladungspotentiale bei gleicher Funkenlänge sind.

Aus der Tab. 6 und ihrer Ableitung ergeben sich noch einige aus der Praxis schon bekannte Folgerungen:

1) Hr. K. C. F. Schmidt findet (Physik. Zeitschr. 8. p. 619. 1907) bedeutend größere Werte des Dekrementes (0,11 bis 0,5), allerdings mit zwei hintereinander geschalteten Funkenstrecken; über die Elektroden ist keine Angabe gemacht.

2) H. Rausch v. Traubenberg u. W. Hahnemann, Physik. Zeitschr. 8. p. 498. 1907; W. Eickhoff, Physik. Zeitschr. 8. p. 564. 1907; A. Jollos, Ann. d. Phys. 23. p. 719. 1907; Inaug.-Diss. Straßburg 1907.

1. Große und wenig gekrümmte Elektroden geben geringere Dämpfung als kleine;

2. bei großen Elektroden sind Funkenstrecken von 1 bis 2 cm Länge am vorteilhaftesten, wenn es gelingt, das Sprühen der Kondensatoren zu unterdrücken;

3. in diesen Grenzen ist die Länge der Funkenstrecke von geringem Einfluß auf die Dämpfung;

4. es ist vorteilhaft, bei unbelichteter Funkenstrecke eine schnelle Steigerung der angelegten Spannung zu erzeugen, weil dadurch — infolge der Verzögerung der Entladung — die Entladungsspannung gesteigert und die Dämpfung verkleinert werden kann;

5. eine Unterteilung der Funkenstrecke ist für die Verkleinerung der Dämpfung unvorteilhaft [1]); denn ersetzt man eine Funkenstrecke von der Länge δ durch n andere hintereinander geschaltete von der Gesamtlänge $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n = \delta$, so wird wahrscheinlich das Entladungspotential dadurch nicht sehr erheblich vergrößert; Messungen darüber sind mir allerdings nicht bekannt; dagegen wird, während für die eine Funkenstrecke

$$a = a' + a'' \delta$$

ist, für die n hintereinander liegenden Funkenstrecken

$$a_1 = n a' + a'' (\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n) = n a' + a'' \delta,$$

also um $(n-1) a'$, d. h. beträchtlich größer als a, da $a' = 300$ Volt ist, und ebenso wird die Dämpfung dadurch vergrößert.

Es wird sich lohnen, sowohl die Entladungspotentiale, wie die Funkenkonstante a für andere Gase als Luft zu bestimmen, um womöglich ein Gas zu finden, für das a/v_0 und damit die Dämpfung kleinere Werte hat als für Luft. Daß solche Versuche nicht aussichtslos sind, darauf deutet eine neuliche Mitteilung von Hrn. K. E. F. Schmidt [2]), aus der hervorzugehen scheint, daß der Wert von a/v_0 für Wasserstoff erheblich größer ist als für Luft.

---

1) Vgl. W. Eickhoff, Physik. Zeitschr. 8. p. 497. 1907.
2) K. E. F. Schmidt, Physik. Zeitschr. 8. p. 617. 1907.

3. Der sogenannte Funkenwiderstand.

Ich möchte diesen Gegenstand nicht verlassen, ohne noch einmal und nachdrücklich Einspruch zu erheben gegen den Gebrauch oder, wie ich meine, Mißbrauch des Wortes Widerstand bei Gasentladungen der Elektrizität.

Der Begriff Widerstand ist für die elektrischen Leitungsvorgänge in metallischen und elektrolytischen Leitern durch das Ohmsche und Joulesche Gesetz so scharf und eindeutig definiert, daß man die Bezeichnung auch hierfür reservieren sollte; sie auf die ganz andersartigen Verhältnisse bei den Gasentladungen zu übertragen, wie es leider sehr üblich geworden ist, kann nur zu Verwirrung und Mißverständnissen führen. Und auch durch die vielfach beliebte Hinzufügung des Beiwortes „scheinbar" wird meines Erachtens die Sache nicht verbessert, da die Bezeichnung „scheinbarer Widerstand" in der Wechselstromtechnik gleichfalls schon in ganz anderer und gut definierter Bedeutung gebraucht wird. Man definiert den Widerstand einer Funkenstrecke oder dergleichen jetzt zumeist so, daß er einen Leitungswiderstand bedeutet, der bei Substitution für die Funkenstrecke unter gegebenen Versuchsbedingungen die gleiche Dämpfung gibt, oder in dem die Entladung die gleiche Wärme wie im Funken entwickelt[1]), oder als das Verhältnis von Spannung zur Stromstärke.[2])

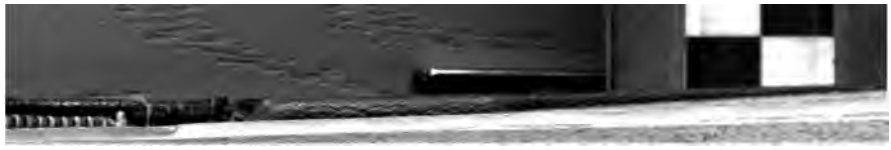
Das sind nun drei verschiedene Definitionen, die zu ganz verschiedenen Werten für dieselbe Funkenstrecke unter gleichen Bedingungen führen[3]) und führen müssen und nur das gemein haben, daß sie alle drei gleich schlecht und unbestimmt sind.

Denn nach meinen Entwickelungen ist das logarithmische Dekrement der Funkendämpfung bestimmt durch das Verhältnis a/v, ist also unabhängig von der Kapazität und der Selbstinduktion, dagegen abhängig von der Entladungsspannung, und wird, da es nicht konstant ist, mit verschiedenen Beobachtungsmethoden verschieden gefunden. Substituiert man für die Funkenstrecke einen Leitungswiderstand r, von der Selbst-

1) Vgl. z. B. J. Zenneck, Elektromagnetische Schwingungen, p. 375 ff. Braunschweig 1905.

2) Zum Beispiel J. Koch, Ann. d. Phys. 15. p. 903. 1904.

3) Vgl. W. Eickhoff, Physik. Zeitschr. 8. p. 494. 1907.



induktion p, so wird das nunmehr konstante Dekrement bekanntlich

$$\pi r \sqrt{\frac{c}{p}},$$

also abhängig von der Kapazität, der Selbstinduktion des Substitutionswiderstandes, dagegen unabhängig vom Entladungspotential.

Weiter ist die Funkenenergie in der Zeit dt nach Gleichung (1) gegeben durch

$$v\,i\,dt = a\,i\,dt + b\,dt, \tag{8}$$

und mithin in ganz anderer Weise von der Stromstärke und damit von den Versuchsbedingungen (Kapazität, Selbstinduktion etc.) abhängig als die Joulesche Widerstandsenergie

$$v\,i\,dt = i^2\,w\,dt.$$

Das Verhältnis zwischen beiden oder auch ihren Integralwerten ist daher unter verschiedenen Versuchsbedingungen ebenso wenig konstant, wie das Verhältnis zwischen Elektrodenspannung einer Funkenstrecke und Stromstärke, da ja nach (1)

$$\frac{v}{i} = \frac{a}{i} + \frac{b}{i^2}$$

ist. Bezüglich der Energie kommt dabei noch ein anderer Punkt in Betracht.

Hr. Stuff hat in seiner erwähnten Dissertation auch die Ergebnisse von Energie und Wärmemessungen an Funken mitgeteilt. Die Energie hat er aus den Funkenkonstanten und der entladenen Elektrizitätsmenge in der von mir in der ersten Mitteilung (l. c. p. 651 ff.) angegebenen Weise bestimmt, die Funkenwärme nach Hrn. W. Kaufmanns Methode[1]) gemessen.

Die Ergebnisse der Messungen, die ich hier noch mitteilen möchte, sind in folgender Tab. 7 zusammengestellt. Zur Berechnung von f sind die von Hrn. Stuff selbst bestimmten Werte von a und b (vgl. p. 51) benutzt worden (woraus sich die Abweichungen von den in meiner früheren Mitteilung Tab. 14 enthaltenen Werten von f ber. ergeben).

---

1) W. Kaufmann, Wied. Ann. **60**. p. 653. 1897.

Tabelle 7.

Wärme (w beob.) und Energie (f ber.) des Funkens in Joule. $\Delta = w$ beob. $- f$ ber. w/f = Verhältnis von Wärme und Energie des Funkens.

r Ohm	w beob.	f ber.	$\frac{w}{f}$	Δ	w beob.	f ber.	$\frac{w}{f}$	Δ
	$\delta = 4$ mm				$\delta = 5$ mm			
500	0,056	0,180	0,31	−0,124	0,086	0,233	0,37	−0,147
2000	0,072	0,179	0,40	−0,107	0,120	0,232	0,52	−0,112
8000	0,080	0,178	0,45	−0,098	0,118	0,232	0,51	−0,114
15000	0,094	0,178	0,53	−0,084	0,144	0,231	0,62	−0,087
70500	0,111	0,179	0,62	−0,068	0,196	0,234	0,84	−0,038
352500	0,153	0,192	0,80	−0,039	0,233	0,253	0,92	−0,020
705000	0,166	0,207	0,80	−0,041	0,224	0,275	0,80	−0,051
1410000	0,210	0,230	0,91	−0,020	0,254	0,311	0,82	−0,057
2820000	0,207	0,263	0,79	−0,056	0,315	0,361	0,87	−0,046
5640000	0,427*	0,292	1,46*	+0,135	0,362	0,411	0,88	−0,049
	$\delta = 6$ mm				$\delta = 7$ mm			
500	0,130	0,327	0,40	−0,197	0,133	0,484	0,27	−0,351
2000	0,135	0,326	0,41	−0,191	0,145	0,483	0,30	−0,338
8000	0,154	0,325	0,47	−0,171	0,179	0,481	0,37	−0,302
15000	0,187	0,325	0,58	−0,138	0,212	0,480	0,44	−0,268
70500	0,254	0,327	0,78	−0,073	0,287	0,480	0,60	−0,193
352500	0,285	0,349	0,82	−0,064	0,344	0,498	0,69	−0,154
705000	0,329	0,374	0,88	−0,045	0,421	0,522	0,81	−0,101
1410000	0,434	0,417	1,04	+0,017	0,512	0,564	0,91	−0,052
2820000	0,448	0,480	0,93	−0,032	0,544	0,631	0,86	−0,087
5640000	0,445	0,556	0,80	−0,111	0,623	0,716	0,87	−0,093

* Entladung intermittierend.

Daraus folgt, daß ein um so geringerer Bruchteil der gesamten Funkenenergie als Wärme auftritt, je kleiner der Widerstand im Schließungsbogen ist. Auch deswegen sind also Messungen der Funkenwärme durchaus ungeeignet zur Bestimmung des „Funkenwiderstandes."

Während also bei metallischen und elektrolytischen Widerständen das Ohmsche oder das Joulesche Gesetz zu einer eindeutigen Bestimmung des Widerstandes führt, der durch *einen* Versuch ein für allemal für alle anderen Bedingungen

gültig bestimmt werden kann, ist das bei Gasstrecken keineswegs der Fall, und der Begriff des Widerstandes verliert daher ganz seine eigentlich grundlegende Bedeutung. An seine Stelle treten hier *zwei* Konstanten, die beiden Konstanten der Charakteristik (1), die ja für alle Formen der Gasentladung gültig zu sein scheint, und man sollte daher auch lediglich auf diese zur Festlegung der Wirkung einer Gasstrecke zurückgehen und aufhören, inkommensurable Größen vergleichen zu wollen.

Zu welchen, eigentlich überflüssigen, Mißverständnissen das führt, dafür nur ein Beispiel für viele.

Ich hatte in einer Arbeit vom Jahre 1891 (Wied. Ann. 43. p. 340) den Schluß gezogen, daß der „eigentliche Leitungswiderstand" von Funkenstrecken verhältnismäßig geringfügig, von der Größenordnung $10—10^2$ Ohm sei. Der Zusammenhang ließ keinen Zweifel darüber bestehen, daß ich darunter einen Widerstand im Sinne des Ohmschen oder Jouleschen Gesetzes verstand.

Diese Schlußfolgerung wurde von Hrn. John Koch[1]) angefochten, und im Gegensatz dazu die Behauptung aufgestellt, daß der „Widerstand" von Funkenstrecken viele Millionen Ohm betragen könne. Auf meine Entgegnung erklärte Hr. J. Koch dann, daß *er* gar nicht den Ohmschen Widerstand gemeint habe.

Solche, die Sache nicht fördernden und daher überflüssigen Diskussionen würden vermieden, wenn über den Gebrauch der Bezeichnung Widerstand bei Gasentladungen eine ihrer sonstigen Verwendung entsprechende Übereinkunft erzielt würde.

Es ist ja möglich, daß in den Gasen *außer* der durch die Gleichung

$$v\,i\,dt = a\,i\,dt + b\,dt \tag{8}$$

dargestellten Energie *auch* noch Joulesche Wärme entwickelt wird. Wenn das der Fall ist, dann ist die Gleichung der Charakteristik in der Form

$$v = a + \frac{b}{i} \tag{1}$$

unvollständig und muß noch ein Zusatzglied Wi auf der rechten Seite erhalten. Aber nach allen bisher vorliegenden Messungen

1) J. Koch, Ann. d. Phys. 15. p. 903. 1904.

kann dieses Zusatzglied, wenn es existiert, nur eine untergeordnete Bedeutung gegenüber den beiden anderen haben, und kann unter gewöhnlichen Versuchsbedingungen vernachlässigt werden.

Von den beiden Funkenkonstanten kommt für die oszillierenden Entladungen durch kleine Widerstände fast nur die erste a, für einfache Entladung durch sehr große Widerstände hauptsächlich die zweite b in Betracht, und es ist für die Praxis von der größten Bedeutung, namentlich die erste Konstante unter möglichst mannigfaltigen Versuchsbedingungen zu messen; eine ganze Reihe von hierzu geeigneten Methoden habe ich in meiner ersten Mitteilung angegeben.

Münster i. W., November 1907.

(Eingegangen 5. Dezember 1907.)

4. *Über den Einfluß von Unstetigkeiten bei der Bewegung von Elektronen;* *von G. A. Schott.*

Einleitung. Damit das Experiment zwischen den vorgeschlagenen Elektronentheorien entscheiden kann, ist vor allem nötig, daß die aus diesen Theorien entwickelten Ausdrücke für die Masse der Elektronen ganz einwandfrei dastehen. Das kann man nun von den bekannten Abraham-Sommerfeldschen Ausdrücken nicht mehr behaupten, seitdem die grundlegenden Arbeiten von Sommerfeld[1]) der sehr scharfen Kritik von Lindemann[2]) unterzogen worden sind, mögen sonst auch über diese Kritik geteilte Ansichten bestehen; damit ist aber das ganze Fundament für die experimentelle Unterscheidung der obwaltenden Fragen erschüttert worden.

Nun hatte ich vor etwa vier Jahren zum Zwecke anderer Untersuchungen die Bewegungsgleichungen eines Elektrons abgeleitet, und zwar mittels einer völlig verschiedenen Methode; da einerseits die Resultate mit den Abraham-Sommerfeldschen für den Impuls und den Strahlungsdruck übereinstimmten, andererseits die Methode nicht die Eleganz und Allgemeinheit der Sommerfeldschen besaß, sah ich von einer einstweiligen Veröffentlichung ab. Diese Methode hat aber einige Vorteile, welche sie zur Prüfung der zwischen Sommerfeld und Lindemann schwebenden Fragen besonders geeignet machen: sie operiert mit Reihen, deren Konvergenz untersucht werden kann, benutzt also überhaupt keine von den verwickelten Integrationsverfahren, die den Methoden von Sommerfeld und Lindemann eigen sind; sie ist durchsichtiger, indem sie die physikalische Bedeutung eines jeden Schrittes leichter er-

1) A. Sommerfeld, Gött. Nachr. 1904. p. 99, 363; 1905. p. 201.

2) F. Lindemann, Abh. d. k. Bayer. Akad. d. Wissensch. II. Kl. 23. II. Abt. p. 235. 339.

kennen läßt; schließlich ist sie anschaulicher, indem sie uns gewisse konkrete Fälle, z. B. den der geradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegung, ohne Vernachlässigungen zu berechnen, oder wenigstens den Grad der Annäherung zu bestimmen erlaubt. Es soll also im folgenden mittels dieser Methode einer Klärung vornehmlich der prinzipiellen Schwierigkeiten angestrebt werden.

Da nun jede durch Einwirkung äußerer Kräfte hervorgerufene Änderung einer Bewegung eine Unstetigkeit zwar nicht der Geschwindigkeit, aber doch der Beschleunigung, Bahnkrümmung usw. bedeutet, so müssen wir unser Augenmerk besonders auf den Einfluß solcher Unstetigkeiten richten, was meines Wissens bisher nicht genügend beachtet worden ist.

§ 1. *Reihenentwickelungen für die Potentiale.* Für das Skalarpotential Φ und das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ eines Elektrons zur Zeit t im Aufpunkt (x, y, z) setzen wir

$$\Phi = \int \varphi \, de', \quad \mathfrak{A} = \int \mathfrak{a} \, de', \tag{1}$$

wo de' ein Ladungselement des Elektrons ist, welches sich zur Zeit t im Punkte (x', y', z') befindet, und φ und $\mathfrak{a}$ die Potentiale einer daselbst konzentrierten Einheitsladung sind. Wir setzen, mit Liénard und Wiechert,

$$\varphi = \frac{1}{K' R'}, \quad \mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{v}'}{c K' R'}. \tag{2}$$

Es ist $\mathfrak{v}'$ die Geschwindigkeit der Einheitsladung und R' ihre Entfernung vom Aufpunkt zur Emissionszeit $t' = t - R'/c$, und K' der entsprechende Dopplerfaktor, also

$$K' = 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial R'}{\partial t'}.$$

Auf den Beweis des Liénard-Wiechertschen Punktgesetzes kommt es hier nicht an, denn wir werden die Gültigkeit unserer Formeln weiterhin prüfen.

Wir benutzen nun das bekannte Theorem von Lagrange: aus der Gleichung $z = u\,\psi(z) + v$ folgt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{u^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dv^{n-1}} \{\psi(v)^n f'(v)\},$$

sobald 1. $\psi(v)$ weder Null noch unendlich wird, 2. der Modulus von u weniger beträgt als der Modulus des kleinsten u, welches durch Auflösung der Gleichungen

$$\psi(z) = (z - v)\,\psi'(z) \quad \text{und} \quad u = (z - v)/\psi(z)$$

gefunden wird, und 3. $f(z)$ innerhalb der hiermit bestimmten Grenzen synektisch bleibt.[1])

Wir setzen

$$z = t', \quad u = -\frac{1}{c}, \quad \psi(z) = R', \quad v = t,$$

also

$$\psi'(z) = c(K' - 1);$$

dann folgt für

$$f(z) = \frac{F(t')}{K'R'},$$

$$\frac{F(t')}{K'R'} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,c^n} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left\{ R^n \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{F(t)}{KR} \right) \right\}.$$

Nun ist wegen

$$\frac{\partial R}{\partial t} = c(K - 1)$$

$$R^n \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{F(t)}{KR} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{R^{n-1}}{K} F(t) \right\} - n\,c\,\frac{K-1}{K} R^{n-1} F(t).$$

Daher bekommen wir

$$\frac{F(t')}{K'R'} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,c^n} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \{ R^{n-1} F(t) \}. \tag{3}$$

Diese Gleichung gilt, sobald 1. R weder Null noch unendlich wird, 2. der größte Wert von $|K' - 1|$ die Einheit nicht übersteigt, und 3. $F(t')/K'R'$ synektisch bleibt.

Für Unterlichtgeschwindigkeit sind alle Bedingungen erfüllt, solange die erhaltene Reihe konvergiert, außer die eine, daß R nicht Null wird; aber für die Potentiale Φ und $\mathfrak{A}$ ist dies ohne Einfluß, weil ja das Element de' zu den Potentialen und Kräften in ihm selbst nur einen unendlich kleinen Beitrag liefert. Also bekommen wir aus (2) und (3)

$$\varphi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,c^n} \frac{\partial^n R^{n-1}}{\partial t^n}, \quad \mathfrak{a} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,c^n} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{\mathfrak{v}}{c} R^{n-1} \right). \tag{4}$$

1) Schlömilch, Höhere Analysis 2. p. 111. 1874.

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und Entfernung R beziehen sich auf die wirkliche Zeit t, also haben wir

$$\mathfrak{v} = (\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}'), \quad R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Die Differentiation $\partial/\partial t$ geschieht bei festgehaltenen (x, y, z); also ist

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -(\mathfrak{v} \nabla) R.$$

§ 2. *Umformung der Reihen.* Es empfiehlt sich, die Differentiationen in bezug auf t durch solche in bezug auf die Koordinaten zu ersetzen; der Einfachheit halber beschränken wir uns auf die geradlinige translatorische Bewegung des starren kugelförmigen Elektrons mit gleichförmiger Volumladung. Wir machen dabei von symbolischen Methoden Gebrauch, was ja keine Schwierigkeiten verursachen kann, da wir durchweg nur algebraische Operationen und Integrationen zwischen endlichen Grenzen an konvergenten Reihen ausführen werden; übrigens werden wir zum Schlusse unsere Resultate prüfen.

Wir nehmen die Bahnlinie zur x-Achse, setzen für den Mittelpunkt des Elektrons $x' = x_0(t)$, für das Ladungselement de' $x' = x_0 + \xi'$, für den Aufpunkt $x = x_0 + \xi$; es ist

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

$$= \sqrt{(\xi-\xi')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

also auch

$$\frac{\partial^n R^p}{\partial t^n} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k!} U_{n,k} \frac{\partial^k R^p}{\partial \xi^k}, \tag{5}$$

wo

$$U_{n,k} = [D^n \{x_0(t+\tau) - x_0(t)\}^k]_{\tau=0}, \tag{6}$$

während D den Operator $\partial/c\partial\tau$ bedeutet.[1])

Die Funktion $U_{n,k}$ ist für $k=0$ und $n=0$ gleich Eins, sonst aber für $k=0$ gleich Null; sie verschwindet auch für $k > n$, weil

$$x_0(t+\tau) - x_0(t) = \frac{\dot{v}}{1!}\tau + \frac{\dot{v}}{2!}\tau^2 + \ldots + \frac{\overset{(m)}{v}}{m+1!}\tau^{m+1} + \ldots, \tag{7}$$

1) Schlömilch, l. c. p. 5.

also τ^k ein Faktor von $\{x_\theta(t+\tau) - x_0(t)\}^k$ ist; deswegen kann die Summe in (5) von $k=0$ bis $k=\infty$ erstreckt werden.

Wir setzen in (5) $p = n-1$ und bekommen aus (4)

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{k!} U_{n,k} \frac{\partial^k R^{n-1}}{\partial \xi^k} \\ &= \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^k \cdot \left[\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n!} R^{n-1} D^n \right. \\ &\qquad\qquad \left. \{x_0(t+\tau) - x_0(t)\}^k\right]_{\tau=0} \\ &= \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^k \left[\frac{\varepsilon^{-RD}}{R} \{x_0(t+\tau) - x_0(t)\}^k\right]_{\tau=0}. \end{aligned}\right.$$

In der zweiten Zeile geht die Summe für n eigentlich von k bis ∞; die Abänderung der unteren Grenze ist erlaubt, weil $U_{n,k} = 0$ für $n < k$.

Um die Reihe für a zu finden, müssen wir das allgemeine Glied entwickeln; es ist

$$\frac{1}{c^n} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{v}{c} R^{n-1}\right) = \sum_{m=0}^{m=n} n_m \frac{\partial^m}{c^m \partial t^m} \left(\frac{v}{c}\right) \frac{\partial^{n-m} R^{n-1}}{\partial t^{n-m}}.$$

Nun ist identisch wegen (7), wo $\frac{\partial^m v}{\partial t^m} = \overset{(m)}{v}$ gesetzt ist,

$$\frac{\partial^m}{c^m \partial t^m} \left(\frac{v}{c}\right) = [D^{m+1} \cdot \{x_0(t+\tau) - x_0(t)\}]_{\tau=0}.$$

Setzen wir in (5) $n-m$ statt n, und $n-1$ statt p, so kommt also

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^n} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{v}{c} R^{n-1}\right) &= \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k R^{n-1}}{\partial \xi^k} \left[\sum_{m=0}^{m=n} n_m D^{m+1} \cdot \{x_0(t+\tau)\right. \\ &\qquad \left. - x_\theta(t)\} D^{n-m} \{x_\theta(t+\tau) - x_0(t)\}^k\right]_{\tau=0} \\ &= \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{k+1!} \frac{\partial^k R^{n-1}}{\theta \xi^k} [D^{n+1} \{x_0(t+\tau) \\ &\qquad - x_0(t)\}^{k+1}]_{\tau=0}. \end{aligned}$$

Benutzen wir dies in (4), so bekommen wir gerade wie oben

$$(9)\quad a = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{k+1!} \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \left[\frac{\varepsilon^{-RD}}{R} D \{x_\theta(t+\tau) - x_\theta(t)\}^{k+1}\right]_{\tau=0}.$$

Die Komponenten a_y und a_z verschwinden offenbar identisch; darum werden wir künftig a statt a_x schreiben.

Um aus (8) und (9) die Potentiale des ganzen Elektrons zu berechnen, müssen wir mit der Elementarladung de' multiplizieren und über das ganze Elektron integrieren; die resultierenden Integrale mögen dann durch Φ und $\mathfrak{A}$ ausgedrückt werden.

Um dieselben zu berechnen, müssen wir das Integral

$$I = \int \frac{\varepsilon^{-RD}}{R} de'$$

auswerten, wo D als konstanter Parameter zu behandeln ist.

§ 3. *Das Integral I.* Wir nehmen den Elektromittelpunkt und die Bahnlinie als Anfangspunkt und Polarachse eines Polarkoordinatensystems an, schreiben dementsprechend

$$de' = \frac{3e}{4\pi a^3} r'^2 \sin\theta' \, d\varrho' \, d\theta' \, dr'$$

und integrieren für φ' von 0 bis 2π, für θ' von 0 bis π und für r' von 0 bis a. Dabei wird

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos\psi},$$

wo

$$\cos\psi = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi' - \varphi).$$

Aus dem Additionstheorem der Funktion $\varepsilon^{i\varrho}/\varrho$ [1]) folgt für $\varrho = i D R$

$$\frac{\varepsilon^{-RD}}{R} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^\nu \frac{2\nu+1}{D^{2\nu+1}} \left(\frac{d}{dr^2}\right)^\nu \frac{\varepsilon^{-rD}}{r} - \left(\frac{d}{dr'^2}\right)^\nu \frac{\sinh r' D}{r'} P_\nu(\cos\psi),$$ [2])

wobei $r' < r$ vorausgesetzt ist, aber für $r' > r$ r und r' vertauscht werden müssen.

Bei der Integration in bezug auf θ und φ' fallen alle Glieder außer dem ersten heraus; wir bekommen also

$$(10) \quad \begin{cases} I = \frac{3e}{a^3} \left[\frac{\varepsilon^{-rD}}{r} \int_0^r \sinh r' D \, . \, r' \, dr' + \frac{\sinh r D}{r} \int_r^a \varepsilon^{-r'D} \, . \, r' \, dr' \right] \\ \quad = \frac{3e}{a} \left[\frac{1}{a^2 D^2} - \frac{1 + aD}{a^2 D^2} \varepsilon^{-aD} \frac{\sinh r D}{rD} \right], \end{cases}$$

1) Heine, Kugelfunktionen 1. p. 345/46. Gl. (57).

2) sinh kurz statt hyp. sin.

ler auch entwickelt

$$1)\quad \begin{cases} I = \dfrac{3e}{a}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s(s+1)\,a^s}{s+2!}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{r^{2n}}{2n+1!}\,D^{2n+s} \\ \qquad\qquad - \dfrac{3e}{a^3}\displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{r^{2n+2}}{2n+3!}\,D^{2n}, \end{cases}$$

daß also I keine negativen Potenzen von D enthält.

§ 4. *Die Potentiale Φ und $\mathfrak{A}$.* Aus (8) und (9) bekommen ir nun

$$2)\quad \Phi = \sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}\cdot[I\{x_0(t+\tau)-x_0(t)\}^k]_{\tau=0},$$

$$3)\quad \begin{cases} = \dfrac{3e}{a}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s(s+1)\,a^s}{s+2!}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{2n+1!}\sum_{k=0}^{k=2n}\frac{(-1)^k}{k!} \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial^k r^{2n}}{\partial\xi^k}\,U_{2n+s,k} \\ - \dfrac{3e}{a^3}\displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{2n+3!}\sum_{k=0}^{k=2n}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k r^{2n+2}}{\partial\xi^k}\,U_{2n,k}; \end{cases}$$

$$4)\quad \mathfrak{A} = \sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-1)^k}{k+1!}\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}[I\,D\{x_0(t+\tau)-x_0(t)\}^{k+1}]_{\tau=0},$$

$$5)\quad \begin{cases} = \dfrac{3e}{a}\displaystyle\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s(s+1)\,a^s}{s+2!}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{2n+1!}\sum_{k=0}^{k=2n}\frac{(-1)^k}{k+1!} \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial^k r^{2n}}{\partial\xi^k}\,U_{2n+s+1,\,k+1} \\ - \dfrac{3e}{a^3}\displaystyle\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{2n+3!}\sum_{k=0}^{k=2n}\frac{(-1)^k}{k+1!}\frac{\partial^k r^{2n+2}}{\partial\xi^k}\,U_{2n+1,\,k+1}. \end{cases}$$

ie obere Grenze von k ist gleich $2n$ zu setzen, weil in der sten Reihe $\partial^k r^{2n}/\partial\xi^k$ für $k>2n$ identisch verschwindet, in ır zweiten Reihe aber $U_{2n,k}$ bzw. $U_{2n+1,\,k+1}$.

§ 5. *Prüfung der Potentialausdrücke.* Der Beweis, daß die Potentiale den nötigen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 \Phi}{c^2 \partial t} - \nabla^2 \Phi = 4\pi\varrho, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{c^2 \partial t^2} - \nabla^2 \mathfrak{A} = 4\pi\varrho\frac{v}{c},$$

$$\frac{\partial \Phi}{c\,\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{A} = 0,$$

im Innern des Elektrons genügen, läßt sich mittels (12) und (14) sehr leicht führen, mit wesentlich komplizierteren Rechnungen auch mittels (13) und (15); nur müssen wir beachten, daß die Differentiation $\partial/\partial t$ bei festem Aufpunkt, also festem x, daher bei variierendem ξ, auszuführen ist. Bezieht sich also d/dt auf ein festes ξ, so haben wir wegen $\xi = x - x_0(t)$

$$\frac{\partial}{c\,\partial t} = \frac{d}{c\,dt} - \frac{v}{c}\frac{\partial}{\partial \xi};$$

da auch

$$\frac{d}{c\,dt}\{x_0(t+\tau) - x_0(t)\} = \frac{d x_0(t+\tau)}{c\,dt} - \frac{d x_0(t)}{c\,dt}$$
$$= D\{x_0(t+\tau) - x_0(t)\} - \frac{v}{c}$$

ist, so bekommen wir aus (12)

$$\frac{d\Phi}{c\,dt} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial \xi^k}[I D\{x_0(t+\tau) - x_0(t)\}^k]_{\tau=0}$$
$$- \frac{v}{c}\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{k-1!}\frac{\partial^k}{\partial \xi^k}[I\{x_0(t+\tau) - x_0(t)\}^{k-1}]_{\tau=0}.$$

Das erste Glied der letzten Reihe verschwindet wegen des unendlichen Nenners $k-1!$; in den übrigen setzen wir $k+1$ statt k ein, wodurch wir offenbar $-\partial\Phi/\partial\xi$ bekommen; also ist

$$(16) \qquad \frac{\partial \Phi}{c\,\partial t} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial \xi^k}[I D\{x_0(t+\tau) - x_0(t)\}^k]_{\tau=0}.$$

Ebenso folgt aus (14)

$$(17) \qquad \frac{\partial \mathfrak{A}}{c\,\partial t} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{k+1!}\frac{\partial^k}{\partial \xi^k}[I D^2\{x_0(t+\tau) - x_0(t)\}^{k+1}]_{\tau=0}.$$

Es ist also die Operation $\partial/c\,\partial t$ gleichbedeutend mit der Operation D innerhalb der eckigen Klammer.

Was nun die Operation ∇^2 anbetrifft, so kommen die Koordinaten (x, y, z) des Aufpunktes nur in dem Symbol I vor, und zwar nur in der Größe r, der Entfernung des Aufpunktes vom Elektronenmittelpunkt; es ist also wegen (11)

$$\nabla^2 I = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rI) = -\frac{3e}{a^3}(1+aD)e^{-aD}\cdot\frac{\sinh rD}{rD}$$
$$= ID^2 - \frac{3e}{a^3}.$$

Das Glied $-3e/a^3$ verschwindet nun bei der Operation mit $(\partial/\partial\xi)^k$, wenn wir aus (12) den Ausdruck $\nabla^2\Phi$ bilden, außer wenn $k=0$ ist; wir bekommen also

$$\nabla^2\Phi = \sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}[ID^2\{x_0(t+\tau)-x_0(t)\}^k]_{\tau=0} - \frac{3e}{a^3},$$

das heißt

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{c^2\partial t^2} - 4\pi\varrho.$$

Ebenso folgt aus (14)

$$\nabla^2\mathfrak{A} = \sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-1)^k}{k+1!}\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}[ID^2\{x_0(t+\tau)-x_0(t)\}^{k+1}]_{\tau=0}$$
$$-\frac{3e}{a^3}[D\{x_0(t+\tau)-x_0(t)\}]_{\tau=0}$$
$$= \frac{\partial^2\mathfrak{A}}{c^2\partial t} - 4\pi\varrho\frac{v}{c}.$$

Ferner verschwindet offenbar das erste Glied der Reihe (16), denn für $k=0$ operiert das Symbol ID auf die Einheit, gibt also Null als Resultat; setzen wir in den übrigen Gliedern $k+1$ statt k, so bekommen wir

$$\frac{\partial\Phi}{c\,\partial t} = -\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-1)^k}{k+1!}\frac{\partial^{k+1}}{\partial\xi^{k+1}}[ID\{x_0(t+\tau)-x_0(t)\}^{k+1}]_{\tau=0}$$
$$= -\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\xi}$$

wegen (14), also

$$\frac{\partial\Phi}{c\,\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{A} = 0.$$

Es sind also alle Differentialgleichungen innerhalb des Elektrons identisch befriedigt.

§ 6. *Anfangswerte.* Wir müssen jetzt die Anfangswerte von Φ, $\mathfrak{A}$, $\partial\Phi/c\partial t$ und $\partial\mathfrak{A}/c\partial t$ untersuchen, dabei müssen wir über die Bewegung des Elektrons irgendwelche Annahme machen, am einfachsten folgende:

Das Elektron soll sich zur Zeit $t=0$ zu bewegen anfangen, nachdem es so lange in Ruhe gewesen ist, daß sich der elektrostatische Zustand im Innern herausgebildet hat.

Wir verlangen also, daß zur Zeit $t=0$

$$(18)\qquad v=0,\quad \Phi=\Phi_e,\quad \mathfrak{A}=0,\quad \frac{\partial\Phi}{c\partial t}=0,\quad \frac{\partial\mathfrak{A}}{c\partial t}=0.$$

Es fragt sich jetzt, ob die Ausdrücke (12) bis (17) diesen Anfangsbedingungen genügen.

Wir sehen nun aus (12) oder (13), daß das Glied $k=0$ von Φ gleich $3e/2a - er^2/2a^3$ ist, also gleich Φ_e; es müssen sich also alle übrigen Glieder von Φ auf Null reduzieren, wenn wir $t=0$ setzen.

Die Zeit t geht nur in die Funktion $x_0(t+\tau)-x_0(t)$ ein; setzen wir also $t=0$, so bekommen wir aus (12), (14), (16) und (17)

$$(19)\qquad \begin{cases} \Phi_0-\Phi_e=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}\left[I\{x_0(\tau)\}^k\right]_{\tau=0}, \\ \mathfrak{A}_0=\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-1)^k}{k+1!}\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}\left[ID\{x_0(\tau)\}^{k+1}\right]_{\tau=0}, \\ \left(\frac{\partial\Phi}{c\partial t}\right)_0=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}\left[ID\{x_0(\tau)\}^k\right]_{\tau=0}, \\ \left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{c\partial t}\right)_0=\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-1)^k}{k+1!}\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}\left[ID^2\{x_0(\tau)\}^{k+1}\right]_{\tau=0}, \end{cases}$$

wo wir $x_0(0)=0$ gesetzt haben, also den Anfangspunkt der x in den ursprünglichen Ort des Elektronmittelpunktes verlegt haben. *Diese Anfangswerte verschwinden im allgemeinen nicht,* denn die Reihen in (19) rechts bleiben für $t=0$ endlich.

Um dies einzusehen, müssen wir beachten, daß zur Zeit $\tau=0$ unmöglich alle Differentialquotienten der Geschwindigkeit

verschwinden können, denn sonst gäbe es gar keine Bewegung; es sei also $\overset{(m)}{v}$ der erste nicht verschwindende, $\overset{(m)}{v_0}$ sein Anfangswert. Dann ist nach (7)

$$x_0(\tau) = \frac{\overset{(m)}{v_0}}{m+1\,!}\,\tau^{m+1} + \ldots,$$

also

$$\{x_0(\tau)\}^k = \left(\frac{\overset{(m)}{v_0}}{m+1\,!}\right)^k \tau^{(m+1)k} + \ldots$$

Es verschwinden deswegen alle Funktionen U_n, k, für welche $n < (m+1)k$, wenn $t = 0$ ist, $U_{(m+1)k,\,k}$ aber reduziert sich auf

$$\frac{\{(m+1)k\}\,!}{(m+1\,!)^k} \cdot (\overset{m}{v_0}/c^{m+1})^k,$$

verschwindet also nicht, und die entsprechenden Glieder bleiben in den Anfangswerten der Potentiale bestehen.

§ 7. Die Potentiale Φ und $\mathfrak{A}$ allein liefern also nicht die vollständige Lösung unseres Problems, sondern bedürfen dazu noch Zusatzpotentiale Ψ und $\boldsymbol{B}$, welche folgenden Bedingungen genügen müssen:

Erstens müssen Ψ und $\boldsymbol{B}$ überall, innerhalb sowohl als auch außerhalb des Elektrons, die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 f}{c^2\,\partial\, t^2} - \nabla^2 f = 0$$

befriedigen.

Zweitens müssen Ψ und $\boldsymbol{B}$, $\partial\,\Psi/c\,\partial\,t$ und $\partial\,\boldsymbol{B}/c\,\partial\,t$ zu Anfang der Bewegung, also für $t = 0$, bzw. gleich $-(\Phi - \Phi_0)$ und $-\mathfrak{A}_0$, $-(\partial\,\Phi/t\,\partial\,t)_0$ und $-(\partial\,\mathfrak{A}/c\,\partial\,t)_0$, also den Werten der Reihen in (19) rechts entgegengesetzt gleich sein.

Drittens müssen Ψ und $\boldsymbol{B}$, sowie auch ihre ersten Differentialquotienten nach den Koordinaten, überall eindeutig, stetig und endlich bleiben und im Unendlichen verschwinden.

Sie sind alsdann, einem Satze von Kirchhoff zufolge, vollständig bestimmt; aber ehe wir zu ihrer Berechnung schreiten, wollen wir noch die mechanische Kraft berechnen, soweit sie von Φ und $\mathfrak{A}$ abhängt.

§ 8. *Die mechanische Kraft.* Die Gesamtkraft ist, wegen der vorhandenen Symmetrie, der x-Achse parallel und hängt allein von der elektrischen Kraft ab, da die magnetische Kraft zur Bewegungsrichtung, also zur x-Achse, senkrecht ist; wir

bezeichnen die mechanische Kraft pro Ladungseinheit mit J, die Gesamtkraft mit F, so daß also

$$J = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}}{c\,\partial t}, \quad F = \int J\,de.$$

Da nun $\partial/\partial x = \partial/\partial \xi$, so bekommen wir aus (12) und (17)

$$(20)\quad \begin{cases} -F = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^{k+1}}{\partial \xi^{k+1}} [I\{x_0(t+\tau) - x_0(t)\}^k]_{\tau=0} \\ \qquad + \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{k+1!} \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} [I D^2 \{x_0(t+\tau) - x_0(t)\}^{k+1}]_{\tau=0}. \end{cases}$$

Es kommen die Koordinaten nur im Operationssymbol I vor, so daß wir ein Integral der Form $\int (\partial^k I/\partial \xi^k)\,de$ zu berechnen haben, wo wegen (10)

$$I = \frac{3e}{a}\left[\frac{1}{a^2 D^2} - \frac{1+aD}{a^2 D^2} e^{-aD} \frac{\sinh rD}{rD}\right].$$

Nun ist für irgend eine Funktion von r allein

$$\frac{\partial^k f}{\partial \xi^k} = \sum_{s=0}^{s \le 1/2 k} \frac{k!}{s!\,k-2s!} (2\xi)^{k-2s} \left(\frac{d}{d r^2}\right)^{k-s} \cdot f. \;^{1})$$

Es ist $\xi = r\mu$, also bekommen wir

$$\int_{-1}^{1} \frac{\partial^{2n+1} f}{\partial \xi^{2n+1}}\,d\mu = 0,$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\partial^{2n} f}{\partial \xi^{2n}}\,d\mu = \frac{1}{r} \sum_{s=0}^{s=n} \frac{2s!}{s!\,2n-2s+1!} (2r)^{2n-2s+1} \left(\frac{d}{d r^2}\right)^{2n-s} \cdot f$$

$$= \frac{2}{(2n+1)r} \sum_{s=0}^{s=n} \frac{2n+1!}{s!\,2n+1-2s!} (2r)^{2n+1-2s} \left(\frac{d}{d r^2}\right)^{2n+1-s} \int_0^r r f\,dr$$

$$= \frac{2}{(2n+1)r} \frac{d^{2n}(rf)}{dr^{2n}}.$$

---

1) Schlömilch, l. c. p. 6, Gleichung (8

also auch

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}\int \frac{\partial^{2n} f}{\partial \xi^{2n}}\, d\,e &= \frac{3\,e}{2\,a^3}\int_0^a\int_{-1}^{1} \frac{\partial^{2n} f}{\partial \xi^{2n}}\, r^2\, d\,r\, d\,\mu \\ &= \frac{3\,e}{(2n+1)\,a^3}\left[r\,\frac{d^{2n-1}(r\,f)}{d\,r^{2n-1}} - \frac{d^{2n-2}(r\,f)}{d\,r^{2n-2}}\right]_0^a \\ &= \frac{3\,e}{(2n+1)\,a^3}\left[r^2\,\frac{d^{2n-1} f}{d\,r^{2n-1}} + (2n-2)\,r\,\frac{d^{2n-2} f}{d\,r^{2n-2}}\right. \\ &\qquad\qquad \left. - (2n-2)\,\frac{d^{2n-3} f}{d\,r^{2n-3}}\right]_0^a,\end{aligned}\right.$$

während

$$(22)\qquad \int \frac{\partial^{2n+1} f}{\partial \xi^{2n+1}}\, d\,e = 0\,.$$

Speziell bekommen wir

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}\int \frac{\partial^{2n} I}{\partial \xi^{2n}}\, d\,e &= -\frac{3\,e}{a}\,\frac{1+a\,D}{a^2\,D^2}\,\varepsilon^{-a\,D}\int \frac{\partial^{2n}}{\partial \xi^{2n}}\left(\frac{\sinh r\,D}{r\,D}\right) d\,\varphi \\ &= -\frac{9\,e^2}{a}\,\frac{1+a\,D}{a^2\,D^2}\,\varepsilon^{-a\,D}\,\frac{a\,D\cosh a\,D - \sinh a\,D}{a^3\,D^3}\,\frac{D^{2n}}{2n+1} \\ &= \frac{36\,e^2}{a}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\,(s+1)\,(s+4)\,(2\,a)^s}{s+5\,!}\,\frac{D^{2n+s}}{2n+1} - \frac{3\,e^2}{a^3}\,\frac{D^{2n-2}}{2n+1}.\end{aligned}\right.$$

Damit bekommen wir aus (20) für die äußere Kraft, welche zur Erhaltung der gegebenen Bewegung nötig ist,

$$(25)\quad -F = \frac{72\,e^2}{a}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\,(s+1)\,(s+4)\,(2\,a)^s}{s+5\,!}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{U_{2n+s+2,\,2n+1}}{(2n+3)\,(2n+1)\,2n+1\,!}\,,$$

wo, wie früher,

$$U_{2p+s+2,\,2n+1} = \left[D^{2n+s+2}\left\{\varkappa_p(t+\tau) - \varkappa_p(t)\right\}^{2n+1}\right]_{\tau=0};$$

das letzte Glied in (23) gibt ein Glied in (24), welches $U_{2n,\,2n+1}$ als Faktor enthält, aber dies verschwindet identisch, da der erste Index kleiner als der zweite ist.

§ 9. *Beispiel — die gleichförmig beschleunigte Bewegung.* Um einen besseren Überblick über unsere Resultate zu er-

halten, wollen wir diesen Fall vollständig behandeln. Wir setzen

$$x_0(t) = \tfrac{1}{2} f t^2,$$
$$v = f t, \quad \dot{v} = f, \quad \ddot{v} = \ldots = 0,$$
$$\frac{v}{c} = \beta.$$

Dann ist

$$U_{n,k} = [D^n \cdot f^k \tau^k (t + \tfrac{1}{2}\tau)^k]_{\tau=0}$$
$$= \frac{n!\,k!}{n-k!\,2k-n!} \left(\frac{f}{2c^2}\right)^{n-k} \beta^{2k-n} (2k \geq n \geq k).$$

Wir bekommen aus (24), für die äußere Kraft,

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} -F = \frac{36 e^2 f}{a c^2} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s (s+4)}{s!\,s+5!} \left(\frac{af}{c^2}\right)^s \\ \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+s+2!}{2n-s!} \frac{\beta^{2n-s}}{(2n+3)(2n+1)}. \end{aligned} \right.$$

Das erste Glied, $s = 0$, ist

$$-F_0 = \frac{6 e^2 f}{5 a c^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+2}{2n+3} \beta^{2n}$$
$$= \frac{6 e^2 f}{5 a c^2} \left\{ \frac{1}{\beta^2 (1-\beta^2)} - \frac{1}{2\beta^3} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} \right\},$$

in Übereinstimmung mit Abraham und Sommerfeld.

Das zweite Glied, $s = 1$, ist

$$-F_1 = -\frac{e^2 f^2}{c^4} \sum_{n=0}^{n=\infty} (n+1)\, n\, \beta^{2n-1} = -\frac{e^2 f^2}{c^4} \frac{2\beta}{(1-\beta^2)^3},$$

in Übereinstimmung mit Abraham.

Um den Konvergenzgrad der Reihe (25) zu beurteilen, müssen wir noch das allgemeine Glied betrachten; man beweist leicht, durch direkte Differentiation, daß es gleich

$$(26) \quad \left\{ -F_s = \frac{72 e^2 f}{a c^2} \frac{(-1)^s (s+4)}{s!\,s+5!} \left(\frac{af}{c^2}\right)^s \left(\frac{d}{d\beta}\right)^s \left(\frac{d}{d\beta^2}\right)^2 \left(\frac{d}{d\beta}\right)^{s-2} \right.$$
$$\left. \left\{ \frac{1}{1-\beta} + \frac{(-1)^s}{1+\beta} \right\} \right.$$

ist.

Nun können sich, wegen der Kleinheit von af/c^2 in allen wirklich vorkommenden Fällen, Schwierigkeiten überhaupt nur einstellen, wenn β nahe gleich Eins ist; in diesem Falle aber hängt die Konvergenz der Reihe vom Gliede $1/1-\beta$ in der Klammer ab, und es kann offenbar auch der Differentialoperator $d/d\beta^2$ durch $\frac{1}{2}(d/d\beta)$ ersetzt werden. Also bekommen wir annähernd

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} -F_s &= \frac{18\,e^2 f}{a\,c^2}\,\frac{(-1)^s(s+4)}{s!\,s+5!}\left(\frac{af}{c^2}\right)^s\left(\frac{d}{d\beta}\right)^{2s}\frac{1}{1-\beta} \\ &= \frac{18\,e^2 f}{a\,c^2(1-\beta)}\,\frac{(-1)^s}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+5)}\,\frac{2\,s!}{2^{2s}.(s!)^2}\left\{\frac{4af}{(c-v)^2}\right\}^s. \end{aligned}\right.$$

Die Reihe konvergiert also unbedingt, wenn $v<c$ und zugleich $4af/(c-v)^2$ kleiner als Eins ist; letztere Bedingung deckt sich offenbar mit der Abrahamschen Definition der quasistationären Bewegung.

§ 10. *Allgemeinste geradlinige Bewegung.* Es läßt sich leicht beweisen, daß die Reihe (24) ganz allgemein zu den Abraham-Sommerfeldschen Ausdrücken für die Kraft führen, wenigstens bis zur Ordnung a^0. Es ist

$$x_0(t+\tau)-x_0(t)=v\tau+\frac{\dot v}{2!}\tau^2+\frac{\ddot v}{3!}\tau^3+\ldots,$$

also

$$\begin{aligned} U_{n,k} &= \left[D^n.\left\{\tau^k\left(v+\frac{\dot v}{2!}\tau+\frac{\ddot v}{3!}\tau^2+\ldots\right)^k\right\}\right]_{\tau=0} \\ &= \frac{n!}{n-k!}\,\frac{1}{c^k}\left[D^{n-k}\cdot\left(v+\frac{\dot v}{2!}\tau+\frac{\ddot v}{3!}\tau^2+\ldots\right)^k\right]_{\tau=0}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} U_{2n+2,\,2n+1} &= \frac{2n+2!}{1!}\,\frac{1}{c^{2n+1}}\left[D\left(v+\frac{\dot v}{2!}\tau+\ldots\right)^{2n+1}\right]_{\tau=0} \\ &= \frac{(2n+1)\,2n+2!}{2}\,\frac{\dot v}{c^2}\,\beta^{2n}, \\ U_{2n+3,\,2n+1} &= \frac{2n+3!}{2!}\,\frac{1}{c^{2n+1}}\left[D^2\left(v+\frac{\dot v}{2!}\tau+\frac{\ddot v}{3!}\tau^2+\ldots\right)^{2n+1}\right]_{\tau=0} \\ &= \frac{2n(2n+1)\,2n+3!}{8}\,\frac{\dot v^2}{c^4}\,\beta^{2n-1}+\frac{(2n+1)\,2n+3!}{6}\,\frac{\ddot v}{c^3}\,\beta^{2n}. \end{aligned}$$

Aus (24) bekommen wir nun leicht

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} -F &= \frac{6\,e^2\dot v}{5\,a\,c^2}\left\{\frac{1}{\beta^2(1-\beta^2)}-\frac{1}{2\beta^3}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right\} \\ &\quad -\frac{2\,e^2\dot v^2\beta}{c^4(1-\beta^2)^3}-\frac{2\,e^2\ddot v}{3\,c^3(1-\beta^2)^2}\cdots, \end{aligned}\right.$$

wo die übrigen, nicht hingeschriebenen Glieder von der Ordnung a und noch höher sind. Die Hauptglieder decken sich wieder mit den von Abraham und Sommerfeld für diesen Fall angegebenen.

§ 11. *Zusatzpotentiale.* Somit haben wir bewiesen, daß unsere Reihen (4) allgemein zu den Abraham-Sommerfeldschen Ausdrücken für die Teile der mechanischen Kraft führen, welche von der Geschwindigkeit und Beschleunigung abhängen, also auch zu ihren Ausdrücken für die longitudinale Masse und die Reaktionskraft der Strahlung, oder, wie wir kurz sagen wollen, den Strahlungsdruck. Dasselbe gilt auch für die allgemeinste krummlinige Bewegung, natürlich immer bis zur selben Annäherung, so daß also die Reihen (4) in dieser Hinsicht mit der Sommerfeldschen Lösung gleichbedeutend sind. Das könnte man ja auch von vornherein erwarten, da, wie Sommerfeld gezeigt hat, für die quasistationäre Bewegung seine Lösung die Liénard-Wiechertschen Potentiale direkt ergibt. Nun sahen wir aber, daß die Reihen (4) allein nicht die allgemeine Lösung unseres Problems darstellen, sondern noch gewisser Zusatzpotentiale bedürfen, um den Anfangsbedingungen zu genügen; sollte sich herausstellen, daß dieselben zur Gesamtkraft Glieder der Ordnungen a^{-1} und a^0 liefern, so wären auch die Abraham-Sommerfeldschen Ausdrücke entsprechend zu korrigieren.

Um die physikalische Bedeutung der Zusatzpotentiale Ψ und $\dot{\boldsymbol{B}}$ zu ergründen, müssen wir auf die Liénard-Wiechertschen Potentiale zurückgreifen; nach (1) und (2) haben wir

$$\Phi = \int \frac{de'}{K'R'}, \quad \mathfrak{A} = \int \frac{\mathfrak{v}'}{c}\frac{de'}{K'R'}, \tag{29}$$

wo

$$t' = t - \frac{R'}{c}. \tag{30}$$

Da

$$K' = 1 + \frac{\partial R'}{c\,\partial t'},$$

folgt hieraus

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{K'}, \quad \operatorname{grad} t' = -\frac{\boldsymbol{R}'}{cK'R'},$$

wo $\boldsymbol{R}'$ den Vektor vom Element de' zum Aufpunkt hin gezogen ist; da de' unveränderlich ist, bekommen wir aus (29)

$$
(31)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi}{c\,\partial t} = \int \left\{1 - \frac{v'^2}{c^2} + \left(\frac{\dot{\mathfrak{v}}'}{c^2}\,\mathfrak{R}'\right) - K'\right\} \frac{de'}{K'^3 R'^2},\\
&\frac{\partial \mathfrak{A}}{c\,\partial t} = \int \frac{\dot{\mathfrak{v}}'}{c^2}\,\frac{de'}{K'^2 R'}\\
&\qquad\qquad + \int \frac{\mathfrak{v}'}{c}\left\{1 - \frac{v'^2}{c^2} + \left(\frac{\dot{\mathfrak{v}}'}{c^2}\,\mathfrak{R}'\right) - K'\right\} \frac{de'}{K'^3 R'^2},\\
&\operatorname{grad} \Phi = \int \left[\frac{\mathfrak{v}'}{c} - \frac{\mathfrak{R}'}{K' R'}\left\{1 - \frac{v'^2}{c^2} + \left(\frac{\dot{\mathfrak{v}}'}{c^2}\,\mathfrak{R}'\right)\right\}\right] \frac{de'}{K'^3 R'^2},\\
&\operatorname{rot} \mathfrak{A} = \int \left[\frac{\mathfrak{v}'}{c} \cdot \mathfrak{R}'\right] \left\{1 - \frac{v'^2}{c^2} + \left(\frac{\dot{\mathfrak{v}}'}{c^2}\,\mathfrak{R}'\right)\right\} \frac{de'}{K'^3 R'^2}.
\end{aligned}\right.
$$

§ 12. Aus den Gleichungen (29) und (31) folgt für $t = 0$, also

$$t' = -\frac{R'}{c}, \quad \mathfrak{v}' = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\mathfrak{v}}' = 0,$$

daß

$$\Phi_0 = \Phi_e, \quad \mathfrak{A}_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{c\,\partial t}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{c\,\partial t}\right)_0 = 0.$$

Ferner folgt leicht aus (29), daß Φ und $\mathfrak{A}$ den nötigen Differentialgleichungen im freien Äther genügen und im Unendlichen, sowie im Elektron selbst, von der richtigen Größenordnung sind; weiter bekommen wir aus (31) für die elektrische Kraft

$$
(32)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{D} = -\int \frac{\dot{\mathfrak{v}}'}{c^2}\,\frac{de'}{K'^2 R'}\\
&\qquad + \int \left(\frac{\mathfrak{R}'}{R'} - \frac{\mathfrak{v}'}{c}\right)\left\{1 - \frac{v'^2}{c^2} + \left(\frac{\dot{\mathfrak{v}}'}{c^2}\,\mathfrak{R}'\right)\right\} \frac{de'}{K'^3 R'^2}.
\end{aligned}\right.
$$

Bilden wir die radiale elektrische Kraft und integrieren über die Oberfläche einer genügend großen, um das Elektron als Mittelpunkt geschlagenen Kugel, so finden wir das Divergenztheorem bestätigt; und ebenso auch für die magnetische Kraft.

Also genügen die Liénard-Wiechertschen Potentiale den Bedingungen unseres Problems vollständig; um so mehr muß es befremden, daß die daraus abgeleiteten Reihen (4) dies nicht tun.

§ 13. Der Grund des Unterschiedes ist folgender: Jede Lagrangesche Reihenentwickelung setzt voraus, daß die Differentialquotienten der Funktion in bezug auf die unabhängige Variabel, also in unserem Falle der Koordinaten (x', y', z') in bezug auf die Emissionszeit t', bis zu jeder Ordnung stetig sind. Bei unserem Problem ist dies für $t' = 0$ gewiß nicht

der Fall, vielmehr muß, wie wir im § 6 schon sahen, wenigstens ein Differentialquotient der Geschwindigkeit, also auch der Koordinaten, plötzlich von Null auf einen endlichen Wert springen. Die Reihen (4) entsprechen nur völlig stetigen Bewegungen, d. h. solchen, welche für alle Werte von t', negative sowie auch positive, durch dasselbe analytische Gesetz bestimmt werden.

Da aber die Reihen (4) dasselbe Resultat ergeben wie die Sommerfeldsche Lösung, so muß man fragen, ob hier nicht ähnliche Verhältnisse statthaben. Diese Frage klärt sich leicht auf, wenn man die Sommerfeldschen Betrachtungen umkehrt, und seine Lösung rückwärts aus den Liénard-Wiechertschen Potentialen ableitet, wie wir ganz kurz andeuten wollen, der Einfachheit halber wieder nur für die Translationsbewegung des starren kugelförmigen Elektrons konstanter Dichte.

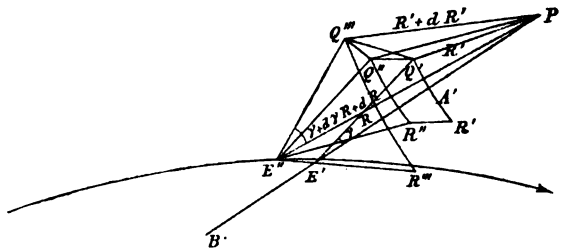


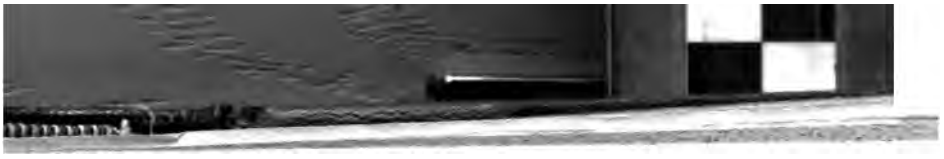
Fig. 1.

In der Fig. 1 bedeute P den Aufpunkt, Q' den Ort des Elementes de' zur Emissionszeit t', E' den Ort des Elektronmittelpunktes zur selben Zeit, so daß also

$$PQ' = R', \quad t' + \frac{R'}{c} = t.$$

Es sei der Winkel $PE'Q' = \gamma$; dann sind für alle Punkte des zu PE' senkrechten Kreises $Q'R'$ R' und γ dieselben.

Nun sei zur früheren Zeit $t' - dt'$ E'' der Ort des Elektronmittelpunktes und $Q''R''$ die entsprechende Lage des Kreises $Q'R'$; diese Zeit $t' - dt'$ ist die Emissionszeit für alle Punkte eines zweiten Kreises $Q'''R'''$, von verschiedenem Öffnungswinkel $\gamma + d\gamma$, und mit verschiedener Entfernung $PQ''' = R' + dR'$, so zwar daß $t' - dt' + \frac{R' + dR'}{c} = t$, also auch $dR' = c\,dt'$.



Dieser zweite Kreis kann irgend ein beliebiger zu PE'' senkrechter Schnitt, der mit dem Radius $R' + dR'$ um P beschriebenen Kugel sein; wir wählen ihn so, daß er auf derselben um E'' mit dem Radius r' beschriebenen Kugel liegt, auf dem sich auch der Kreis $Q''R''$ befindet; d. h.

$$E'''Q''' = E''Q'' = E'Q' = r'.$$

Wir teilen nun das Elektron in unendlich kleine Volumelemente ein, deren eines durch den vom Ringe $Q''Q'''R''R'''$ vom Radius r', dem entsprechenden vom Radius $r' + dr'$, und den Kegeln $E''Q''R''$ und $E''Q'''R'''$ von den Öffnungswinkeln γ und $\gamma + d\gamma$ begrenzt wird. Das Volum dieses Elementes ist im Limes gleich $2\pi r'^2 \sin\gamma\, dr'\, d\gamma$, und seine Ladung

$$\frac{3e}{2a^3} r'^2 \sin\gamma\, dr'\, d\gamma;$$

also ist z. B. das Skalarpotential gleich

$$\varphi = \frac{3e}{2a^3} \int\int \frac{r'^2 \sin\gamma\, dr'\, d\gamma}{K'R'}$$

Statt γ führen wir nun R' ein; so ist

(33) $$R'^2 = R^2 + r'^2 - 2Rr'\cos\gamma,$$

wo $R = E'P$, d. h. die Entfernung des Aufpunktes vom Elektronmittelpunkt zur Zeit t'.

Verändern wir γ um den Betrag $d\gamma$, so ist die Änderung dR' von R' die Summe zweier Beträge:

(1) $$d_1 R' = Q'Q'' \cos PQ''Q' = v'\,dt' \cos PQ''Q' = (1 - \dot{K}')\,dR',$$

denn wir haben

$$dt' = \frac{dR'}{c}, \quad K' = 1 - \frac{v'}{c}\cos PQ''Q';$$

dieser Betrag rührt von der Bewegung des Elektrons her.

(2) $$d_2 R' = Q''Q''' \cos PQ'''Q''.$$

Im Limes ist

$$PQ'''Q' = PQ'E' - \frac{\pi}{2},$$

also

$$\cos PQ'''Q'' = \sin PQ'E' = \frac{R}{R'}\sin\gamma;$$

weiter ist $Q''Q''' = r'\,d\gamma$, daher

$$d_2 R' = \frac{Rr'}{R'}\sin\gamma\, d\gamma.$$

Allzusammen ist also

$$dR' = d_1 R' + d_2 R' = (1 - K')\, dR' + \frac{Rr'}{R'} \sin\gamma\, d\gamma,$$

woraus

$$\frac{\sin\gamma\, d\gamma}{K' R'} = \frac{dR'}{Rr'}.$$

Diese Gleichung gilt, wie klein auch R' sei, weil wir immer $d\gamma$ so klein annehmen können, daß die gemachten Vernachlässigungen im Limes keinen Irrtum verursachen; deswegen ist für jede Lage des Aufpunktes, im Innern sowie auch im Äußern des Elektrons,

$$\varphi = \frac{3e}{2a^3} \int\int \frac{r'\, dr'\, dR'}{R}.$$

Führen wir statt R' die Variabel $\tau = t - t'$ ein, so daß

$$\tau = \frac{R'}{c}, \quad dR' = c\, d\tau,$$

so kommt

$$\varphi = \frac{3ec}{2a^3} \int\int \frac{r'\, dr'\, d\tau}{R}.$$

§ 14. Es bedarf hier noch der Feststellung der Grenzen; r' ist an die Bedingung $0 \leq r' \leq a$ gebunden, t' an die Bedingung $t' \leq t$, also τ an die Bedingung $\tau \geq 0$.

Weiter ist die Transformation von γ auf R' und τ nur gestattet, wenn die Gleichung (33) reelle Werte von γ liefert, also muß sich aus den Strecken R, r' und $R' = c\tau$ ein Dreieck bilden lassen, mit anderen Worten es muß $r' > |R - c\tau|$ sein. Daher ist

$$\varphi = \frac{3ec}{4a} \int_0 \left\{1 - \left(\frac{R - c\tau}{a}\right)^2\right\} \frac{d\tau}{R}. \tag{34}$$

Das ist genau der Sommerfeldsche Ausdruck[1]), nur daß die obere Grenze noch nicht festgelegt ist.

Erstrecken wir nun das Intervall für t' auf die vergangene Zeit bis zu $t' = -\infty$, so erstreckt sich τ bis zu $t + \infty$, also ist die obere Grenze in (34) $+\infty$, wie bei Sommerfeld, kommt aber in vielen Fällen nicht in Betracht, d. h. wenn für große Werte von τ die Dreiecksbildung unmöglich wird.

Erstrecken wir dagegen das Intervall für t' nur auf die Zeit, während welcher die Bewegung von der Ruhe aus statt-

1) A. Sommerfeld, l. c. p. 109, Gleichung (20).

gefunden hat, d. h. bis zu $t' = 0$, so erstreckt sich τ von $\tau = 0$ bis zu $\tau = t$, und wir bekommen das Integral von Lindemann[1]); damit ist also der physikalische Zusammenhang zwischen den beiden Lösungen aufgeklärt.

Nun wird man bei der wirklichen Berechnung eines Problems für R, als Funktion von τ, wohl meistens eine analytische Form annehmen müssen, wenn die Berechnung ohne große Schwierigkeiten gelingen soll; das ist offenbar nur erlaubt, wenn die wirkliche Bewegung für *alle* Werte von t' kleiner als t durch eine analytische Funktion gegeben ist, also bei $t' = 0$ keinerlei Unstetigkeit stattfindet; dann muß man aber auch alle negativen Werte von t' in Betracht ziehen, mit anderen Worten, man muß das Sommerfeldsche Integral benutzen, und nachträglich, wie bei unseren Reihen (4), das Resultat mittels Zusatzpotentiale korrigieren.

Will man dagegen das Integral von Lindemann benutzen, indem man die Bewegung bei $t' = 0$, also $\tau = t$ als unstetig annimmt, so bedarf es immer einer besonderen Untersuchung des Einflusses dieser Unstetigkeit. Es ist z. B. nicht gestattet anzunehmen, daß die Geschwindigkeit bei $t' = 0$ plötzlich von Null auf einen endlichen Wert springt, denn das würde einer unendlich großen Beschleunigung entsprechen, was aber schon durch die Form der von Sommerfeld und Lindemann[2]) benutzten Modifikation der Potentialgleichung ausgeschlossen ist; man muß vielmehr die Bewegung vom Nullwert der Geschwindigkeit an verfolgen. Daraus folgt schon, daß der von Lindemann angegebene Ausdruck für die longitudinale Masse überhaupt nur für das Anfangsstadium der Bewegung gilt, und nicht notwendig mit dem Abraham-Sommerfeldschen Ausdruck unverträglich ist, denn letzterer Ausdruck beansprucht für das Anfangsstadium keine Gültigkeit.

§ 15. Somit haben wir den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Lösungen festgestellt, und wollen nun unsere Reihen (4) so korrigieren, daß sie die richtige Lösung ergeben; diese Methode hat den großen Vorteil, daß wir nur mit

---

1) F. Lindemann, l. c. 1. p. 244, Gleichung (34). Hier ist seine zweite Lage vorausgesetzt.

2) F. Lindemann, l. c. 1. p. 238, Gleichung (6); l. c. 2. p. 371.

analytischen Funktionen zu operieren haben, während die Methoden von Sommerfeld und Lindemann, wegen den Operationen mit unstetigen Funktionen, selbst in einfachen Fällen recht heikle Integrationen nötig machen.

Für die *wirkliche* Bewegung sei

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0 \quad \text{von } t' = -\infty \text{ bis } t' = 0,$$

$$x' = f(t'), \quad y' = g(t'), \quad z' = h(t') \quad \text{von } t' = 0 \text{ bis } t' = t,$$

$$f, \; g, \; h, \; \frac{df}{dt'}, \; \frac{dg}{dt'}, \; \frac{dh}{dt'} \text{ alle gleich Null für } t' = 0.$$

Hier sind f, g und h analytische Funktionen von t', wenigstens bis eine neue Unstetigkeit der Bewegung eintritt, was aber später als $t' = t$ geschehen soll und deswegen uns nichts angeht. Die Unstetigkeit der wirklichen Bewegung ist dadurch bedingt, daß bei $t' = 0$ je ein höherer Differentialquotient von f, g und h, oder auch mehrere, von Null auf einen endlichen Wert springt.

Weiter denken wir uns eine *fingierte* Bewegung, für welche

$$x' = f(t'), \quad y' = g(t'), \quad z' = h(t') \quad \text{von } t' = -\infty \text{ bis } t' = t.$$

Diese ist also eindeutig durch die gegebene wirkliche Bewegung bestimmt, weil sie eben für das endliche Gebiet von $t' = 0$ bis $t' = t$ mit ihr übereinstimmt; eine andere völlig stetige Fortsetzung der gegebenen Bewegung für negative Zeiten gibt es offenbar nicht.

Unsere Reihen (4) entsprechen also notwendig dieser *fingierten* Bewegung; und die Zusatzpotentiale Ψ und $\mathfrak{B}$ sind darum so zu bestimmen, daß sie den Einfluß der Substitution der fingierten Bewegung zu negativen Zeiten an Stelle des Ruhezustandes gerade aufheben.

Wann ein solcher Einfluß besteht, können wir durch rein kinematische Betrachtungen feststellen; da dies in vielen Fällen genügt, wollen wir damit anfangen.

§ 16. *Kinematische Betrachtungen.* Für die wirkliche Bewegung besteht das Feld aus zwei Teilen:

a) Dem Raum innerhalb der in der Anfangslage ausgesandten Welle; dieselbe ist eine Kugel vom Radius ct mit dem Anfangspunkt als Mittelpunkt. Hat das Elektron bis zur Zeit t noch nicht die Lichtgeschwindigkeit erreicht, wie wir durchweg voraussetzen, so befindet es sich zur Zeit t inner-

halb der Kugel; hier ist das Feld durch die Liénard-Wiechertschen Potentiale (29) gegeben, aber nicht notwendig durch die Reihen (4).

b) Dem äußeren Raum, wo noch das elektrostatische Feld besteht; hier ist $\Phi = \Phi_0$, $\mathfrak{A} = 0$.

Für die fingierte Bewegung liegen die Verhältnisse anders, und zwar gibt es zwei Möglichkeiten:

1. *Das Gesetz der wirklichen Bewegung ist ein solches, daß bei der fingierten Bewegung für negative Zeiten Überlichtgeschwindigkeit nicht vorkommt.* Das von der fingierten Bewegung für negative Zeiten herrührende Feld liegt ganz im Raume b), übt also auf das Elektron gar keinen Einfluß aus, so daß die Reihen (4) ohne Zusatzglied gelten und die Abraham-Sommerfeldschen Formeln ganz richtig sind.

Dieser Fall umfaßt viele Fälle von physikalischer Bedeutung, z. B. endliche Schwingungen bei Unterlichtgeschwindigkeit; auch krummlinige Bewegungen, bei denen die nötigen Voraussetzungen eher noch leichter zu erfüllen sind, z. B. Kreisbewegung bei Unterlichtgeschwindigkeit.

2. *Das Gesetz der wirklichen Bewegung gibt für gewisse negative Werte der Zeit Überlichtgeschwindigkeit.* Die bei genügend großen Überlichtgeschwindigkeiten ausgesandten Wellenflächen schneiden einander, sowie auch zum Teil die Wellenfläche der Zeit Null; der Einfluß der fingierten Bewegung erstreckt sich also auf Teile des Raumes a) innerhalb jener Wellenfläche, und kann auch das Elektron erreichen, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind. Dazu ist nötig, daß die Gleichung $t' = t - R'/c$ eine, oder auch mehrere negative Wurzeln besitzt, sobald für die Koordinaten (x', y', z') in R' die der fingierten Bewegung entsprechenden Funktionen von t' gesetzt werden. Da aber die Koordinaten des Aufpunktes (x, y, z), welcher jetzt mit dem Ort des Elektrons zur Zeit t zusammenfällt, dieselben Funktionen von t sind, so hat die Gleichung die eine Wurzel $t' = t$, welche aber auszuschließen ist; also lautet sie

$$(35)\quad \sqrt{\left\{\frac{f(t') - f(t)}{t' - t}\right\}^2 + \left\{\frac{g(t') - g(t)}{t' - t}\right\}^2 + \left\{\frac{h(t') - h(t)}{t' - t}\right\}^2} = c,$$

wo natürlich das positive Zeichen der Wurzel zu nehmen ist.

§ 17. *Beispiel — die geradlinige Bewegung.* In diesem Falle sind die Funktionen g und h identisch gleich Null, und die Wurzel läßt sich ausziehen; wir unterscheiden drei Fälle:

1. $x > 0 > x'$: *rechtläufige Bewegung.* Die Gleichung (35) gibt

$$\frac{f(t) - f(t')}{t - t'} = c,$$

d. h. die Durchschnittsgeschwindigkeit des Elektrons in der fingierten Bewegung zwischen $t' = t'$ und $t' = t$ ist gleich der Lichtgeschwindigkeit.

2. $x > x' > 0$: *rückläufige Bewegung.* Es ist

$$\frac{f(t) - f(t')}{t - t'} = c.$$

Die vom Elektron durchlaufene Strecke ist aber jetzt gleich $x' + x$, d. h. gleich $f(t') + f(t)$; also ist die Durchschnittsgeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit.

3. $x' > x > 0$: *rückläufige Bewegung.* Hier ist

$$\frac{f(t') - f(t)}{t - t'} = c.$$

Da die vom Elektron zwischen $t' = t'$ und $t' = t$ durchlaufene Strecke wieder gleich $x' + x = f(t') + f(t)$ ist, so ist wieder die Durchschnittsgeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit.

Daraus folgt wie oben, daß die fingierte Bewegung auf die Bewegung des Elektrons überhaupt nur von Einfluß sein kann, wenn die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen $t' = t'$ und $t' = t$ der Lichtgeschwindigkeit wenigstens gleichkommt; offenbar gilt dies für krummlinige Bewegungen in noch erhöhtem Maße. Findet die wirkliche Bewegung zur Zeit t bei Unterlichtsgeschwindigkeit statt, so muß bei der fingierten Bewegung zu einer früheren Zeit Überlichtgeschwindigkeit stattgefunden haben.

Diese Verhältnisse wollen wir nun am früheren Beispiel erläutern.

§ 18. *Beispiel — gleichförmige Beschleunigung.* Wir hatten im § 9

$$x = \tfrac{1}{2} f t^2, \quad v = f t, \quad \dot{v} = f, \quad \text{für } t > 0.$$

Für die fingierte Bewegung ist also

$$x' = \tfrac{1}{2} f t'^2, \quad v' = f t', \quad \dot{v}' = f \text{ für alle Werte von } t' \text{ bis } t' = t.$$

Bei Unterlichtgeschwindigkeit ($v < c$) liegt der dritte Fall vor, denn bei $t' = 0$ kehrt sich die fingierte Bewegung um. Daher ist wegen (35)

$$\frac{\frac{1}{2} f t'^2 - \frac{1}{2} f t^2}{t - t'} = c,$$

also

$$t' = -t - \frac{2c}{f}.$$

Dies gibt

$$v' = f t' = -(2c + v), \text{ also } \beta' = -(2 + \beta),$$

$$R' = c(t - t') = \frac{2c}{f}(c + v) = \frac{2c^2}{f}(1 + \beta).$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen $t' = t'$ und $t' = t$ ist gleich

$$\frac{\frac{1}{2} f t'^2 + \frac{1}{2} f t^2}{t - t'} = c + \frac{v^2}{2(c + v)},$$

d. h. größer als die Lichtgeschwindigkeit.

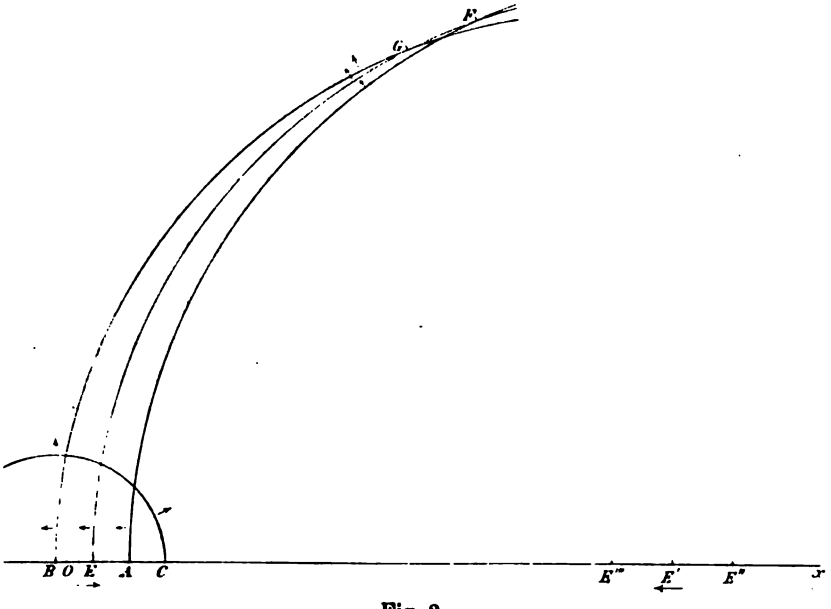


Fig. 2.

Um die Lagen der Wellenflächen klarzulegen, ist die Fig. 2 im richtigen Maßstabe gezeichnet, und zwar für die Zeit $t = c/2f$, welcher die halbe Lichtgeschwindigkeit ent-

spricht. Dabei ist O die Ruhelage des Elektrons, E dessen Lage zur Zeit t, E' zur Zeit $t' = -5c/2f$, E'' zur Zeit $t'' = -21c/8f$, E''' zur Zeit $t''' = -19c/8f$, $R' = E'E$; ferner ist OC die in der Ruhelage ausgesandte Wellenfläche; EGF, AF und BG entsprechen den Zeiten t', t'' und t'''. Wir sehen, daß diese letzteren einander, sowie auch die Kugel OC schneiden, und daß sich das Elektron auf dieselben zubewegt, also von ihnen eine Wirkung verspüren muß; diese Wirkung ist in den Reihen (4) und (25) mitgerechnet, muß also bei dem wirklichen Problem abgezogen werden, was gerade durch die Zusatzglieder Ψ und $\boldsymbol{B}$ bewerkstelligt werden soll.

§ 19. *Die Zusatzkraft.* Dieselbe sei für die Ladungseinheit gleich $\boldsymbol{G}$, fürs ganze Elektron gleich G; dann ist allgemein

$$\boldsymbol{G} = -\operatorname{grad}\Psi - \frac{\partial \boldsymbol{B}}{c\,\partial t} + \left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\right], \quad G = \int \boldsymbol{G}\,de.$$

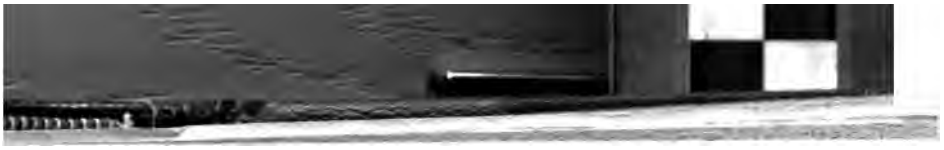
Im Falle der geradlinigen Bewegung fällt das letzte Glied von $\boldsymbol{G}$ weg.

Da sich das elektrostatische Feld ganz im Raume b) des § 16 befindet, also auch das Elektron gar nicht beeinflußt, so dürfen wir einfach Ψ und $\boldsymbol{B}$ den Potentialen der fingierten Bewegung zu negativen Zeiten entgegengesetzt gleichsetzen. Nun ist zu beachten, daß bei unserem Problem die maßgebende fingierte Bewegung bei Überlichtgeschwindigkeit verläuft, also der Dopplerfaktor K' auch negativ werden kann; dann ist aber in den Gleichungen (29) dem Gliede $\int de'/K'R'$ das Zeichen von K' vorzusetzen, so daß ein positiver Ausdruck entsteht, wie ja genügend bekannt ist, und das Zeichen in (32) ist entsprechend zu nehmen. Deswegen bekommen wir aus (31) und (32)

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} \boldsymbol{G} = \pm\int \frac{\dot{\mathfrak{v}}'}{c^2}\cdot\frac{de'}{K'^2R'} \mp \int\left\{\frac{\boldsymbol{R}'}{R'} - \frac{\mathfrak{v}'}{c} + \frac{1}{R'}\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\left[\frac{\mathfrak{v}'}{c}\cdot\boldsymbol{R}'\right]\right]\right\} \\ \left\{1 - \frac{v'^2}{c^2} + \left(\frac{\dot{\mathfrak{v}}'}{c^2}\boldsymbol{R}'\right)\right\}\frac{de'}{K'^3R'^2}, \end{aligned}\right.$$

wo das obere Zeichen bei positivem, das untere bei negativem K' gilt, und für jede Wurzel der Gleichung (35) ein solches Glied zu nehmen ist.

Die Größenordnung der Kraft (36) läßt sich sofort angeben: erstens ist $R' = c(t-t')$, und $t-t'$ ist die Zeit, welche



das Elektron gebraucht, um von Überlichtgeschwindigkeit v' zur Zeit t' auf Unterlichtgeschwindigkeit v zur Zeit t zu kommen, also allgemein recht groß; zweitens verschwindet K' nicht, denn die Gleichung (35) gibt bei der totalen Differentiation $K'\,dt' = K\,dt$, wo K von Null verschieden ist, weil v/c kleiner als Eins ist, und

$$K' = 1 - \left(\frac{\mathfrak{v}'}{c}\,\mathfrak{R}'\right)\frac{1}{R'};$$

ferner verschwindet dt/dt' nicht, denn Gleichung (39) ist offenbar in t und t' symmetrisch; also kann auch K' nicht verschwinden. Im allgemeinen ist deswegen $K'R'$ sehr groß im Vergleich zu a, wobei nur der Fall auszuschließen ist, wo die Geschwindigkeit bei der wirklichen Bewegung zur Zeit t schon so groß ist, daß die Lichtgeschwindigkeit erreicht wird, während das Elektron eine Strecke gleich einigen Durchmessern zurücklegt. Abgesehen von diesem Ausnahmsfall ist also G von der Ordnung a^0, woraus wir schließen, daß die Abraham-Sommerfeldschen Ausdrücke für den Impuls und die longitudinale Masse des Elektrons allgemein gelten, daß aber der Abrahamsche Ausdruck für den Strahlungsdruck einer Korrektion bedarf. Abgesehen von dem Ausnahmsfall genügt es offenbar, das Elektron als Punktladung zu betrachten, um diese Korrektion bis zur Ordnung a^0 zu bestimmen.

§ 20. *Gradlinige Bewegung.* Hier fällt das mit

$$\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\left[\frac{\mathfrak{v}'}{c}\,\mathfrak{R}'\right]\right]$$

behaftete Glied weg, weil die drei Vektoren $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{R}'$ gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind; ferner ist G der Bahnlinie parallel,

$$\mathfrak{R}' = x - x' \quad \text{und} \quad K' = 1 - \frac{v'}{c},$$

weil das Elektron sich zur Zeit t' auf den Aufpunkt zu bewegt. Wir betrachten wieder dasselbe Beispiel.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung. Nach § 18 ist

$$K' = \frac{2c^2}{f}(1+\beta), \quad \beta' = -(2+\beta), \text{ also } K' = -(1+\beta).$$

Da K' negativ ist, müssen wir in (36) das untere Zeichen nehmen; es existiert nur ein Glied, weil die Gleichung (35) nur eine Wurzel hat. Da weiter die Bewegung zur Zeit t

rückläufig, aber verzögert ist, und das fingierte Elektron E' sich dabei rechts vor dem wirklichen Elektron E befindet, so ist auch

$$\dot{\mathfrak{v}}' = +f, \quad R' = x - x' = -R, \quad (\dot{\mathfrak{v}}' R') = -2c^2(1+\beta).$$

Daher bekommen wir aus (36) wegen $G = e\,\mathfrak{G}$,

$$G = -\frac{e^2 f^2}{2c^4(1+\beta)^3} - \{-1+2+\beta\}\{1-(2+\beta)^2-2(1+\beta)\}\frac{e^2 f^2}{4c^4(1+\beta)^5}$$
$$= +\frac{e^2 f^2}{c^4}\cdot\frac{3+\beta}{4(1+\beta)^3}.$$

Für den Abrahamschen Strahlungsdruck fanden wir in § 9

$$F_1 = \frac{e^2 f^2}{c^4}\cdot\frac{2\beta}{(1-\beta^2)^3}.$$

Der Gesamtdruck ist daher

$$F_1 + G = \frac{e^2 f^2}{c^4}\left\{\frac{2\beta}{(1-\beta^2)^3} + \frac{3+\beta}{4(1+\beta)^3}\right\}.$$

In diesem Falle ist also der Ausdruck von Abraham gewiß unrichtig, indem ein Zusatzglied derselben Ordnung sich als nötig herausstellt. Dasselbe ist aber relativ zum ersten nur von der Ordnung $(1-\beta)^3(3+\beta)/2\beta$, also bei Werten von β nahe gleich Eins unbedeutend, während sonst der Strahlungsdruck überhaupt zu vernachlässigen ist.

§ 21. *Schlußfolgerungen.* Obgleich unsere Ausführungen in ihrer vollen Ausdehnung der Übersichtlichkeit wegen auf die geradlinige Bewegung aus der Ruhe beschränkt wurden, so haben sie doch allgemeine Gültigkeit. So läßt sich beweisen, allerdings mittels viel komplizierteren Rechnungen, daß die Reihen (4) auch im Falle krummliniger Bewegungen die Abraham-Sommerfeldschen Ausdrücke ergeben, und wieder nur für völlig stetige Bewegungen gelten, also in anderen Fällen gewisser Zusatzpotentiale bedürfen, welche von einer stetigen fingierten Bewegung herrühren. Ebenso wie im § 16 folgt, daß diese Zusatzpotentiale zu der Kraft überhaupt nur Zusatzglieder liefern, wenn Überlichtgeschwindigkeit möglich ist; bleibt dabei an der Unstetigkeitsstelle die Geschwindigkeit stetig, wenn auch von Null verschieden, während die Beschleunigung, oder die Bahnkrümmung, wegen plötzlich einsetzender äußerer Kräfte unstetig wird, so bleibt zu späteren Zeiten der Impuls des Elektrons, also auch die longitudinale

und die transversale Masse, der Form nach unverändert und wird durch den Abraham-Sommerfeldschen Ausdruck nach wie vor gegeben; dagegen ist der Ausdruck für den Strahlungsdruck im allgemeinen ein anderer geworden. Schließen wir also, wie wir ja müssen, ganz plötzliche Geschwindigkeitsänderungen aus, so folgen die gewöhnlichen Ausdrücke der Massen allgemein streng aus der Lorentzschen Theorie, und zwar nicht nur für das starre kugelförmige Elektron, sondern mittels ganz ähnlicher Überlegungen, auch für die deformierbaren Elektronen von Lorentz und Bucherer.

Wir können unsere Schlußfolgerungen wie folgt zusammenfassen:

1. Die gewöhnlichen Ausdrücke für die Massen folgen ganz allgemein aus der Lorentzschen Theorie.

2. Der gewöhnliche Ausdruck für den Strahlungsdruck gilt, wenn Überlichtgeschwindigkeit ausgeschlossen ist.

3. Andernfalls verursacht jede plötzliche Änderung der Beschleunigung oder Bahnkrümmung, später eine Änderung des Strahlungsdruckes; derselbe ist nur vollständig berechenbar wenn die Vorgeschichte des Elektrons bekannt ist, eben weil er von den zu früheren Zeiten ausgesandten Wellen abhängt, und jede plötzliche Änderung ein Wellensystem hervorruft.

4. Unstetigkeiten höherer Ordnung, z. B. der Bahntorsion, verursachen weder Änderungen der Massen noch des Strahlungsdruckes, sondern lediglich Änderungen von Gliedern höherer Ordnung.

5. Diese Folgerungen gelten selbstverständlich nur, wenn das Elektron die Nachbarschaft der Unstetigkeitsstelle verlassen hat, z. B. wenn es einige Durchmesser weit aus seiner Ruhelage weggerückt ist.

Bonn, den 5. Dezember 1907.

(Eingegangen 7. Dezember 1907.)

5. *Das Verhältnis der Beleuchtung zum Leitungsvermögen des Selens;* *von G. Athanasiadis.*

Licht, Wärme[1]), die Röntgen- und Radiumstrahlen, einige Substanzen, wie kohlensaures Barium, Wasserstoffhyperoxyd und Terpentinöl[2]), als wie auch Alkohollösungen einiger vegetabilischen und animalischen Pigmente[3]) haben Einfluß auf das Leitungsvermögen des Selens, indem sie seinen Widerstand verringern.

Insbesondere ist die Wirkung des Lichtes von Pfund, Hopius, Hesehus und Korn untersucht und diesbezügliche Formeln aufgestellt worden, durch welche das Verhältnis des elektrischen Leitungsvermögens vom Selen zu der Beleuchtung gegeben wird. Hopius[4]) hat Selen einmal der Wirkung des Lichtes einer Nernstlampe und dann einer Amylacetatlampe ausgesetzt und findet, daß in beiden Fällen das Leitungsvermögen des Selens im Verhältnis zu der Kubikwurzel der Beleuchtung steht. Dies ließe sich etwa durch folgende Formel zum Ausdruck bringen:

$$\frac{1}{W} = a\sqrt[3]{i}, \tag{1}$$

W bedeutet dabei den elektrischen Widerstand, i die Beleuchtung und a die Proportionalitätskonstante. Hesehus[5]) stellt zwischen dem Leitungsvermögen m und der Beleuchtung i folgende Relation auf:

$$i = a(b^m - 1), \tag{2}$$

wobei wieder a und b Konstanten bedeuten.

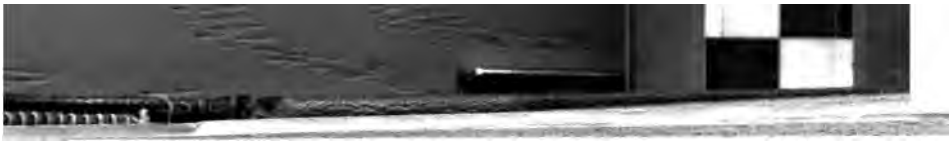
1) M. Coste, Compt. rend. **143.** p. 822. 1906.

2) E. Bloch, Compt. rend. **130.** p. 914. 1901 und E. van Aubel, Compt. rend. **136.** p. 929, 1189. 1903.

3) E. H. Griffiths, Compt. rend. **136.** p. 647.

4) E. A. Hopius, Journ. Soc. Phys. Chim. Russe **35.** p. 581. 1903.

5) N. A. Hesehus, Journ. Soc. Phys. Chim. Russe **35.** p. 661. 1903 und **37.** p. 221. 1905.



Zur Prüfung dieser Formeln haben wir eine Reihe von Versuchen ausgeführt, indem wir eine Selenzelle, deren Widerstand in der Finsternis zwischen 25000 und 40000 Ohm variierte, der Wirkung einer Lichtquelle ausgesetzt haben. Um die Messung des jeweiligen Widerstandes zu erleichtern, haben wir die Selenzelle in den Stromkreis einer mit Regulierwiderstand versehenen Batterie von acht Elementen eingeschaltet.

Zur Messung der jeweiligen Stromstärke schalten wir an einer Zweigleitung des bekannten Kastenwiderstandes ein empfindliches Galvanometer von rapider Dämpfung ein und bestimmen dann jedesmal aus der gemessenen Stärke und der bekannten elektromotorischen Kraft der Batterie den Widerstand der Selenzelle. Die Skalaeinteilung des Galvanometers geschieht, indem wir von vornherein die Ablenkungen bestimmen, welche bekannten Werten der Stromstärke entsprechen.

Diese Methode der Messung gibt uns leicht und rasch die Widerstandsänderung der Selenzelle. Die Beleuchtung der Selenzelle geschah durch eine 16-kerzige elektrische Lampe, deren Stärke mittels eines Rheostates konstant erhalten wurde. Das Licht fiel normal auf die Selenzelle. Die Änderung der Beleuchtung bewerkstelligten wir durch Änderung des Abstandes der Lichtquelle von der Selenzelle im Betrage von 10—150 cm, endlich haben wir als Einheit der Beleuchtung diejenige einer 16-kerzigen elektrischen Lampe im Abstande von 1 m zugrunde gelegt. Infolge der Trägheit der Widerstandsänderung des Selens, bei der Änderung der Beleuchtung, müssen wir zwischen den aufeinanderfolgenden einzelnen Beobachtungen geräumige Zeit vergehen lassen, um die permanente neue Größe des Widerstandes zu messen, manchmal 30 bis 40 Min. und mehr. Dies sollen wir tun, insbesondere wenn wir große, plötzliche Änderungen der Beleuchtung eintreten lassen. Zur Bestimmung einander folgender Werte haben wir die Selenzelle bald einer starken, durch Entfernen der Lichtquelle allmählich bis auf 0 abnehmenden, bald umgekehrt einer wachsenden Beleuchtung ausgesetzt. Vor jedem Versuch blieb die Selenzelle 50—60 Stunden in der Dunkelheit.

Die folgende Tabelle zeigt die zugehörigen Lichtquellen-

abstände d von der Selenzelle, die Abweichungen a des Galvanometers, die Beleuchtung i und die Selenwiderstände W. Die elektromotorische Kraft der Batterie war 18,5 Volt.

d	a	i	W
	60	0	29490
100 cm	129	1	18727
80	150	1,53	11991
60	176	2,78	10300
50	193	4	9280
40	218	6,25	8111
30	264	11,11	6715
20	364	25	4867
10	594	100	2686

Die Kurve I (Fig. 1) zeigt Werte von i und W bei den Messungen durch Verminderung der Beleuchtung. Die Selenzelle hatte im Dunkeln einen Widerstand von 29490 Ohm. Die Kurve II bezieht sich auf eine Selenzelle, welche am An-

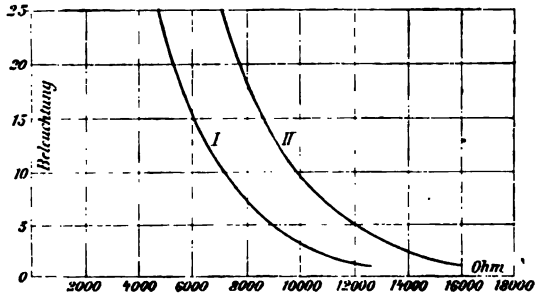


Fig. 1.

fang einen Widerstand von 30740 Ohm hatte. Der Widerstand dieser Zelle fiel zum Schlusse auf 3984 Ohm ab. Wir haben die Messungen jedesmal auch durch die Wheatstonesche Brücke kontrolliert.

Bei kleinen Entfernungen haben wir zwischen der Selenzelle und der Lichtquelle ein mit Wasser gefülltes Glasgefäß gestellt, dessen Absorptionskoeffizient bekannt war, um den Einfluß der Wärme zu beseitigen.

Wenn wir nun die Formeln (1) und (2) auf die Kurven der Fig. 1 anwenden wollen, so merken wir, daß keine von beiden Werte liefert, welche bei den oben erwähnten Abstands- und Beleuchtungsgrenzen sich genügend den Resultaten unserer Versuche nähern. Die Formel von Hopius stimmt für nahe aneinanderliegende Widerstandsgrößen W mit unseren Ergebnissen ziemlich überein, im allgemeinen aber für etwas auseinanderliegende Werte von W gibt diese Formel im Vergleich zu den Kurven I und II große Unterschiede. Die Abweichungen liegen zwischen 5 Proz. und 40 Proz. Daraus schließen wir, daß beide obige Formeln *das Gesetz der Abhängigkeit des Selenwiderstandes und der Beleuchtung nicht zum Ausdruck bringen*, wenigstens für die oben erwähnten Abstands- und Beleuchtungsgrenzen.

Die genaue Untersuchung unserer Kurven brachte uns für die vorgenannten Grenzen zu folgender Formel

$$i = k(k - a)b.$$

k bedeutet das Leitungsvermögen des Selens, i die Beleuchtung, a und b Konstanten. Die Größe $k = (1/W)10^5$.

Diese Formel paßt mit genügender Genauigkeit zu unseren Kurven für sehr weit voneinander abstehenden Grenzen (für Beleuchtung von 1 bis 100). Die Unterschiede belaufen sich bei der Kurve I bis auf 3 Proz., bei der Kurve II bis auf 6 Proz. In folgenden Vergleichstabellen sind diese Werte zusammengestellt.

Tabelle I.

Kurve I. $a = 6{,}47$. $b = 0{,}087$.

W	i		Unterschiede in Proz.
	beobachtet	berechnet	
2686 Ω	100	99,61	−0,39
4870	25	25,126	+0,50
5800	20	20,35	+1,75
5800	16	16	
7000	10	9,7	−3
7500	8	8,04	+0,50
8700	5	5,04	+0,80
10050	3	3,05	+1,50
12600	1	0,994	−0,60

Tabelle II.

Kurve II. $a = 5{,}2$. $b = 0{,}201$.

W	i		Unterschiede in Proz.
	beobachtet	berechnet	
3984 52	100	100,39	+0,39
7000	25	26,06	+4,24
7800	20	19,64	−1,80
8540	16	15,32	−4,25
9300	12	11,99	−0,08
9820	10	10,18	+1,80
11960	5	5,28	+5,60
13750	3	3,027	+0,90
16750	1	0,964	−3,60

Aus diesen Tabellen ersehen wir, daß die mittlere Abweichung der durch unsere Formel berechneten Werte für Beleuchtung von 1 bis 100 von der Kurve I kaum 1 Proz., von der Kurve II $2^1/_2$ Proz. beträgt, eine Annäherung, welche man als genügend genau betrachten darf.

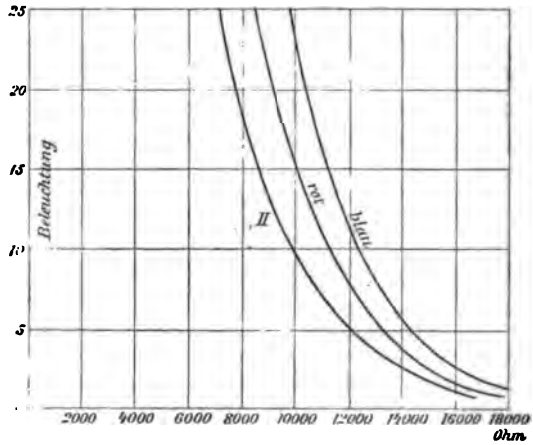


Fig. 2.

Durch die Kurven der Fig. 2 wird die Wirkung des roten und des blauen Lichtes auf eine Selenzelle veranschaulicht, deren Anfangswiderstand im Dunkeln ungefähr 35600 Ohm war. Zwischen der Lichtquelle und der Selenzelle haben wir

eine rote Glasscheibe (Fresnels Rot), dann eine blaue und darauf Scheiben von verschiedenen, mehr oder weniger einfachen Farben aufgestellt. Die Beleuchtungseinheiten, auf welche wir die Kurven der Fig. 2 beziehen, sind verschieden voneinander.

Aus diesen Kurven ist ersichtlich, daß unsere Formel nicht nur auf das weiße Licht, sondern im allgemeinen auch auf alle Farben anwendbar sei; jede Farbe hat nur ihre eigenen Konstanten a und b.

Von Bedeutung für die Form der Kurven, folglich auch für die numerischen Werte der Konstanten a und b, ist die ursprüngliche Größe des Selenwiderstandes im Dunkeln. Diese Größe aber ist abhängig von der Temperatur, von der Zeitdauer der Lichtwirkung und von der Wirkung etwaiger starker Stöße. Ein Widerstand, beispielsweise von 39750 Ohm, fiel durch eine Stoßwirkung auf 30490 Ohm ab.

Die Kurven der Fig. 2 zeigen uns weiter, daß Selen gegen rotes Licht am empfindlichsten sei. Pfund[1]) hat festgestellt, daß die größte Empfindlichkeit sich bei einer Wellenlänge von 0,7 μ ergibt.

Trägheit des Selens. Durch dasselbe Verfahren haben wir die aufeinanderfolgenden Widerstandswerte des Selens be-

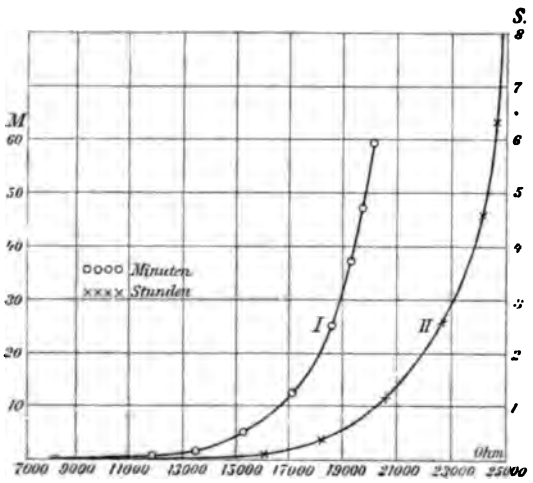


Fig. 8.

1) A. Pfund, Phil. Mag. p. 26. 1904.

stimmt in dem Falle, wo dasselbe lange Zeit hindurch einer Lichtwirkung ausgesetzt, dann plötzlich ins Dunkle gebracht und dort gelassen wurde, bis es denselben Widerstandswert wieder erreichte, welchen es ursprünglich im Dunkeln besaß.

Die Kurven I und II der Fig. 3 zeigen die Ergebnisse unserer Beobachtungen.

Die Kurve I stellt die Änderung des Widerstandes während der Dauer von 60 Min. vom Augenblicke der Einführung des Selens ins Dunkle dar, die Kurve II die Änderung während der Dauer von 8 Stunden. Der Widerstand nimmt am Anfang sehr rasch zu, dann wird das Wachsen allmählicher. Die Selenzelle erreicht ihren ursprünglichen Widerstandswert nach Verlauf von 50—60 Stunden, je nachdem die Zeit der Aussetzung des Selens ans Licht eine kürzere oder längere ist.[1])

1) M. Coste, Compt. rend. 143. p. 822. 1906.

(Eingegangen 5. Dezember 1907.)

6. *Diffraktion und Reflexion, abgeleitet aus den Maxwellschen Gleichungen; von W. v. Ignatowsky.*

(Fortsetzung.)

§ 8. Diskussion der in § 3 gemachten Annahmen. [1])

Wir wollen zuerst die zweite Annahme näher diskutieren.

Analog, wie beim Huyghensschen Prinzip, kann man die Integrale (1) § 1, (9) und (10) § 3 so auffassen, als ob jedes Flächenelement der reflektierenden Fläche mit gewisser Intensität leuchte. Da wir aber praktisch kein Leuchten der beschatteten Teile der reflektierenden Körper bemerken, so schließen wir rückwärts, daß wir diejenigen Teile der obigen Integrale, welche sich auf die schattenseitigen Teile der reflektierenden Körper beziehen, vernachlässigen können gegenüber den lichtseitigen Teilen der Integrale und kommen so zur Annahme 2. Diese Annahme ist, genau wie die erste Annahme, nur so lange berechtigt, als die Dimensionen und Krümmungsradien der Körper groß im Verhältnis zur Wellenlänge sind.

Tatsächlich können die elektrischen und magnetischen Kräfte auf den beschatteten Teilen der Körper nicht *zugleich* Null sein, denn das widerspräche direkt den Maxwellschen Gleichungen. Hierauf machte mich Prof. A. Sommerfeld aufmerksam. Denn beide Kräfte genügen der Gleichung

$$(1) \qquad \nabla^2 u + p^2 u = 0$$

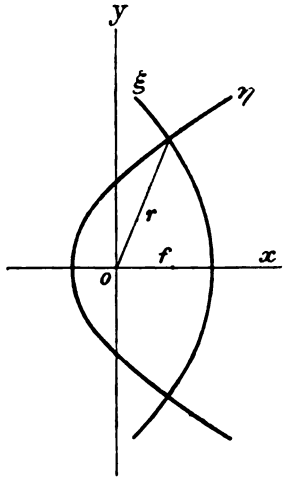
und die tangentiale Komponente an der Oberfläche der Körper der einen von ihnen ist, bei den Annahmen des § 2, stets proportional zu der Derivierten $\partial/\partial n$ der anderen. Deshalb können auf keinem endlichen Teile der Oberfläche der Körper beide

1) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. **23.** p. 875. 1907.

Kräfte verschwinden, weil aus der Theorie[1]) der Gleichung (1) folgt, daß, sobald u und $\partial u/\partial n$ längst einem endlichen Teil der Oberfläche *zugleich* verschwinden, u überall Null sein muß.

Dessenungeachtet können beide Kräfte auf den schattenseitigen Teilen so klein sein, daß die Annahme 2 erlaubt erscheint. Deshalb ist diese Annahme praktisch gerechtfertigt, um so mehr, als die genaue Lösung der Beugung an einer Halbebene von Prof. A. Sommerfeld[2]) uns dieselbe bestätigt.

Wir kommen später wieder darauf zurück und wollen uns jetzt zur ersten Annahme wenden.



Diese Annahme ist auch eine Annäherung und inwieweit dieselbe gerechtfertigt ist, läßt sich am besten an einigen Beispielen zeigen. Zu dem Zwecke wollen wir die Reflexion an einem absolut reflektierenden parabolischen Zylinder näher untersuchen.[3])

Da der Schnitt des Zylinders mit der YX-Ebene eine Parabel ergibt, so ist es für das Folgende bequemer, die sogenannten parabolischen Koordinaten ξ und η einzuführen.

Der Koordinatenanfang liege im gemeinsamen Brennpunkte 0 der konfokalen Parabeln und die X-Achse falle mit der Achse der Parabeln zusammen.

Wir haben dann:

$$(2) \qquad \begin{cases} y = 2\xi\eta, \\ x = \xi^2 - \eta^2. \end{cases}$$

1) F. Pockels, Über die partielle Differentialgl. $\Delta u + k^2 u = 0$. Leipzig, B. G. Teubner 1891. p. 213.

2) A. Sommerfeld, Mathematische Theorie der Diffraktion. Math. Ann. 47. p. 318. 1896; auch P. Drude, Lehrbuch der Optik. Leipzig, Hirzel, 2. Aufl. 1906. p. 190.

3) H. Lamb, „On Sommerfeld's Diffraction Problem etc." Proc. Math. Soc. 4. p. 190. 1906.

Und für ein Linienelement dl, nach einer beliebigen Richtung, erhalten wir:

$$dl^2 = 4M^2(d\xi^2 + d\eta^2), \tag{3}$$

wo

$$M^2 = \xi^2 + \eta^2 = \sqrt{y^2 + x^2} = r \tag{4}$$

ist.

Auf der ξ-Parabel ist ξ konstant und auf der η-Parabel ist η konstant. Als Begrenzung unseres Spiegels nehmen wir eine ξ-Parabel an und es folgt daher, daß die Bedingungen

$$\begin{cases} \xi \geqq \xi_0 > 0, \\ \eta \lessgtr 0 \end{cases} \tag{5}$$

stets erfüllt sein müssen. Hierbei entspricht ξ_0 der Oberfläche des Spiegels. Die entsprechenden Brennweiten f und f_1 berechnen sich aus

$$f = \xi^2; \quad f_1 = \eta^2. \tag{6}$$

Als einfallende Welle nehmen wir eine ebene linear polarisierte Welle an, wobei wir wieder zwei Fälle zu unterscheiden haben:

Erster Fall. Die elektrische Kraft der einfallenden Welle ist parallel zur Z-Achse und

Zweiter Fall. Die elektrische Kraft ist senkrecht zur Z-Achse.

Bezeichnen wir durch Z, φ, ϱ und ζ, Φ, P die Komponenten der elektrischen, bzw. magnetischen Kraft längs der Z-Achse, der ξ- und η-Parabeln, so erhalten wir aus den Maxwellschen Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{H}, \\ -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{E} \end{cases} \tag{7}$$

und (3) für den ersten Fall:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{1}{2M^2}\left(\frac{\partial \varphi M}{\partial \xi} - \frac{\partial \varrho M}{\partial \eta}\right), \\ \frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{1}{2M}\frac{\partial Z}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2M}\frac{\partial Z}{\partial \xi} \end{cases} \tag{8}$$

und für den zweiten Fall:

$$(9)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial \zeta}{\partial t} = \dfrac{1}{2M^2}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi}\dfrac{M}{} - \dfrac{\partial P}{\partial \eta}\dfrac{M}{}\right), \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial P}{\partial t} = \dfrac{1}{2M}\dfrac{\partial \zeta}{\partial \eta}, \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = -\dfrac{1}{2M}\dfrac{\partial \zeta}{\partial \xi}. \end{cases}$$

Wir führen jetzt andere Koordinaten ein

$$(10)\qquad \sqrt{p}\,.\,\xi = v; \quad \sqrt{p}\,.\,\eta = w,$$

wo p wie früher ω/c bedeutet. Aus (8) und auch aus (9) erhalten wir dann, falls wir den Faktor $e^{i\omega t}$ weglassen:

$$(11)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} + 4(v^2 + w^2) = 0.$$

Wo für u für den ersten Fall Z eingesetzt werden muß und bei dem zweiten Fall ζ.

Als einfallende Welle nehmen wir an für den ersten Fall

$$(12)\qquad \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{k}\,.\,Z_1 = \mathfrak{k}\,.\,A\,e^{i(\omega t + px)}$$

und für den zweiten Fall:

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_1 = -\,\mathfrak{j}\,.\,A\,e^{i(\omega t + px)} \\ \text{und} \\ \zeta_1 = \dfrac{Ap}{\omega}\,e^{i(\omega t + px)}. \end{cases}$$

Bei Berücksichtigung von (12) und (13) wird das Integral von (11) dargestellt durch

$$(14)\qquad u = C\,.\,e^{ipx}\left(1 + D\int_{\frac{2}{\sqrt{\pi}}v}^{\infty} e^{-\frac{i\pi m^2}{2}}\,dm\right).$$

Aus der Bedingung, daß die tangentiale Komponente der gesamten elektrischen Kraft für $\xi = \xi_0$ verschwindet, bestimmt sich D für den ersten Fall aus

$$(15)\qquad 1 + D_1\int_{\frac{2}{\sqrt{\pi}}v_0}^{\infty} e^{-\frac{i\pi m^2}{2}}\,dm = 0$$

und

$$(16)\qquad C = C_1 = A.$$

Und für den zweiten Fall ($D = D_2$):

$$2i\sqrt{p}\,.\,v_0\left(1-\frac{D_2}{D_1}\right)-D_2\,e^{-2iv_0^2}\,2\sqrt{\frac{p}{\pi}}=0 \tag{17}$$

und

$$C=C_2=\frac{Ap}{\omega}. \tag{18}$$

Für große m_1 kann man setzen:

$$\int_{m_1}^{\infty} e^{-\frac{i\pi}{2}m^2}dm=-\frac{ie^{-\frac{i\pi}{2}m_1^2}}{\pi m_1}\left(1+\frac{i}{\pi m_1^2}\right). \tag{19}$$

In unserem Falle ist

$$\frac{1}{\pi m_1^2}=\frac{1}{4v_0^2}=\frac{1}{4\xi_0^2 p}=\frac{\lambda}{8\pi f_0}. \tag{20}$$

Wo f_0 die Brennweite des reflektierenden Parabolspiegels bedeutet. Ist f_0 groß im Verhältnis zur Wellenlänge λ, so können wir das zweite Glied in der Klammer in (19) vernachlässigen und erhalten dann aus (15) und (17)

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{D_1}=\dfrac{ie^{-2iv_0^2}}{2v_0\sqrt{\pi}}\\ \text{und}\\ D_2=-D_1.\end{array}\right. \tag{21}$$

Da $f>f_0$ ist, so können wir entsprechend (19) und (21) setzen:

$$\int_{\frac{2}{\sqrt{\pi}}v}^{\infty} e^{-\frac{i\pi m^2}{2}}dm=-\frac{ie^{-2iv^2}}{2v\sqrt{\pi}}. \tag{22}$$

Aus (14), (16), (21) und (22) folgt für die reflektierte elektrische Kraft im ersten Falle:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{E}_2=-\mathfrak{k}\cdot\dfrac{Av_0}{v}\cdot e^{i(\omega t+px-2v^2+2v_0^2)}\\ \quad=-\dfrac{\mathfrak{k}\,.\,A\xi_0}{\xi}\cdot e^{2iv_0^2}\cdot e^{i(\omega t-pr)}.\end{array}\right. \tag{23}$$

Für $\xi=\xi_0$ ist $\mathfrak{E}_1+\mathfrak{E}_2=0$, wie es die Grenzbedingung fordert.

Für denselben Fall wird die tangentiale Komponente der magnetischen Kraft an der Oberfläche des Spiegels laut (8) sein:

$$\varphi_0 = -\frac{A\sqrt{p}\,D_1}{i\omega M_0\sqrt{\pi}}\, e^{i\omega t}\, e^{i(p x_0 - 2 v_0^2)}, \tag{24}$$

oder laut (21)

$$\varphi_0 = \frac{2 A p \xi_0}{M_0}\, e^{i(\omega t + p x_0)}. \tag{25}$$

Für die ensprechende Komponente der einfallenden Welle allein erhalten wir

$$\varphi_{10} = \frac{A p \xi}{M_0}\, e^{i(\omega t + p x_0)}, \tag{26}$$

woraus folgt

$$\varphi_0 = 2\,\varphi_{10}. \tag{28}$$

Für den zweiten Fall ist die gesamte magnetische Kraft an der Oberfläche des Spiegels infolge (21)

$$\zeta_0 = \frac{2 A p}{\omega}\, e^{i(\omega t + p x_0)}, \tag{29}$$

d. h.

$$\zeta_0 = 2\,\zeta_{10}, \tag{30}$$

wo ζ_{10} sich auf die einfallende Welle bezieht.

Für die normale Komponente der elektrischen Kraft an der Oberfläche des Spiegels haben wir:

$$\mathsf{P}_0 = -\frac{2 c^2 p^2 A \eta}{M_0 \omega^2}\, e^{i(\omega t + p x_0)}, \tag{31}$$

woraus folgt

$$\mathsf{P}_0 = 2\,\mathsf{P}_{10}, \tag{32}$$

falls P_{10} die entsprechende Komponente der einfallenden Welle bedeutet.

Wir nehmen jetzt als einfallende Welle

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{k} A e^{i(\omega t + p y)} \tag{33}$$

und setzen $\xi_0 = 0$, d. h. untersuchen die Beugung an einer Halbebene. Die Sommerfeldsche Lösung gibt uns für diesen Fall:

$$\mathfrak{E} = \frac{A(1+i)}{2}\, e^{i\omega t}\left\{ e^{ipy}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{(w+v)} e^{-\frac{i\pi v^2}{2}}\, dv - e^{-ipy}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{(w-v)} e^{-\frac{i\pi v^2}{2}}\, dv \right\}. \tag{34}$$

Für die tangentiale magnetische Kraft der einfallenden Welle für $\xi_0 = y = 0$ haben wir

$$\varphi_{10} = \frac{A\,p\,\eta}{M_0\,\omega}\,e^{i\omega t}. \tag{35}$$

Für die gesamte magnetische Kraft auf der Oberfläche der Ebene erhalten wir

$$\varphi_0 = \frac{A(1+i)}{i\,2\,M_0\,\omega}\,e^{i\omega t}\left\{2\,i\,p\,\eta\int_{-\infty}^{w\sqrt{\frac{2}{\pi}}} e^{-\frac{i\pi v^2}{2}}\,dv + e^{-iw^2}\sqrt{\frac{2\,p}{\pi}}\right\}. \tag{36}$$

Da für die Lichtseite der Ebene η, bzw. w positiv, und für die Schattenseite negativ sind, so erhalten wir analog (19) und (20) für die Schattenseite:

$$\varphi_0 = 0 \tag{37}$$

und für die Lichtseite unter Berücksichtigung von (35)

$$\varphi_0 = 2\,\varphi_{10}, \tag{38}$$

wobei (37) und (38) so lange gilt, als

$$\frac{1}{w^2\,2} = \frac{1}{p\,\eta^2\,2} = \frac{\lambda}{4\,\pi\,r} \tag{39}$$

klein ist. Hierbei bedeutet r die Entfernung längs der Ebene von der Kante aus gerechnet.

Für $r = 10^{-3}$ cm, $\lambda = 6.10^{-5}$ cm ist

$$\frac{\lambda}{4\,\pi\,r} = 4{,}7\,.\,10^{-3}.$$

Wir sehen, daß (37) uns an einem Beispiel die Annahme 2 bestätigt. Die erste Annahme wird durch (28), 30) und auch durch (38) bestätigt. Außerdem zeigt uns (32), daß wir diese Annahme in dem Sinne erweitern können, daß wir nicht nur die Gleichung (3), § 3, sondern auch (4), § 3, als erfüllt betrachten können. In diesem erweiterten Sinne wollen wir diese Annahme im folgenden stets verstehen.

§ 9. Diffraktion an einem Drahte im Falle die elektrische Kraft senkrecht zur Drahtachse liegt.

Wir nehmen als einfallende Welle, laut (4) § 4 A. und analog § 4, an

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_1 = -\,V\mathfrak{r}_{10}\mathfrak{k}\,.\,B e^{i\left(\omega t + ps - \frac{\pi}{4}\right)} Q_1(p r_1) \\ \mathfrak{H} = \mathfrak{k}\,.\,\frac{Bp}{i\omega} e^{i\left(\omega t + ps - \frac{\pi}{4}\right)} Q_0(p r_1) \end{cases}$$

oder angenähert analog (2) § 4:

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_1 = V\mathfrak{r}_{10}\mathfrak{k}\,.\,\frac{B}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{r_1}}\,.\,e^{i\omega t}\,e^{-ip(r_1 - s)} \\ \mathfrak{H} = \mathfrak{k}\,.\,\frac{Bp}{2\omega}\sqrt{\frac{\lambda}{r_1}}\,.\,e^{i\omega t}\,e^{-ip(r_1 - s)} \end{cases}$$

Laut der erweiterten Annahme 1 erhalten wir für die Oberfläche des Drahtes

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathfrak{n}_0 \mathfrak{E}' = B\sqrt{\frac{\lambda}{r_1}}\sin\varphi\,.\,e^{-ip(r_1 - s)} \\ \text{und} \\ \mathfrak{H}' = \frac{Bp}{\omega}\sqrt{\frac{\lambda}{r_1}}\,e^{-ip(r_1 - s)}, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{n}_0$, wie früher den Einheitsvektor längst der inneren Normale des Drahtes bedeutet. Setzen wir jetzt (3) in (10) § 2 ein und berücksichtigen die zweite Annahme, so erhalten wir:

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_m = V\mathfrak{r}_{10}\mathfrak{k}\,.\,\frac{B}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{r_1}}\,e^{i\omega t}\,.\,e^{-ip(r_1 - s)} \\ \qquad + \frac{Be^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)}\mathfrak{g}}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\mathfrak{r}_0\,.\,\sin\varphi\,e^{-ip(r_1 + r - s)}}{\sqrt{r r_1}}\,d\varphi \\ \qquad + \frac{B\mathfrak{g}e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)}}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\mathfrak{s}_0 e^{-ip(r_1 + r - s)}}{\sqrt{r r_1}}\,d\varphi \\ \mathfrak{H}_z = \mathfrak{k}\,.\,\frac{Bp}{\omega}\sqrt{\frac{\lambda}{r_1}}\,e^{i\omega t}\,.\,e^{-ip(r_1 - s)} \\ \qquad - \frac{Bp\mathfrak{g}e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)}}{2\omega}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{V\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{s}_0\,.\,e^{-ip(r_1 + r - s)}}{\sqrt{r r_1}}\,d\varphi, \end{cases}$$

wobei $\mathfrak{r}_0$ statt $\mathfrak{R}_0$ gesetzt ist.

Wir haben aber

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathfrak{s}_0 = -\,\mathfrak{i}\sin\varphi + \mathfrak{j}\cos\varphi\,, \\ V\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{s}_0 = -\sin\varphi\, V\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{i} + \cos\varphi\, V\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{j}\,. \end{cases}$$

Bezeichnen wir wieder durch R die Entfernung vom Aufpunkt bis zur Drahtachse und durch $\mathfrak{R}_0$ den entsprechenden Einheitsvektor, so können wir, bei großem R im Vergleich zu g, analog wie bei der Ableitung von (6) § 4, setzen

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{r}_0 = \mathfrak{R}_0 \\ \sqrt{r r_1} = \sqrt{R s} \\ V\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{s}_0 = -\sin\varphi\, V\mathfrak{R}_0\,\mathfrak{i} + \cos\varphi\, V\mathfrak{R}_0\,\mathfrak{j}\,. \end{cases}$$

Dies in (4) eingesetzt, erhalten wir:

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_m = V\mathfrak{r}_{10}\,\mathfrak{k}\cdot\dfrac{B}{2}\sqrt{\dfrac{\lambda}{r_1}}\,e^{i\omega t}\cdot e^{-ip(r_1-s)} \\ \qquad + \mathfrak{j}\,\dfrac{B e^{i\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)}}{2\sqrt{Rs}}\,D + \dfrac{(\mathfrak{R}_0 - \mathfrak{i})\,B e^{i\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)}}{2\sqrt{Rs}}\,D_1\,, \\ \mathfrak{H}_s = \mathfrak{k}\cdot\dfrac{Bp}{\omega}\sqrt{\dfrac{\lambda}{r_1}}\,e^{i\omega t}e^{-ip(r_1-s)} \\ \qquad - V\mathfrak{R}_0\,\mathfrak{j}\cdot\dfrac{Bp}{2\omega\sqrt{Rs}}\,D + V\mathfrak{R}_0\,\mathfrak{i}\cdot\dfrac{Bp}{2\omega\sqrt{Rs}}\,D_1\,, \end{cases}$$

wo

$$(8)\qquad \begin{cases} D = g\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-ip(r_1+r-s)}\cos\varphi\, d\varphi \\ \text{und} \\ D_1 = g\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-ip(r_1+r-s)}\sin\varphi\, d\varphi \end{cases}$$

bedeuten.

Wir wollen jetzt wieder die Erscheinung hinter dem Draht beobachten, und zwar für kleine Winkel s.

Dann können wir schreiben:

$$D = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2\lambda R s}{r_1}}\, e^{-i(pR-\eta)}(M - iN),$$

wo l, M und N dieselbe Bedeutung haben wie in § 4.

Setzen wir diesen Ausdruck für D in (7) ein und vernachlässigen, wegen Kleinheit von s, diejenigen Glieder in (7), welche mit $(\Re_0 - i)$ und $\sqrt{\Re_0}\,i$ multipliziert sind, so erhalten wir endgültig:

$$(9)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_m = -\mathfrak{j}\cdot A' e^{i\omega t}\left\{e^{-ip(r_1-s)} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{i\eta}(M - iN)\right\} \\ \mathfrak{H}_s = \mathfrak{k}\cdot \dfrac{A'}{c} e^{i\omega t}\left\{e^{-ip(r_1-s)} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{i\eta}(M - iN)\right\}, \end{cases}$$

wo

$$A' = \frac{B}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{r_1}}$$

und

$$\eta = \frac{\pi}{4} - pR + l^2$$

bedeuten. In (8) ist außerdem bei der Ableitung von (9) statt $\sqrt{\mathfrak{r}_0}\,\mathfrak{k}$, $-\mathfrak{j}$ und statt $\sqrt{\Re_0}\,\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ gesetzt.

Aus dem Poyntingschen Satz erhalten wir demnach für den Mittelwert des Energiestromes $\mathfrak{E}$:

$$(10)\qquad \mathfrak{E} = -\frac{i\cdot A'^2}{8\pi c}\left\{1 + \frac{M^2 + N^2}{2} - (M + N)\right\},$$

d. h. denselben Ausdruck wie (6) § 5.

Wir sehen also, daß bei kleinen Winkeln s kleine Polarisation zu beobachten sein wird und daß demnach die Diffraktionserscheinungen in diesem Fall nicht von dem Polarisationswinkel der einfallenden Welle abhängen.

§ 10. Ableitung des allgemeinen Integrals.

Zum Schluß wollen wir, in möglichst kurzer Weise, die Ableitung des Integrals (1) § 1 angeben und zugleich die allgemeinste Form desselben hinschreiben.

Bekanntlich kann man jeden Vektor $\mathfrak{B}$, welcher zusammen mit seinen ersten und zweiten Derivierten nach den Koordi-

naten endlich und stetig ist im Raume K, welcher durch die Oberfläche S begrenzt ist, folgendermaßen darstellen:

$$\mathfrak{B} = \nabla q + \operatorname{curl} \mathfrak{A}, \tag{1}$$

wo

$$q = -\frac{1}{4\pi}\int_K \frac{\operatorname{div}\mathfrak{B}}{r}\,d\varkappa + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\mathfrak{n}_0\mathfrak{B}}{r}\,dS, \tag{2}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi}\int_K \frac{\operatorname{curl}\mathfrak{B}}{r}\,d\varkappa + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{V\mathfrak{B}\,\mathfrak{n}_0}{r}\,dS, \tag{3}$$

bedeuten und $\mathfrak{n}_0$ wieder die äußere Normale ist, vorausgesetzt, daß der Aufpunkt sich im Raume K befindet.

Andererseits kann man einen beliebigen Skalar v, der wieder zusammen mit seinen Derivierten nach den Koordinaten endlich und stetig ist, im Raume K darstellen durch

$$v = -\frac{1}{4\pi}\int_K \frac{\nabla^2 v}{r}\,d\varkappa + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\mathfrak{n}_0\nabla v}{r}\,dS + \int_S \frac{v\cdot\mathfrak{n}_0\mathfrak{r}_0}{r^2}\,dS, \tag{4}$$

wo $\mathfrak{r}_0$ den Einheitsvektor längs r, vom Aufpunkt aus, bedeutet.

Wir haben außerdem

$$\mathfrak{B} = B_1\,\mathfrak{i} + B_2\,\mathfrak{j} + B_3\,\mathfrak{k}. \tag{5}$$

B_1, B_2 und B_3 bedeuten die Komponenten von $\mathfrak{B}$ auf die Koordinatenachsen.

Man kann beweisen, daß

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\mathfrak{n}_0\nabla B_1\cdot\mathfrak{i} + \mathfrak{n}_0\nabla B_2\cdot\mathfrak{j} + \mathfrak{n}_0\nabla B_3\cdot\mathfrak{k}}{r} = \nabla\left(\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{n}_0}{r}\right)\\ &\qquad - \mathfrak{B}\mathfrak{n}_0\cdot\nabla\frac{1}{r} - \frac{V\mathfrak{n}_0\operatorname{curl}\mathfrak{B}}{r}\end{aligned}\right. \tag{6}$$

ist, wobei der Operator ∇ im Ausdruck $\nabla(\mathfrak{B}\mathfrak{n}_0/r)$ sich nicht auf $\mathfrak{n}_0$ bezieht.

Setzt man jetzt in (4) statt v sukzessive B_1, B_2, B_3 und bildet $\mathfrak{B}$ nach (5), wobei man (6) berücksichtigt, und vergleicht den so erhaltenen Ausdruck für $\mathfrak{B}$ mit (1) so erhält man:

$$\int_S \mathfrak{n}_0\cdot\frac{\operatorname{div}\mathfrak{B}}{r}\,dS - \int_S \nabla\left(\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{n}_0}{r}\right)dS + \int_S \mathfrak{n}_0\cdot\mathfrak{B}\,\nabla\frac{1}{r}\,dS = 0. \tag{7}$$

Dieser Ausdruck (7) ist für uns nötig, um die Ableitung des Integrales (1) § 1 zu zeigen.

Die Maxwellschen Gleichungen lauten:

$$(8)\qquad \begin{cases} 4\pi\sigma\mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{curl}\mathfrak{H}, \\ -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{curl}\mathfrak{E}. \end{cases}$$

(Die Bedeutung der entsprechenden Größen vgl. in § 1.)

Da $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$ ist, folgt aus (8)

$$(9)\qquad 4\pi\sigma\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = \nabla^2\mathfrak{E}.$$

Und für die Komponente z. B. nach der X-Achse

$$(9a)\qquad 4\pi\sigma\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \nabla^2 E_x.$$

Wir setzen

$$(10)\qquad E_x = v_1 = f(x, y, z, t).$$

In (10) setzen wir statt t, $t + br$, wo b eine Konstante im ganzen Raume K ist in bezug auf die Koordinaten und Zeit.

Wir haben demnach

$$(11)\qquad v_1' = f(x, y, z, \tau)$$

und

$$\tau = t + br,$$

Für $r = 0$, also für den Aufpunkt, ist

$$(12)\qquad v_1 = v_1'.$$

Da

$$\mathfrak{n}_0 \nabla v = \frac{dv}{dn}$$

und

$$\frac{\mathfrak{n}_0 \mathfrak{r}_0}{r^2} = -\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$$

ist, so erhalten wir aus (4), falls wir dort statt v_1 v_1' setzen, unter Berücksichtigung von (12)

$$(13)\quad 4\pi v_1' = 4\pi v_1 = -\int_K \frac{\nabla^2 v_1'}{r}\,d\varkappa + \int_S \frac{1}{r}\frac{dv_1'}{dn}\,dS - \int_S v_1'\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,dS.$$

Wir wollen jetzt einen neuen Operator einführen: ∇_1, der angewendet auf v_1' dasselbe leistet wie ∇, angewendet auf v, d. h.

$$(\nabla\, v_1)_{t=t+b\,r} = \nabla_1\, v_1'.$$

Mit anderen Worten, um $\nabla_1 v_1'$ zu bestimmen, berechnen wir erst ∇v_1 und setzen dann statt t, $t + b\,r = \tau$. Für $b = 0$ ist $\nabla = \nabla_1$.

Wir haben außerdem

$$\frac{\partial v_1'}{\partial r} = b\frac{\partial v_1'}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial^2 v_1'}{\partial r^2} = b^2\frac{\partial^2 v_1'}{\partial \tau^2}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial v_1'}{\partial \tau} = \frac{\partial v_1'}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 v_1'}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 v_1'}{\partial t^2}. \tag{15}$$

Wir erhalten deshalb

$$\nabla^2 v_1' = \nabla_1^2 v_1' + b^2\frac{\partial^2 v_1'}{\partial \tau^2} + b\frac{\partial v_1'}{\partial \tau}\cdot\nabla^2 r + 2\,b\,\nabla_1\frac{\partial v_1'}{\partial \tau}\nabla r. \tag{16}$$

Es ist aber

$$\nabla\frac{\partial v_1'}{\partial \tau} = \nabla_1\frac{\partial v_1'}{\partial \tau} + b\frac{\partial^2 v_1'}{\partial \tau^2}\nabla r$$

und deshalb

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{div}\left(\frac{\partial v_1'}{\partial \tau}\cdot\nabla \lg r\right) &= \frac{\partial v_1'}{\partial \tau}\nabla^2 \lg r + \nabla\frac{\partial v_1'}{\partial \tau}\nabla \lg r \\ &= \frac{\partial v_1'}{\partial \tau}\cdot\nabla^2 \lg r + \nabla_1\frac{\partial v_1'}{\partial \tau}\nabla \lg r \\ &\quad + b\frac{\partial^2 v_1'}{\partial \tau^2}\nabla r\,\nabla \lg r. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Berücksichtigen wir, daß

$$\left\{\begin{aligned} &\nabla r\,\nabla \lg r = \frac{1}{r}, \quad \frac{\nabla r}{r} = \nabla \lg r, \quad \frac{\nabla^2 r}{r} = 2\,\nabla^2 \lg r, \\ &2\,b\,\nabla_1\frac{\partial v_1'}{\partial \tau}\nabla \lg r = 2\,b\operatorname{div}\left(\frac{\partial v_1'}{\partial \tau}\nabla \lg r\right) \\ &\qquad\qquad - 2\,b\frac{\partial v_1'}{\partial \tau}\nabla^2 \lg r - \frac{2\,b^2}{r}\frac{\partial^2 v_1'}{\partial \tau^2} \end{aligned}\right. \tag{18}$$

ist, so folgt aus (18) und (16)

$$\frac{\Delta^2 v_1'}{r} = \frac{\Delta_1^2 v_1' - b^2\dfrac{\partial^2 v_1'}{\partial \tau^2}}{r} + 2\,b\operatorname{div}\left(\frac{\partial v_1'}{\partial \tau}\cdot\nabla \lg r\right). \tag{19}$$

Andererseits folgt aus (11), (15), (9a) und der Bedeutung von ∇_1

$$4\pi\sigma\frac{\partial v_1'}{\partial \tau}+\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 v_1'}{\partial \tau^2}=\nabla_1'^2 v_1'. \tag{20}$$

Und wir erhalten deshalb statt (19)

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\triangle^2 v_1'}{r}=&\frac{4\pi\sigma\frac{\partial v_1'}{\partial\tau}+\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-b^2\right)\frac{\partial^2 v_1'}{\partial\tau^2}}{r}\\&+2b\,\mathrm{div}\left(\frac{\partial v_1'}{\partial\tau}\nabla\lg r\right).\end{aligned}\right. \tag{21}$$

Demnach ist

$$\left\{\begin{aligned}\int_K\frac{\nabla^2 v_1'}{r}d\varkappa=&\int_K\frac{4\pi\sigma\frac{\partial v_1'}{\partial\tau}+\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-b^2\right)\frac{\partial^2 v_1'}{\partial\tau^2}}{r}d\varkappa\\&+\int_S 2b\,\frac{\partial v_1'}{\partial\tau}\cdot\frac{d\lg r}{dn}dS.\end{aligned}\right. \tag{22}$$

Um v_1 zu bestimmen, müssen wir (22) in (13) einsetzen, was aber nur dann erlaubt ist, falls das Oberflächenintegral in (22), genommen über eine Kugel mit unendlich kleinem Radius um den Aufpunkt herum, verschwindet. Da dies der Fall ist, so wollen wir (22) in (13) setzen, und erhalten unter Berücksichtigung, daß

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{d\lg r}{dn}=\frac{1}{r}\frac{dr}{dn},\\&\frac{dv_1'}{dn}=\left(\frac{dv_1}{dn}\right)_{t=t+br}+\frac{\partial v_1'}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dn}=\frac{\partial v_1'}{\partial n}+\frac{\partial v_1'}{\partial r}\frac{dr}{dn}\end{aligned}\right. \tag{23}$$

ist und (14) und (12)

$$\left\{\begin{aligned}v_1=&-\frac{1}{4\pi}\int_K\frac{4\pi\sigma\frac{\partial v_1'}{\partial\tau}+\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-b^2\right)\frac{\partial^2 v_1'}{\partial\tau^2}}{r}d\varkappa\\&+\frac{1}{4\pi}\int_S\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial v_1'}{\partial n}-\frac{b}{r}\frac{\partial v_1'}{\partial\tau}\cdot\frac{dr}{dn}+\frac{v_1'}{r^2}\frac{dr}{dn}\right\}dS.\end{aligned}\right. \tag{24}$$

Bilden wir jetzt $\mathfrak{E}$ laut

$$\mathfrak{E}=v_1'\mathfrak{i}+v_2'\mathfrak{j}+v_3'\mathfrak{k},$$

wobei wir in (24) sukzessive v_1', v_2', v_3' setzen, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (6)

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{E} = &-\frac{1}{4\pi}\int_K \frac{4\pi\sigma\frac{\partial \mathfrak{E}'}{\partial \tau} + \left(\frac{\varepsilon}{c^2} - b^2\right)\frac{\partial^2 \mathfrak{E}'}{\partial \tau^2}}{r}\, d\varkappa \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_S \left\{\nabla\left(\frac{\mathfrak{n}_0 \mathfrak{E}'}{r}\right) - \mathfrak{E}'\,\mathfrak{n}_0 \cdot \nabla\frac{1}{r} - \frac{V\mathfrak{n}_0 \operatorname{curl}\mathfrak{E}'}{r}\right. \\ &\left. - \frac{2b}{r}\frac{\partial \mathfrak{E}'}{\partial \tau}\frac{dr}{dn} - \mathfrak{E}'.\mathfrak{n}_0 \nabla\frac{1}{r}\right\} dS, \end{aligned}\right.$$

wo $\mathfrak{E}'$ aus $\mathfrak{E}$ erhalten ist durch Einsetzen von τ statt t.

Aber es ist:

$$\frac{\operatorname{div}\mathfrak{E}'}{r} = \frac{\operatorname{div}\mathfrak{E}}{r}_{t=t+br} + b\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\nabla \lg r_{t=t+br} = b\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\nabla \lg r_{t=t+br},$$

$$\operatorname{curl}\mathfrak{E}' = \operatorname{curl}\mathfrak{E}_{t=t+br} + b\frac{\partial}{\partial t} V\nabla \lg r\, \mathfrak{E}_{t=t+br}.$$

Berücksichtigen wir jetzt den Ausdruck (7) und die Beziehungen:

$$-b\frac{\partial}{\partial t} V\mathfrak{n}_0 V\nabla \lg r\,\mathfrak{E} = -b\nabla \lg r.\mathfrak{n}_0\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + b\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\cdot\mathfrak{n}_0\nabla \lg r,$$

$$V\nabla\frac{1}{r} V\mathfrak{n}_0\mathfrak{E} = \mathfrak{n}_0.\mathfrak{E}\nabla\frac{1}{r} - \mathfrak{E}.\mathfrak{n}_0\nabla\frac{1}{r},$$

$$b\,V\nabla \lg r\, V\mathfrak{n}_0\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \mathfrak{n}_0.b\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\nabla \lg r - b\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\cdot\mathfrak{n}_0\nabla \lg r,$$

so erhalten wir endgültig aus (27):

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{E} = &-\frac{1}{4\pi}\int_K \frac{4\pi\sigma\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \left(\frac{\varepsilon}{c^2} - b^2\right)\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2}}{r}\, d\varkappa_{t=t+br} \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_S b\frac{\partial}{\partial t} V\nabla \lg r\, V\mathfrak{n}_0\mathfrak{E}\, dS_{t=t+br} \\ &- \frac{1}{4\pi}\int_S \mathfrak{E}\,\mathfrak{n}_0\cdot\nabla\frac{1}{r}\, dS_{t=t+br} + \frac{1}{4\pi}\int_S V\nabla\frac{1}{r} V\mathfrak{n}_0\mathfrak{E}\, dS_{t=t+br} \\ &- \frac{1}{4\pi}\int_S b\nabla \lg r.\mathfrak{n}_0\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\, dS_{t=t+br} - \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{V\mathfrak{n}_0 \operatorname{curl}\mathfrak{E}}{r}\, dS._{t=t+br} \end{aligned}\right.$$

Das ist das Integral, dessen Ableitung wir suchten.

Setzen wir jetzt

$$b = -\frac{1}{c} \tag{27}$$

und statt curl $\mathfrak{E}$, $-\partial \mathfrak{H}/\partial t$ laut (8), so erhalten wir das Integral (1) § 1.

Ist die Permeabilität μ größer als 1, aber konstant, so muß in (26) statt ε, $\mu\varepsilon$ gesetzt werden und statt curl $\mathfrak{E}$, $-\mu\partial \mathfrak{H}/\partial t$.

Im allgemeinen ist es vorteilhaft in (26) sich vom Volumenintegral zu befreien. Dies wird der Fall sein bei der Annahme (27), falls sich der Aufpunkt im reinen Äther befindet, oder auch bei

$$b = -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{c}, \tag{27 a}$$

falls sich der Aufpunkt in einem Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstante ε befindet ($\sigma = 0$). Dasselbe hätten wir erzielt, falls wir in (27) und (27 a) das Pluszeichen benützt hätten. Das Minuszeichen haben wir aus folgenden Gründen angenommen. Der Ausdruck (26) muß uns den Wert von $\mathfrak{E}$ für den Aufpunkt zu jeder Zeit darstellen. Da wir aber annehmen müssen, daß im allgemeinen für Zeiten $t \leqq t_0$, $\mathfrak{E}$ überall Null ist, d. h. daß die Erscheinung einen zeitlichen Anfang hat, so kann diese Bedingung, falls $t_0 = 0$ ist, nur bei Annahme des Minuszeichens erfüllt werden.

Haben wir rein periodischen Zustand und setzen hier

$$\mathfrak{E} = e^{i\omega t}\mathfrak{E}',$$

so folgt

$$4\pi\sigma\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \left(\frac{\varepsilon}{c^2} - b^2\right)\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = e^{i\omega t}\mathfrak{E}'\left\{4\pi\sigma i\omega - \omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2} - b^2\right)\right\}.$$

Setzen wir

$$b = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{4\pi\sigma i}{\omega}}, \tag{28}$$

so befreiten wir uns ebenfalls von dem Volumenintegral in (26).

Aus (28) folgt:

$$b = -\varkappa + i\nu,$$

wo

$$(29)\qquad \begin{cases} \varkappa = +\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2+4\sigma^2\lambda^2c^2}} \\ \nu = +\frac{1}{c}\sqrt{-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2+4\sigma^2\lambda^2c^2}} \end{cases}$$

sind. Hierbei bedeutet λ die entsprechende Wellenlänge im reinen Äther.

Wir wollen jetzt das Integral (1) § 1 umformen entsprechend den fünf Annahmen des § 2 mit Ausnahme der zweiten, und zwar wollen wir annehmen, daß die Körper nicht absolut reflektierend sind, d. h. die tangentiale Komponente der elektrischen Kraft an der Oberfläche der Körper wird nicht Null sein.

Wir erhalten aus (1) § 1 durch analoge Umformungen wie im § 2:

$$(28)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \frac{\mathfrak{k}\cdot i\omega e^{i\omega t}}{2\pi}\int_s Q_0(pR)\varphi'\,ds - \frac{i\omega e^{i\omega t}}{2\pi}\int_s Q_0(pR)\zeta\,\mathfrak{s}_0\,ds \\ \qquad - \frac{p e^{i\omega t}}{2\pi}\int_s \mathfrak{R}_0\cdot\mathfrak{n}_0\,\mathfrak{E}'\cdot Q_1(pR)\,ds \\ \qquad - \frac{ipe^{i\omega t}}{4\pi}\int_s\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V\mathfrak{r}_0 V\mathfrak{n}_0\,\mathfrak{E}'\cdot e^{-ipr}}{r}\,ds\,dz \\ \qquad - \frac{e^{i\omega t}}{4\pi}\int_s\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V\mathfrak{r}_0 V\mathfrak{n}_0\,\mathfrak{E}'\cdot e^{-ipr}}{r^2}\,ds\,dz\,. \end{cases}$$

Bezeichnen wir durch Z' den Tensor der zur Z-Achse parallelen Komponente der elektrischen Kraft (unter Weglassung des Faktor $e^{i\omega t}$), so folgt

$$V\mathfrak{r}_0 V\mathfrak{n}_0\,\mathfrak{E}' = \mathfrak{n}_0\cdot\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{E}' - \mathfrak{E}'\cdot\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{n}_0 = Z'(\mathfrak{n}_0\cdot\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{k} - \mathfrak{k}\cdot\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{n}_0).$$

Außerdem ist

$$r^2 = R^2 + z^2$$

und

$$\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{n}_0 = \frac{R}{r}\cdot\mathfrak{R}_0\,\mathfrak{n}_0\,.$$

Wir erhalten deshalb, wegen der Symmetrie um die XY-Ebene, statt der beiden letzten Integrale in (28) (unter Weglassung des Faktors $\mathfrak{k}$)

$$(29)\quad \begin{cases} -\dfrac{ipe^{i\omega t}}{2\pi}\displaystyle\int_s\int_0^\infty \frac{Z'.R.\mathfrak{R}_0\,\mathfrak{n}_0}{r^2}\,e^{-ipr}\,ds\,dz \\ -\dfrac{e^{i\omega t}}{2\pi}\displaystyle\int_s\int_0^\infty \frac{Z'.R.\mathfrak{R}_0\,\mathfrak{n}_0}{r^3}\,ds\,dz = -\frac{\partial T}{\partial R}, \end{cases}$$

wo

$$(30)\quad \left\{ T = \frac{e^{i\omega t}}{2\pi}\int_s\int_0^\infty \frac{Z'.\mathfrak{R}_0\,\mathfrak{n}_0}{r}\,e^{-ipr}\,ds\,dz = -\frac{e^{i\omega t}}{2\pi}\int_s Z'\,Q_0(pR)\,ds \right.$$

ist. Bei der Differentiation von T ist Z und $\mathfrak{R}_0\,\mathfrak{n}_0$ als konstant und der Aufpunkt als beweglich angenommen.

Teilen wir jetzt, analog wie im § 2, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{E}_s$ und $\mathfrak{E}_m$, bzw. $\mathfrak{H}_s$ und $\mathfrak{H}_m$, so erhalten wir aus (28) unter Berücksichtigung von (30) und (8)

$$(31)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_{1z} + \dfrac{\mathfrak{k}.i\omega e^{i\omega t}}{2\pi}\displaystyle\int_s Q_0(pR)\,\varphi'\,ds \\ \qquad\qquad - \dfrac{\mathfrak{k}.pe^{i\omega t}}{2\pi}\displaystyle\int_s Z'.\mathfrak{R}_0\,\mathfrak{n}_0.Q_1(pR)\,ds, \\ \mathfrak{H}_m = \mathfrak{H}_{1m} - \dfrac{pe^{i\omega t}}{2\pi}\displaystyle\int_s \varphi'.Q_1(Rp)\,V\mathfrak{R}_0\,\mathfrak{k}\,ds \\ \qquad\qquad + \dfrac{ip^2e^{i\omega t}}{2\pi\omega}\displaystyle\int_s Z'.\mathfrak{R}_0\,\mathfrak{n}.Q_1'(pR)\,V\mathfrak{R}_0\,\mathfrak{k}\,ds \\ \qquad\qquad + \dfrac{ipe^{i\omega t}}{2\pi\omega}\displaystyle\int_s Z'.\frac{\sin^2(\mathfrak{R}_0,\mathfrak{n}_0)}{R}\cdot Q_1(pR).\mathfrak{s}_0\,ds, \end{cases}$$

da

$$V \nabla (\mathfrak{R}_0 \, n_0) \, \mathfrak{k} = - \frac{\sin^2 (\mathfrak{R}_0, \, n_0)}{R} \cdot \mathfrak{E}_0 \tag{32}$$

ist. Q_1' bedeutet die Derivierte von Q_1 nach dem Argumente $p\,R$.

Was die Werte für $\mathfrak{E}_m$ und $\mathfrak{H}_m$ anbelangt, so bleibt hierfür derselbe Ausdruck (10) § 2 gültig.

Wetzlar, den 18. Dezember 1907.

(Eingegangen 20. Dezember 1907.)

7. *Über ein von Max Wien geäußertes Bedenken gegen die Helmholtzsche Resonanztheorie des Hörens;* von Otto Fischer.

In seinem Beitrag zur Festschrift für Adolph Wüllner[1]), der mir leider erst in diesem Jahre zu Gesicht gekommen ist, beschäftigt sich Max Wien mit einem Einwand gegen die Helmholtzsche Resonanztheorie des Hörens, welcher zunächst durchaus nicht von der Hand zu weisen ist und geeignet zu sein scheint, der Helmholtzschen Theorie den physikalischen Boden zu entziehen. Da nun nach M. Wien diese Theorie als eine der fruchtbarsten und glänzendsten Anwendungen der Physik angesehen werden muß, so darf in der Tat ein berechtigtes Bedenken gegen dieselbe nicht ohne Widerlegung bleiben, wenn man nicht überhaupt darauf verzichten will, den Vorgang des Hörens und insbesondere der Klanganalyse physikalisch zu erklären. Ich werde daher im folgenden versuchen, das Wiensche Bedenken zu zerstreuen und damit das scheinbar verloren gegangene Gebiet der Physik zu erhalten.

Um den Wienschen Einwand und seine Widerlegung verstehen zu können, muß man darüber genau orientiert sein, durch welche Vorgänge im inneren Ohr nach Helmholtz eine Analyse des Klanges ermöglicht werden soll. Ich werde daher unter Berücksichtigung der histologischen Befunde über den Bau des akustischen Endapparates innerhalb des knöchernen Labyrinthes zunächst noch einmal die Helmholtzsche Theorie mit einigen mir notwendig erscheinenden, für den Fachmann leicht erkennbaren kleinen Ergänzungen in ihren wesentlichsten Punkten skizzieren, soweit ihre Kenntnis zum Verständnis der späteren Auseinandersetzungen erforderlich ist. Die gröberen anatomischen Verhältnisse innerhalb des Gehörorgans dürfen dabei wohl als bekannt vorausgesetzt werden.

1) M. Wien, Wüllner-Festschrift. Leipzig, B. G. Teubner, 1905.

Es sprechen sowohl physikalische als physiologische und schließlich auch rein anatomische Gründe dafür, daß das Organ für die Analyse des Klanges und für die Umsetzung der mechanischen Schwingungen in Nervenerregung nur in dem innerhalb der knöchernen Schnecke gelagerten häutigen Schneckengang (Ductus cochlearis) gefunden werden kann.

Die in den äußeren Gehörgang eingedrungenen Schallwellen versetzen das Trommelfell in stehende Schwingungen, welche durch Vermittelung von Hammer und Amboß auf den Steigbügel übertragen werden. Der Steigbügel verschließt nun mit seiner Basis die als ovales Fenster (Fenestra vestibuli) bezeichnete Eingangspforte zu den innerhalb des Felsenbeines befindlichen Höhlungen des sogenannten knöchernen Labyrinthes. Die Steigbügelbasis füllt aber das ovale Fenster nicht vollkommen aus; es bleibt noch ein schmaler ringförmiger Spalt übrig, der von den Fasern eines vom Außenrande der Steigbügelbasis nach dem Innenrande des ovalen Fensters sich erstreckenden Bandes (Ligamentum annulare baseos stapedis) überbrückt wird. Durch diese Einrichtung ist es dem Steigbügel ermöglicht, innerhalb enger Grenzen kleine Bewegungen auszuführen, durch welche seine Basis entweder etwas gegen das Labyrinth oder gegen die Paukenhöhle verschoben wird. Wenn auch, wie die genauere Struktur des genannten Bandes lehrt, diese Verschiebungen der Steigbügelbasis zum Teil aus Drehungen um einen an ihrem hinteren unteren Rande gelegenen Punkt bestehen müssen, so lassen sich dieselben in ihrer Wirkung auf die Labyrinthflüssigkeit doch mit den Bewegungen eines eine Flüssigkeitsmenge in einem Zylinder abschließenden Kolbens vergleichen. Eine Einwärts- oder Auswärtsbewegung des Steigbügels wird die Flüssigkeit, welche die Höhlungen des knöchernen Labyrinthes erfüllt, im einen oder anderen Sinne verschieben müssen. Dies ist natürlich nur möglich, wenn der inkompressiblen Flüssigkeit Gelegenheit gegeben ist, an einer anderen Stelle der Labyrinthwandung gegen die Paukenhöhle in ausreichender Weise vorzudringen, oder sich von ihr zurückzuziehen. Diese Möglichkeit liegt vor an der zweiten Öffnung zwischen der Labyrinthhöhlung und der Paukenhöhle, welche infolge ihrer mehr kreisförmigen Gestalt das runde Fenster (Fenestra cochleae) genannt wird.

Dieses zweite Fenster ist durch eine dünne, als Nebentrommelfell (Membrana tympani secundaria) bezeichnete, bindegewebige Haut verschlossen. Versuche von Mach haben nun in der Tat gezeigt, daß die Membran des runden Fensters jedesmal beim Eindringen der Steigbügelbasis in das Labyrinth genügend weit gegen die Paukenhöhle vorgewölbt wird, um der Labyrinthflüssigkeit das nötige Ausweichen zu gestatten, und daß sie mit dem Zurückgehen des Steigbügels auch wieder ihre Wölbung verliert bzw. sich gegen das Labyrinth einwärts wölbt. Daraus geht aber hervor, daß die Labyrinthflüssigkeit, sobald Schallwellen in das Ohr eindringen, durch den Steigbügel in periodische Verschiebungen versetzt werden muß, welche den Schwingungen des Steigbügels, und infolgedessen auch den Schallschwingungen selbst, entsprechen.

Es fragt sich nun, ob die ganze im knöchernen Labyrinth eingeschlossene Flüssigkeit an diesen Schwingungen teilnimmt.

Hätte das Labyrinth die Form einer einzigen zylindrischen Röhre, an deren beiden Enden sich das ovale und das runde Fenster befänden, so würde natürlich bei jedem Eindringen des Steigbügels in das ovale Fenster die ganze Flüssigkeitssäule nach dem runden Fenster hin verschoben werden und dadurch die Hervorwölbung des Nebentrommelfelles verursachen. In Wirklichkeit sind aber die Höhlungen des knöchernen Labyrinths sehr verzweigt. Hinter dem ovalen Fenster befindet sich zunächst ein etwa ellipsoidartig gestalteter Raum, der Vorhof (Vestibulum). Von diesem gehen verschiedene Kanäle ab, die drei Bogengänge und der Schneckenkanal.

Jeder der drei Bogengänge stellt einen annähernd kreisförmig gebogenen Seitenkanal des Vorhofes dar, so daß Anfang und Ende desselben an zwei räumlich nicht weit voneinander abliegenden Stellen in den Vorhof einmünden. Wenn nun die Steigbügelbasis gegen das Labyrinth vordringt, so soll dadurch die in einem Bogengang befindliche Flüssigkeit an beiden Einmündungsstellen vom Vorhof aus in den Bogengang mit gleicher Stärke eingedrückt werden; dieselbe kann daher weder in der einen noch in der anderen Richtung innerhalb des Bogenganges dem Drucke nachgeben und wird infolgedessen in Ruhe verharren. Daran ändert auch die Tatsache nichts, daß das eine Ende eines jeden Bogenganges gleich hinter der Einmündungs-

stelle auf einer kurzen Strecke erweitert erscheint. Es ist demnach ausgeschlossen, daß die in den drei Bogengängen eingeschlossenen Flüssigkeitssäulen sich an Schwingungen der übrigen Labyrinthflüssigkeit in ihrer ganzen Ausdehnung beteiligen. Die Form des als „Ampulle" bezeichneten erweiterten Endes eines Bogenganges, nämlich eine weite Höhlung mit zwei engeren Öffnungen, scheint vielmehr nach Helmholtz zur Hervorbringung eines abgetrennten mittleren Flüssigkeitsstrahles geeignet zu sein, der sich teilweise seitlich in Wirbel auflöst.

Da das ovale und das runde Fenster sich im Vorhof nicht gegenüber stehen, sondern sehr nahe nebeneinander liegen, so ist vorauszusehen, daß auch die nur im Vorhof gelagerte Flüssigkeit nicht in ihrer ganzen Ausdehnung die hin- und hergehenden Bewegungen des Steigbügels und des Nebentrommelfelles mitmachen wird, sondern daß die letzteren im wesentlichen auf ein kleines Gebiet in der Nähe der beiden Fenster beschränkt bleiben.

Für die im Schneckenkanal eingeschlossene Flüssigkeitssäule würde das gleiche gelten, wenn der spiralig verlaufende Kanal nicht in seiner ganzen Längsausdehnung durch eine quer durch ihn hindurchziehende Scheidewand in zwei nebeneinander laufende Kanäle, die beiden Skalen, getrennt erschiene. Fig. 1, welche einen Querschnitt des Schneckenkanals in seiner unteren Windung darstellt, läßt diese Trennung deutlich erkennen. Die Scheidewand ist zum Teil knöchern, zum Teil membranös. Der knöcherne Teil wird durch eine in das Lumen des Kanals weit hineinragende feine Knochenplatte, die Lamina spiralis ossea gebildet; an den freien Rand derselben heftet sich als Fortsetzung eine faserige Bindegewebsplatte, die Membrana basilaris, an, welche bis zu der gegenüberliegenden Seite der Innenwand des Schneckenkanals hinüberzieht und daselbst an einem leistenartigen Vorsprung des Periosts, dem Ligamentum spirale, befestigt ist. Die Scheidewand zieht sich von der Basis bis zur Spitze der Schnecke quer durch das Lumen des Kanals hindurch und läßt nur an der äußersten Spitze ein kleines Loch, das sogenannte Helicotrema, frei, so daß allein an dieser Stelle die beiden Skalen miteinander kommunizieren. An der Basis der

Schnecke mündet die eine Skala in den Vorhof ein; sie führt daher den Namen Vorhofstreppe oder Scala vestibuli (vgl. Fig. 1). Die andere Skala, Paukentreppe oder Scala tympani genannt, würde durch das runde Fenster mit der Paukenhöhle in Ver-

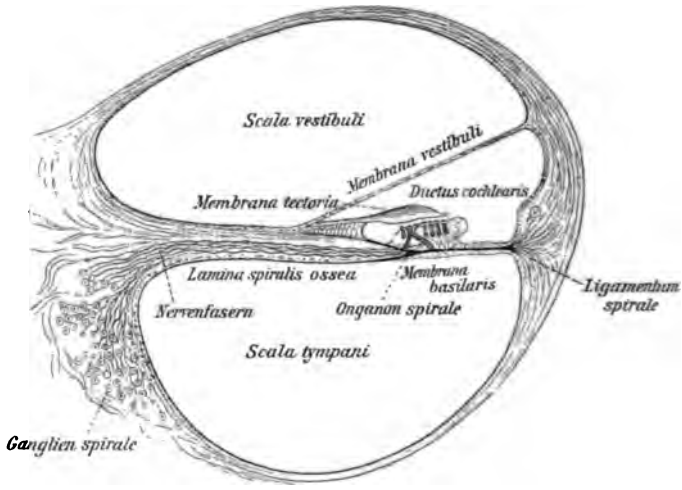


Fig. 1. Durchschnitt der unteren Schneckenwindung (nach Henle).

bindung stehen, wenn dieses Fenster nicht durch das Nebentrommelfell verschlossen wäre; mit dem Vorhof steht sie dagegen in keiner direkten Verbindung.

Man kann sich leicht mit Hilfe eines Gummischlauches in allerdings ganz roh schematischer Weise eine anschauliche Vorstellung von der Teilung des Schneckenkanals in die beiden Skalen und der Beziehung der letzteren zu den beiden Fenstern verschaffen. Man braucht zu dem Zwecke nur einen langen Schlauch in der Mitte umzubiegen und die beiden Hälften derart nebeneinander zu legen, daß sie sich in ihrer ganzen Ausdehnung berühren, so wie es Fig. 2 andeutet. Denkt man sich dann die beiden Hälften an ihren Berührungsflächen zusammengeleimt, und dabei die letzteren durch stärkeres Aneinanderdrücken möglichst verbreitert, so kann man die eine Hälfte des Schlauches als Vorhofstreppe, die andere als Paukentreppe auffassen, sofern man das eine Ende des Schlauches durch die Basis des Steigbügels und das andere durch das Nebentrommelfell verschlossen denkt. Um auch der Schnecken-

form des Kanals Rechnung zu tragen, brauchte man schließlich nur noch den ganzen Doppelschlauch spiralig um irgend eine kegelförmige Achse aufzuwinden. Allerdings würde bei diesem Schema noch nicht dem Umstande Rechnung getragen sein, daß sich die Vorhofstreppe direkt in den Vorhof fortsetzt. Um auch dies noch anzudeuten, hätte man nur am Ende der-

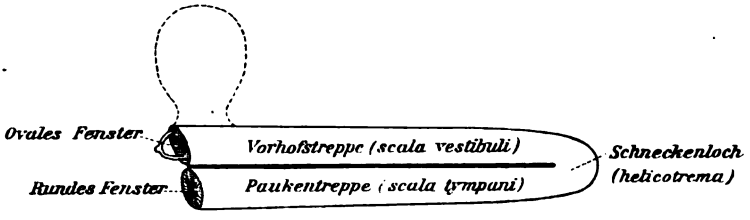


Fig. 2.

selben neben dem ovalen Fenster seitlich einen Hohlraum anzubringen, wie es in Fig. 2 durch die punktierte Linie schematisch angedeutet ist.

Während die Flüssigkeitssäulen in den Bogengängen überhaupt nicht, und die Flüssigkeit im Vorhof nur zum Teil durch die Schwingungen des Steigbügels in entsprechende Verschiebungen versetzt werden konnten, ist aus der Gliederung der Schnecke ersichtlich, daß die in den beiden Skalen eingeschlossene Flüssigkeitssäule sehr wohl die Schwingungen des Steigbügels aufnehmen kann. Es folgt daher schon aus diesen rein physikalischen Gründen, daß der Apparat für die Analyse des Klanges und für die Umwandlung der mechanischen Schwingungen in Nervenerregung nur in der Schnecke gesucht werden kann. Die in den Ampullen der Bogengänge anzutreffenden und auch die im Vorhof auf zwei Flecke (Maculae acusticae) verteilten Nervenzellen können daher nicht der Wahrnehmung musikalischer Töne, sondern nach Helmholtz höchstens der Wahrnehmung von Geräuschen dienen, sofern man überhaupt besondere Endorgane für die Geräuschempfindung annehmen will. Für die Klangempfindung kann dagegen nur das im häutigen Schneckengang (Ductus cochlearis) eingeschlossene Cortische Organ (Organon spirale) mit seinen Nervenzellen in Frage kommen.

Es ist nun aber weiter auch aus rein physiologischen Gründen

höchst unwahrscheinlich, daß die Nervenausbreitungen in den Ampullen der Bogengänge und in den zwei häutigen Säckchen (Utriculus und Sacculus) innerhalb des Vorhofs der Analyse regelmäßiger Schallwellen dienen; denn es hat sich für dieselben bekanntlich noch eine ganz andere physiologische Funktion experimentell nachweisen lassen. Man ist nach Versuchen von Flourens, Goltz, Mach, Breuer, Delage, Ewald u. a. heute fast allgemein der Ansicht, daß sie ein Organ für die Wahrnehmung der Kopfstellung im Raume sowie der Kopfbewegung, und damit mittelbar auch für die Orientierung des ganzen Körpers im Raume darstellen.

Für die Ansicht, daß ihre Funktion auf einem ganz anderen Gebiete als dem des Hörens liegt, sprechen schließlich auch rein anatomische Gründe, die sich auf den weiteren Verlauf der Nerven beziehen, welche die verschiedenen Teile des Labyrinths versorgen. Der in der Anatomie als Nervus acusticus bezeichnete achte Gehirnnerv besteht aus zwei Teilen, dem Vorhofsnerv (Nervus vestibularis) und dem Schneckennerv (Nervus cochlearis). Der Vorhofsnerv versorgt die Ampullen der Bogengänge, die Macula acustica utriculi und die Macula acustica sacculi, welche beide in je einem häutigen Säckchen (Utriculus und Sacculus) innerhalb des Vorhofs liegen. Der Schneckennerv allein endigt dagegen in der Schnecke. Die Verfolgung des zentralen Verlaufs des Vorhofsnerven hat nun das Resultat ergeben, daß derselbe sich schließlich über eine ausgedehnte Zellsäule im Hirnstamm verzweigt, von welcher zahlreiche Nervenfasern nach dem Vorderstrang derselben Seite und dem Seitenstrang der Gegenseite im Rückenmark hinuntergehen und den gesamten Querschnitt grauer Substanz des Rückenmarks beeinflussen; dagegen hat eine Verbindung mit dem Großhirn für den Vorhofsnerv nicht nachgewiesen werden können. Andererseits ziehen die Fasern des Schneckennerven schließlich nach dem Großhirn und zwar nach einem im Gebiet der oberen Schläfenwindung und vor allen Dingen der Querwindungen am Boden der Fissura Sylvii liegenden Rindenbezirk, den man infolgedessen als die Hörsphäre aufzufassen hat. —

Betrachtet man nun die Schwingungsvorgänge im Schneckenkanal genauer, so wird man zu folgendem Resultat geführt.

Wäre die Trennung zwischen den beiden Skalen durchweg knöchern, indem die Lamina spiralis ossea sich durch das ganze Lumen des Schneckenkanals bis zur gegenüberliegenden Wand erstreckte, so müßte die ganze in den beiden Skalen gelagerte Flüssigkeitssäule hin- und herschwingen wie in jeder aus starrem Material gebildeten Röhre, die etwa durch zwei Membranen an ihren Enden verschlossen ist; insbesondere würde die Schwingung durch das Helicotrema (vgl. Fig. 2) hindurchgehen. Wäre dagegen die Trennung des Schneckenkanals in die beiden Skalen überhaupt nicht vorhanden, so würden sich ähnliche Verhältnisse wie im Vorhof bzw. in den Bogengängen herausstellen. Es würde infolge der großen Nähe der beiden Fenster nur die um dieselben herumgelagerte Flüssigkeitsmenge regelmäßige Schwingungen ausführen können; dagegen würde die tiefer im Schneckenkanal eingelagerte Flüssigkeitssäule sich überhaupt nicht an den Schwingungen beteiligen und höchstens in unregelmäßige Wirbelbewegungen versetzt werden. Bei einer nachgiebigen und elastischen häutigen Trennungsfläche der beiden Skalen, wie sie im menschlichen Ohre in der Membrana basilaris [1]) vorhanden ist, wird dagegen weder das eine noch das andere eintreten. Es wird vielmehr die Schwingung längs der ganzen Scheidewand von der Scala vestibuli aus auf die Scala tympani übertragen werden, indem beim Einwärtsdringen des Steigbügels in das ovale Fenster infolge des Überdruckes in der Scala vestibuli die membranöse Scheidewand gegen die Scala tympani, bei der Rückwärtsbewegung des Steigbügels dagegen gegen die Scala vestibuli hingedrängt wird. Dabei wird das dem Vorhof am nächsten liegende Ende der Membrana basilaris in der Schneckenbasis immer unter stärkerem Druck stehen müssen als das andere Ende derselben in der Schneckenkuppel.

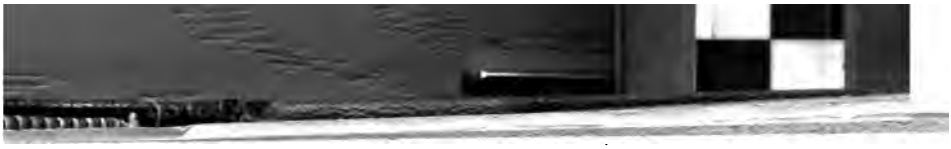
1) Die Membrana vestibuli, welche den Ductus cochlearis in Fig. 1 nach oben abschließt, kann infolge ihrer geringen Dicke und vollständigen Spannungslosigkeit keinen bestimmenden Einfluß auf die Art der Schwingung ausüben. Es wird die Art der Schwingung der Labyrinthflüssigkeit daher auch nicht durch den Umstand beeinträchtigt, daß innerhalb des Ductus cochlearis die Flüssigkeit (Endolymphe) etwas andere chemische Zusammensetzung besitzt und etwas dickflüssiger ist als die in den Skalen gelagerte Flüssigkeit (Perilymphe).

Wie groß dieser Druckunterschied ist, das hängt natürlich ganz von der Spannung der membranösen Scheidewand ab. Bei sehr starker Spannung der letzteren würde der Unterschied gering sein, indem dann die membranöse Scheidewand annähernd wie eine durchweg knöcherne Trennungsfläche wirkte und gar kein merkliches Ausweichen gestattete. Bei sehr geringer Spannung würde dagegen der Druckunterschied sehr groß sein; es würde dann überhaupt nur ein kleiner Teil der Membran in der Schneckenbasis gedrückt und hin- und herbewegt werden.

Da die Membrana basilaris, wie sich nachweisen läßt, in radiärer Richtung verhältnismäßig stark gespannt ist, aber doch immerhin ein Ausweichen nach der einen oder anderen Seite ausführen kann, so ist es nicht unwahrscheinlich, daß das alleräußerste Ende der Membran an der Schneckenkuppel und die im Helicotrema und in der Nähe desselben befindliche Flüssigkeit bei normalen Schwingungen überhaupt nicht mitbewegt wird. Dafür scheint auch der Umstand zu sprechen, daß an dem Kuppelende des Ductus cochlearis kein Cortisches Organ mehr anzutreffen ist.

Es wäre demnach eine Verbindung der beiden Skalen durch das Schneckenloch unter normalen Verhältnissen gar nicht nötig. Wenn dagegen die Steigbügelbasis unverhältnismäßig tief in das ovale Fenster eindringt, und damit momentan die Flüssigkeit in der Scala vestibuli unter abnorm hohen Druck gebracht wird, so findet die letztere einen Ausweg durch das Schneckenloch, nachdem die membranöse Scheidewand soweit wie möglich gegen die Scala tympani hingedrängt worden ist.

Demnach wäre das Schneckenloch als eine Schutzvorrichtung für die Membrana basilaris und das Cortische Organ aufzufassen, welche diese Teile bei abnorm hohem Drucke vor dem Zerreißen bewahrt. Derartige Schutzvorrichtungen für das überaus zarte Cortische Organ sind noch mehrere im Gehörorgan anzutreffen, so z. B. in dem trichterförmigen Bau des Trommelfelles, den Bändern, welche die Drehungen des Hammers begrenzen, der Gelenkverbindung zwischen Hammer und Amboß mit ihren Sperrzähnen, dem am Köpfchen des Steigbügels angreifenden Musculus stapedius usw.



Da die Membrana basilaris sich nach der Schneckenkuppel zu immer mehr verbreitert, so nimmt man an, daß die in der Nähe der Kuppel befindlichen Nervenzellen der Wahrnehmung der tiefsten Töne dienen, und daß die Nervenzellen durch immer höhere Töne gereizt werden, je weiter sie von der Kuppel innerhalb der Schnecke entfernt liegen. Da nun nach dem obigen die Schwingungen des Steigbügels mit um so geringerer Amplitude auf die Basilarmembran übertragen werden können, je näher dieselbe der Schneckenkuppel liegt, so findet die Tatsache ihre physikalische Erklärung, daß nach Stumpf „höhere Töne und Geräusche (soweit diese eine bestimmte Höhe besitzen) bei gleicher Reizstärke als stärker gegenüber tieferen beurteilt werden". Es verliert hierdurch auch ein anderes schon früher von M. Wien geäußertes Bedenken[1]) an Berechtigung, „daß das starke Anwachsen der Empfindlichkeit des Ohres mit der Tonhöhe schwer mit der Resonanztheorie in Einklang zu bringen sei".

Aus dem Bau und der Anordnung der Labyrinthhöhlungen wird man also zunächst schon bei rein physikalischer Betrachtungsweise zu dem Resultat geführt, daß die von außen in den äußeren Gehörgang eindringenden fortschreitenden Longitudinalwellen der Luft durch Vermittelung des Trommelfelles, der drei Gehörknöchelchen und der Labyrinthflüssigkeit schließlich in stehende Schwingungen der Basilarmembran umgesetzt werden.

Würde sich diese Membran stets in ihrer ganzen Ausdehnung in gleicher Weise an den Schwingungen beteiligen, so wäre eine Zerlegung des Klanges in seine einzelnen Bestandteile, zu welcher unser Gehörorgan tatsächlich befähigt ist, schwer zu verstehen. Man ist daher genötigt, zum Zwecke einer physikalischen Erklärung der Klanganalyse die Annahme zu machen, daß, abgesehen von der nach der Spitze der Schnecke zu sich so wie so allmählich vermindernden Amplitude, die Basilarmembran in ihren verschiedenen Teilen nicht in gleicher Weise auf die einzelnen Schwingungen reagiert. Da es sich hier nur um die Widerlegung eines Bedenkens gegen die Helmholtzsche Resonanztheorie handelt, so über-

1) M. Wien, Pflügers Archiv für die gesamte Physiol. 97. p. 1. 1903.

gehe ich eine in neuerer Zeit von R. Ewald[1]) aufgestellte Ansicht, nach welcher die langausgedehnte, aber gleichzeitig verhältnismäßig schmale Basilarmembran sich wie eine in aliquoten Teilen schwingende Saite in Schwingungsbäuche und Schwingungsknoten zerlegen soll, und berücksichtige ausschließlich die Anschauung, zu welcher Helmholtz schließlich gelangte, nachdem er sich von der Unhaltbarkeit der Annahme einer Resonanzfunktion der Cortischen Bogenpfeiler überzeugt hatte.[2])

Helmholtz hatte festgestellt, daß die Basilarmembran am Präparat sehr leicht in radialer Richtung zerreißt, während ihre radialen Fasern selbst einen ziemlich hohen Grad von Festigkeit besitzen. Er schloß daraus, daß diese Membran in ihrer natürlichen Befestigung innerhalb des Schneckenkanals in radialer Richtung starke, dagegen in Richtung ihrer Länge nur äußerst schwache Spannung aufweisen wird. „Nun verhält sich," wie Helmholtz auf mathematischem Wege zeigte[3]), „eine Membran, welche nach verschiedenen Richtungen hin verschieden gespannt ist, bei ihren Schwingungen sehr viel anders, als es eine nach allen Richtungen hin gleich gespannte Membran tun würde. Auf letzterer verbreiten sich Schwingungen, die auf einem Teile eingeleitet sind, gleichmäßig nach allen Richtungen hin, und es würde bei gleichmäßiger Spannung unmöglich sein, einen Teil der Membrana basilaris in Schwingungen zu versetzen, ohne nahehin ebenso starke Schwingungen, abgesehen von etwa sich bildenden einzelnen Knotenlinien, in allen anderen Teilen der Membran hervorzurufen. Wenn aber die Spannung in Richtung der Länge verschwindend klein ist gegen die Spannung in Richtung der Breite, dann verhält sich die Membrana basilaris annähernd so, als wären ihre Radialfasern ein System von gespannten Saiten, deren quere membranöse Verbindung nur dazu dient, dem Drucke der Flüssigkeit gegen diese Saiten eine Handhabe zu geben. Dann werden

1) Man vgl. Pflügers Archiv für die gesamte Physiologie **76.** p. 147. 1899 und ebenda **93.** p. 485. 1903.

2) Vgl. hierzu die nachstehende Anmerkung auf p. 129 u. 130.

3) Vgl. H. v. Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen, III. Ausgabe. Braunschweig 1870. p. 228 und Beilage XI.

die Gesetze ihrer Bewegung dieselben sein, als wäre jede einzelne dieser Saiten in ihrer Bewegung unabhängig von den anderen und folgte, jede für sich, der Einwirkung des periodisch wechselnden Druckes des Labyrinthwassers in der Vorhofstreppe. Es würde demnach ein erregender Ton namentlich diejenige Stelle der Membran in Mitschwingen versetzen, wo der Eigenton der gespannten und mit den verschiedenen Anfangsgebilden belasteten Radialfasern der Membran dem erregenden Tone am nächsten entspricht; von da würden sich die Schwingungen in schnell abnehmender Stärke auf die benachbarten Teile der Membran ausbreiten. Fig. 3 (welche nach Helmholtz die dem voraussichtlich im Ohre geltenden Dämpfungsgrade zukommende Abhängigkeit der Intensität des Mitschwingens von dem Intervall zwischen erregenden Ton und dem Resonanzton in der Weise graphisch darstellt, daß die Strecken OA und OB je dem Intervall eines ganzen Tones entsprechen) würde geradezu mit übertriebener Höhe den Längsschnitt derjenigen Gegend der schwingenden Membrana basilaris darstellen können, wo der Eigenton der Radialfasern der Membran dem erregenden Tone am nächsten entspricht."

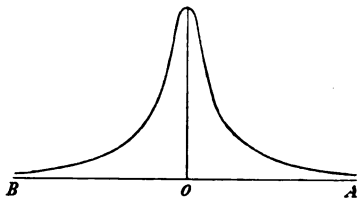


Fig. 3.

Sobald nun ein bestimmter Querstreifen der Basilarmembran in Schwingung versetzt wird, muß sich auch der auf diesem Streifen aufsitzende Teil des Cortischen Organs an der Bewegung beteiligen. Um zu verstehen, wie hierdurch die Nervenzellen, welche diesem Teile angehören, in Erregung versetzt werden können, muß man sich den feineren Bau des Cortischen Organes vergegenwärtigen.

Fig. 4 veranschaulicht einen in radialer Richtung senkrecht zur Basilarmembran geführten Querschnitt durch das Organ. Man erkennt in der Figur zunächst die beiden Cortischen Bogenpfeiler[1]), von denen der eine (innere) mit seinem

1) Helmholtz hielt ursprünglich die Cortischen Bogenpfeiler, denen er an verschiedenen Stellen der Membran verschiedene Festig-

Fuß zum Teil noch auf der Lamina spiralis ossea befestigt ist, während der andere (äußere) nur auf der Basilarmembran aufsteht. Diese beiden Pfeiler, welche sich oben mit ihren Köpfen berühren, tragen eine (in der Figur nur als schmaler Streifen sichtbare) durchlöcherte Platte, die Membrana reticularis, welche außerdem noch durch besondere auf der Basilarmembran aufsitzende Stützzellen gehalten wird. In den Löchern dieser Platte stecken mit ihren oberen Enden vier äußere und

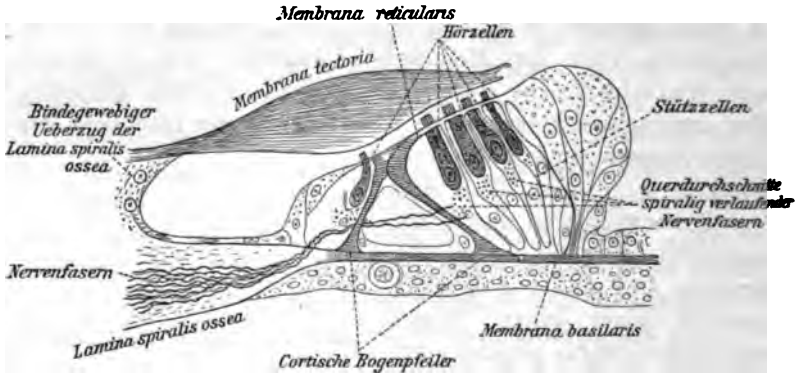


Fig. 4. Akustischer Endapparat (nach Retzius).

eine innere Nervenzelle (in der Figur durch dunklere Zeichnung hervorgehoben). Diese als Hörzellen bezeichneten Nerven-

---

keit und Spannung zuschrieb, für Gebilde, welche auf verschiedene Töne abgestimmt sind. Da aber von Hasse gefunden worden war, daß die Cortischen Bögen bei Vögeln und Amphibien fehlen, so schloß er sich der zuerst von Hensen auf Grund seiner Messungen über die verschiedene Breite der Basilarmembran gemachten Annahme an, daß es Teile dieser Membran sind, welche selbständig schwingen und die Rolle von Resonatoren bei der Analyse des Klanges übernehmen können. Den Cortischen Bögen fällt nach dieser Ansicht nur die Aufgabe zu, als relativ feste Gebilde die Teilschwingungen der Basilarmembran auf eng abgegrenzte Gruppen von Nervenzellen zu übertragen. Wegen dieser vermittelnden Rolle der Cortischen Bogenpfeiler behält Helmholtz in den späteren Auflagen seiner Lehre von den Tonempfindungen die frühere kurze Ausdrucksweise bei, daß die Cortischen Bögen auf verschiedene Töne abgestimmt sind, während er in Wirklichkeit damit die Abstimmung der unter den Bögen liegenden Teile der Basilarmembran meint.

zellen tragen alle an ihrem oberen Ende feine Härchen. Oberhalb dieser Härchen der Hörzellen lagert nun im Ductus cochlearis eine breite Membran, welche nicht mit der Basilarmembran in direkter Verbindung steht, sondern sich an den bindegewebigen Überzug der Lamina spiralis ossea ansetzt und von da an frei in das Lumen des Ductus cochlearis hineinragt (vgl. hierzu auch Fig. 1). Dieses als Membrana tectoria oder auch Cortische Membran bezeichnete Gebilde braucht deshalb die Schwingungen des darunter befindlichen Streifens der Basilarmembran nicht mitzumachen; es werden daher bei diesen Schwingungen die Hörzellen abwechselnd ihr näher kommen und sich wieder von ihr entfernen. Man kann sich nun leicht vorstellen, daß dabei die Härchen der Hörzellen intermittierend gegen die Cortische Membran anstoßen und dadurch eine Erregung der Nervenzellen und der an die letzteren von unten herantretenden Nervenfasern (siehe die Figur) hervorrufen.[1]) Schreibt man den einzelnen Nervenfasern spezifische Energie zu, so wird nach der Helmholtzschen Annahme über das partielle Schwingen der Basilarmembran verständlich, daß jeder einfache Ton von bestimmter Höhe nur durch gewisse Nervenfasern empfunden wird, und verschieden hohe Töne verschiedene Nervenfasern erregen werden; denn es wird ja durch einen einfachen Ton immer nur ein schmaler Streifen der Basilarmembran in Schwingung versetzt, welcher mit dem Ton ganz oder nahezu im Einklang ist, während alle anderen Teile der Basilarmembran dabei „schwach oder gar nicht" mitschwingen.

Das neuerdings von M. Wien gegen die Helmholtzsche Resonanztheorie erhobene Bedenken richtet sich nun gegen dieses „schwach oder gar nicht". Er sagt: „Gar nicht" ist nicht

1) Für die Rolle, welche hierdurch der Cortischen Membran bei der Analyse des Klanges und der Umsetzung der Schwingungen in Nervenerregung zugeschrieben wird, sprechen auch die Resultate einer in neuerer Zeit von A. Kreidl und Y. Yanase an neugeborenen Ratten angestellten Untersuchung (Zur Physiologie der Cortischen Membran. Zentralblatt für Physiologie Bd. XXI. 1907. Nr. 16. p. 507). Sie fanden, daß kurz nach der Geburt, solange die Tiere noch nicht zur Perzeption von Gehörsempfindungen befähigt sind, die Cortische Membran zunächst noch mit dem Cortischen Organ zusammenhängt, daß aber beim Eintreten des Hörens dieser Zusammenhang gelöst erscheint.

möglich, weil jeder elastische Körper durch jede periodische Kraft in erzwungene Schwingung versetzt wird. „Schwach" wird das Mitschwingen bei einem „falschen" Ton gegenüber dem „richtigen" sein, wenn *ausgesprochene Resonanz* vorliegt. Nimmt man mit Helmholtz betreffs der Dämpfung des Cortischen Organs an, daß bei den als Resonatoren wirkenden Streifen der Basilarmembran schon nach 10 Schwingungen eine Abnahme der Intensität der Schwingung auf $^1/_{10}$ und damit der Amplitude der Schwingung auf $1/\sqrt{10}$ stattgefunden hat, so folgt nach M. Wien aus der bekannten Resonanzgleichung, daß bei tieferen Tönen die Cortischen Resonatoren mit höheren Eigentönen nicht „schwach oder gar nicht", sondern mit ca. 27,3 mal kleinerer Amplitude mitschwingen. „Wenn nun die das Ohr treffenden tiefen Töne sehr stark sind, wenn die Amplitude der durch sie verursachten Kraft z. B. 27300 mal so groß ist als die, welche bei richtiger Schwingungszahl noch eine Gehörempfindung bewirkt, so müssen die durch die falschen tieferen Töne hervorgerufenen Amplituden der Cortischen Bögen (d. h. also der Membranstreifen, vgl. die Anmerkung auf p. 129 und 130) $\frac{27300}{27{,}3} = 1000$ mal größer sein wie die, welche bei richtiger Schwingungszahl noch vernommen werden."

Nun haben aber Versuche von Helmholtz mit großen Stimmgabeln und mit der Doppelsirene unzweifelhaft ergeben, daß man diese falschen tieferen Töne selbst bei den stärksten Amplituden, welche sich dabei hervorbringen ließen, nicht empfindet. Unter Berücksichtigung der von Rayleigh und ihm selbst angestellten Reizschwellenmessungen kommt M. Wien schließlich zu dem Resultat, daß bei den Helmholtzschen Versuchen die erzwungene Amplitude an der 256 Eigenschwingungen entsprechenden Stelle der Basilarmembran 6000, und an der auf 2000 Schwingungen abgestimmten Stelle über 1000000 mal so groß war, als sie nötig ist, um für den richtigen Ton eine eben merkliche Empfindung zu bewirken. Hierin liegt ein so starker Widerspruch, daß man nach M. Wien die Resonanztheorie überhaupt fallen lassen müßte, wenn es nicht gelänge, denselben zu lösen.

Die Lösung des Widerspruches ergibt sich nun aber, wie ich glaube, ohne Mühe, wenn man sich die oben ausführlich

geschilderten Vorgänge bei der Übertragung der Schwingungen auf die Basilarmembran und bei der Reizung der diese Schwingungen mitmachenden Hörzellen vergegenwärtigt.

Die auf der Seite der Vorhofstreppe annähernd parallel mit der Basilarmembran in die Flüssigkeit hereinragende Cortische Membran (Membrana tectoria, vgl. Fig. 1 und Fig. 4) kann bei den senkrecht zur Basilarmembran gerichteten Bewegungen der Labyrinthflüssigkeit nicht in Ruhe verharren; sie wird sich wie eine Schicht dieser Flüssigkeit an den regelmäßigen Schwingungen derselben beteiligen. Würde nun die Basilarmembran stets in ihrer ganzen Längsausdehnung die gleichen Schwingungen ausführen, so könnte eine Reizung der Nerven nicht stattfinden; denn dann würden ja die Härchen der Nervenzellen und die Cortische Membran ihre gegenseitige Entfernung auch bei der Schwingung beibehalten. Erst dadurch, daß ein oder mehrere beschränkte radiale Streifen der Basilarmembran mit größerer Amplitude schwingen und sich gegen die übrige Membran hervorwölben, sind an diesen Stellen die Bedingungen zum Antreffen der Härchen an die Cortische Membran und damit zur mechanischen Reizung der Nerven gegeben; denn bei intermittierendem Druck auf einen Nerven, so wie er sich etwa mit Hilfe des Heidenhainschen Tetanomotors ausführen läßt, wird derselbe tatsächlich in Erregung versetzt.

Dringt also ein einfacher Ton in die Vorhofstreppe ein, so wird ein schmaler Streifen der Basilarmembran in Schwingungen von relativ großer Amplitude versetzt. Die ganze übrige Membran bleibt aber dabei nicht vollkommen in Ruhe, sondern schwingt mit einer Amplitude mit, welche nach dem obigen etwa nur den 27. bis 28. Teil der maximalen Amplitude des Resonanzstreifens bildet (abgesehen von der Verringerung der Amplitude nach der Schneckenkuppel zu). Mit der gleichen kleinen Amplitude muß aber dann auch die Flüssigkeit in der Vorhofstreppe und im Ductus cochlearis schwingen, da ja der Resonanzstreifen nur einen sehr kleinen Bruchteil der Basilarmembran ausmacht. Mit der gleichen Amplitude wie die ganze Basilarmembran auf beiden Seiten des Resonanzstreifens muß demnach auch die Cortische Membran hin- und herschwingen, so daß selbst bei sehr großer

Intensität des erregenden Tones keine Reizung der Nerven mit Ausnahme der zum Resonanzstreifen gehörenden eintreten kann.

Damit klärt sich aber wohl in ungezwungener Weise die Erscheinung auf, daß selbst bei den stärksten Tönen, welche in das Ohr eindringen, niemals andere Töne mit empfunden werden, trotzdem dabei die Basilarmembran in ihrem ganzen Umfange in Schwingungen versetzt wird, deren Amplitude zur Reizung der Nerven an jeder Stelle vollkommen ausreicht, um für den richtigen, dieser Stelle entsprechenden Ton eine Empfindung hervorzurufen.

Da sich diese Folgerung nahezu von selbst aufdrängt, nachdem man sich einen klaren Einblick in die Vorgänge innerhalb des Schneckenkanals bei der Klanganalyse verschafft hat, so bin ich oben auf den anatomischen Bau des Labyrinths und die Schwingungen im Innern desselben ausführlicher eingegangen, als es vielleicht für manchen Leser nötig gewesen wäre.

Leipzig, Dezember 1907.

(Eingegangen 13. Dezember 1907.)

8. *Über die Theorie des Gleichstromgenerators; von P. Riebesell.*

§ 1. Einleitung.

Mit der Einführung der Wendepole begann eine neue Ära im Gleichstrommaschinenbau. Die Funkengrenze, die bisher hauptsächlich die Konstruktion beeinflußte, wurde weit hinausgeschoben, ja die Erwärmungsgrenze wurde als einziges Hindernis bezeichnet, die Leistung der Maschine unbegrenzt zu steigern.[1]) Eine wissenschaftlich begründete Anordnung der Wendepole hat jedoch eine exakte Vorausberechnung der Maschine zur Voraussetzung; vor allem ist es nötig, Klarheit über die *Vorgänge in der Kommutierungszone* zu besitzen. Die *elektrischen Vorgänge* sind für den einfachen Fall, daß die Bürstenbreite gleich der Lamellenbreite ist, durch zahlreiche Abhandlungen genügend geklärt.[2]) Die *magnetischen Erscheinungen* sind erst neuerdings in den Kreis der Betrachtungen gezogen[3]), und vor kurzem ist auch das Problem für *zahlreiche überdeckte Lamellen* einer Lösung zugeführt.[4]) Die Resultate, die sich ergeben haben, sollen im folgenden durch eine bisher unberücksichtigt gebliebene Beziehung ergänzt werden.[5])

---

1) G. Dettmar, Elektrotechn. Zeitschr. p. 23. 1906.

2) J. Fischer-Hinnen, Elektrotechn. Zeitschr. p. 850. 1898; derselbe, Die Wirkungsweise, Berechnung und Konstruktion der Gleichstrommaschinen. 5. Aufl. Zürich 1903; E. Arnold und G. Mie, Elektrotechn. Zeitschr. p. 97. 1899; E. Arnold, Die Gleichstrommaschine. 2. Aufl. Berlin 1906; P. Riebesell, Über den Kurzschluß der Spulen usw., Dissertation, Kiel 1905.

3) R. Pohl, Über magnetische Wirkungen der Kurzschlußströme, Stuttgart 1905; P. Riebesell, Zeitschr. für Math. u. Physik, 53. p. 337. 1906.

4) R. Rüdenberg, Theorie der Kommutation in Gleichstrommaschinen, Stuttgart 1907.

5) P. Riebesell, l. c. und Elektrotechn. Zeitschr. p. 491. 1906; C. Menges, Elektrotechn. Zeitschr. p. 1127. 1906.

§ 2. Die elektrischen Vorgänge in den Kurzschlußspulen.

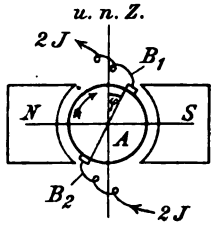


Fig. 1.

Wird die in Fig. 1 dargestellte, fremderregte zweipolig Maschine mit glattem Ringanker den Betrachtungen zugrund gelegt, so gibt Fig. 2 die Stromverteilung an.

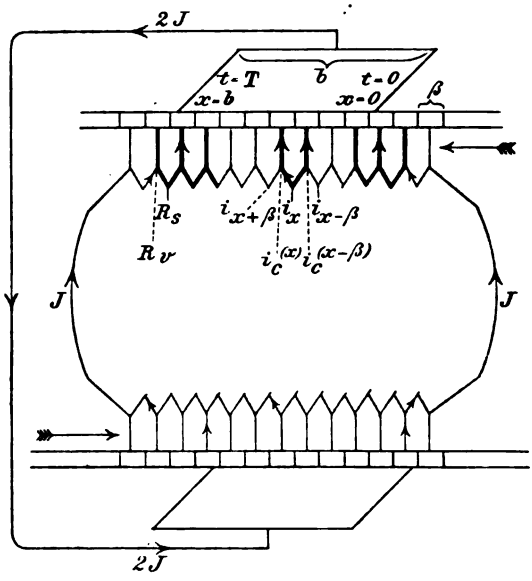


Fig. 2.

x sei die Entfernung eines beliebigen Punktes des Kollektorumfange von der auflaufenden Bürstenkante an gerechnet,
t die Zeit vom Beginn des Kurzschlusses an,
T die Dauer des Kurzschlusses in einer Spule,
J der Ankerzweigstrom,
i der Kurzschlußstrom,
i_c der Strom in den Kollektorverbindungen,

b die Bürstenbreite,
β die Lamellenbreite,
l die Anker- bzw. Kollektorlänge,
R_s der Widerstand einer Spule,
R_v der Widerstand einer Kollektorverbindung,
R_k der spezifische Übergangswiderstand zwischen Kollektor und Bürste.

Betrachten wir eine Spule *unter dem mittleren Teil* der Bürste, so ist:

(1) $$i_c^{(x)} = i_x - i_{x+\beta} = -\Delta i.$$

Sind viele Spulen kurzgeschlossen, so sind β und Δi klein; dann ist:

(2) $$i_c^{(x)} = -\beta \frac{di}{dx}.$$

Die Ohmschen Spannungsverluste in den einzelnen Teilen der betrachteten Spule sind:

$$-i_c^{(x-\beta)}\left(R_v + \frac{R_k}{l.\beta}\right),$$

$$+i_x . R_s$$

und

$$+i_c^{(x)}\left(R_v + \frac{R_k}{l.\beta}\right).$$

Nun ist:

$$i_c^{(x-\beta)} - i_c^{(x)} = i_{x-\beta} - 2i_x + i_{x+\beta} = \Delta^2 i.$$

Wir werden hier also eigentlich auf ein *Problem der Differenzenrechnung* geführt.[1]) Für eine große Zahl der überdeckten Lamellen gilt jedoch:

(3) $$\Delta^2 i = \beta^2 \frac{d^2 i}{dx^2}.$$

Haben alle Spulen gleichartige Lage, so ist:

$$\frac{di}{dx} = \frac{T}{b}\frac{di}{dt} = \frac{1}{b}\cdot\frac{di}{d\vartheta},$$

wenn $t/T = \vartheta$ gesetzt wird.

Dann ist der Spannungsverlust:

(4) $$V_i = i . R_s - R_b \cdot \frac{d^2 i}{d\vartheta^2},$$

wenn

$$\left(\frac{\beta}{b}\right)^2\left(R_v + \frac{R_k}{l.\beta}\right) = R_b$$

gesetzt wird.

---

1) R. Rüdenberg, l. c.

Betrachten wir eine Spule, die gerade die Bürste *verläßt*, so ist der Spannungsverlust:

$$V_e = -i_c\left(R_v + \frac{R_k}{l.\beta}\right) + R_s i + (J+i)\left(R_v + \frac{R_k}{l.\beta\,\frac{T-t}{T}}\right).$$

Oder:

$$V_e = i.R_s - \frac{i_c b^2 R_b}{\beta^2} + (J+i)\left[R_v + \frac{R_k}{l.\beta(1-\vartheta)}\right]. \tag{5}$$

Für eine Spule, die gerade in den Kurzschluß *tritt*, gilt entsprechend:

$$V_a = i_c\left(R_v + \frac{R_k}{l.\beta}\right) + R_s i - (J-i)\left(R_v + \frac{R_k}{l.\beta\,\frac{t}{T}}\right).$$

Oder:

$$V_a = i.R_s + \frac{i_c b^2 R_b}{\beta^2} - (J-i)\left(R_v + \frac{R_k}{l.\beta.\vartheta}\right). \tag{6}$$

§ 8. Die magnetischen Vorgänge in der Kommutierungszone.

Die kurzgeschlossenen Ankerspulen befinden sich in einem *räumlich und zeitlich* variablen Magnetfelde.

Ist N die Zahl der durch eine Windung gehenden Kraftlinien, so ist die induzierte elektromotorische Kraft:

$$E = -\frac{dN}{dt}.10^{-8}. \tag{7}$$

Die Änderung der Kraftlinienzahl ist aber teils eine zeitliche bei fester Spulenlage, teils durch die Bewegung der Spule verursacht. Demnach ist:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial N}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial N}{\partial t}$$

oder

$$\frac{dN}{dt} = v.\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial t}, \tag{8}$$

wenn v die Ankergeschwindigkeit bezeichnet.

Diese Gleichung zeigt uns, daß wir das in der Kommutierungszone vorhandene Feld in zwei Bestandteile zerlegen können, von denen der eine im Raum feststeht, während der andere sich gemeinsam mit dem Anker bewegt.[1]) Der erste

1) R. Rüdenberg, l. c.

Teil wird gebildet von dem Felde der Haupt- und Hilfspole, sowie dem Ankerfeld, einschließlich der Kurzschlußströme, der zweite Teil gibt die von der Bewegung unabhängige Schwankung der Induktion an; sie wird hervorgerufen durch diejenigen Linien, die die Drähte eng umschließen und die als Selbstinduktionslinien zu deuten sind. Der erste Teil gibt somit auch die elektromotorische Kraft an, die durch das eigentliche Schneiden der Kraftlinien infolge der Bewegung entsteht, während der zweite Teil die Änderung infolge der Variation von i bzw. J angibt.

Nennen wir die von den *Hauptpolen* erzeugte Feldintensität F und die infolge des *Ankerstromes*, ausschließlich der Kurzschlußströme, erzeugte Ankerintensität A, so ist die Zahl der Kraftlinien, die diese beiden Komponenten durch eine kurzgeschlossene Windung zur Zeit t hindurchsenden, nach Fig. 1 [1]):

$$N_1 = f[F\cos(\varphi + 2\pi n t) + A\sin 2\pi n t], \tag{9}$$

wo $2f$ die Windungsfläche, φ den Bürstenverschiebungswinkel beim Beginn des Kurzschlusses (in Bogenmaß gemessen) und n die Umdrehungszahl des Ankers bezeichnet.

Daraus folgt:

$$E_1 = 2\pi n f[F\sin(\varphi + 2\pi n t) - A\cos 2\pi n t]\,.\,10^{-8}. \tag{10}$$

Hierzu kommt das Feld, das durch die Amperewindungen des *Kurzschlußstromes* i hervorgerufen wird.

Allgemein ist die Kurve der magnetisierenden Kraft die Integralkurve der räumlichen Verteilung der linearen Stromdichte. Also ist die Amperewindungszahl der Kurzschlußströme:

$$A\,W_k = \int_0^x j\,dx - \tfrac{1}{2}\int^{(b)} j\,dx, \tag{11}$$

wo die lineare Stromdichte $j = i\,.\,N_w/\pi D$ ist. Hierin bedeutet N_w die Drahtzahl und D den Ankerdurchmesser. Dann ist:

$$A\,W_k = \frac{b}{T}\cdot\frac{N_w}{\pi D}\left\{\int_0^t i\,dt - \tfrac{1}{2}\int_0^T i\,dt\right\}. \tag{12}$$

---

1) P. Riebesell, l. c.

Aus den Amperewindungen ergibt sich die Induktion durch die Gleichung:

$$\text{Ind.} = \mu_1 \cdot A W_k, \tag{13}$$

wo μ_1 ein durch die Dimensionen und das Material der Polschuhe, des Ankereisens und des Luftabstandes bedingter Faktor ist, der als konstant betrachtet werden soll.

Nehmen wir an, daß das durch die Kurzschlußströme erzeugte Feld sich wie ein homogenes verhält, so ist die dadurch in einer Spule induzierte elektromotorische Kraft:

$$E_2 = \frac{\mu_1 \cdot w_1 \cdot N_w \cdot f \cdot v^2}{\pi D} \left\{ \int_0^t i\,dt - \tfrac{1}{2} \int_0^T i\,dt \right\} 10^{-8}, \tag{14}$$

wenn w_1 die Anzahl der Windungen in jeder Spule bezeichnet.

Setzen wir den „*Selbstinduktionskoeffizienten zweiter Art*“[1]):

$$Q = \frac{\mu_1 w_1 N_w f b^2}{\pi D} \cdot 10^{-8}, \tag{15}$$

so ist:

$$E_2 = \frac{Q}{T} \int_0^{\vartheta} i\,d\vartheta - \frac{Q}{2T} \int_0^1 i\,d\vartheta. \tag{16}$$

Andererseits ist die Feldintensität:

$$F = \mu_2 w_2 \Im,$$

wo μ_2 ein Faktor ähnlich μ_1, und $w_2 \Im$ die Erregeramperewindungen bezeichnen.

Ebenso ist:

$$A = \mu_3 (k - 2u) w_1 J,$$

wenn k Kollektorlamellen oder Spulen vorhanden sind, von denen u unter jeder Bürste sich im Kurzschluß befinden.

Dann ergibt sich, wenn

$$2\pi f w_1 w_2 \mu_2 \cdot 10^{-8} = S_1,$$
$$2\pi f w_1^2 (k - 2u) \mu_3 \cdot 10^{-8} = S_2$$

und $2\pi n T = a$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} E = w_1 E_1 + E_2 &= n S_1 \Im \sin(\varphi + a\vartheta) - n S_2 J \cos a\vartheta \\ &+ \frac{Q}{T} \int_0^{\vartheta} i\,d\vartheta - \frac{Q}{2T} \int_0^1 i\,d\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

1) R. Rüdenberg, l. c.

Dabei sind die Hilfspole nicht berücksichtigt; ihre Wirkung würde jedoch durch eine Änderung in S_2 leicht ausgedrückt werden können. Außerdem ist die Annahme gemacht, daß die momentanen Schwankungen des Ankerstromes J auf die magnetische Verkettung der Spulen keinen wesentlichen Einfluß ausüben.

§ 4. Die Kurzschlußgleichungen.

Durch die Anwendung der Kirchhoffschen Sätze auf die Stromverteilung der Fig. 2 ergeben sich folgende Gleichungen:

1. Die Anfangsgleichung.

$$(18)\quad \frac{L_s}{T}\frac{di}{d\vartheta} + i.R_s - (J-i)\left(R_v + \frac{R_k}{l.\beta\vartheta}\right) + i_c\frac{b^2}{\beta^2}R_b + E = 0.$$

Die Gültigkeitsdauer dieser Gleichung ist das Intervall

$$0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\beta}{b};$$

die Anfangsbedingung ist: $\vartheta = 0$, $i = J$.

Daß diese Bedingung erfüllbar ist, obgleich $\vartheta = 0$ singulärer Punkt der Differentialgleichung ist, ergibt die nähere Diskussion, die $\vartheta = 0$, $i = J$ als sogenannten „Sattelpunkt" feststellt.[1])

$L_s/T.di/d\vartheta$ stellt in der Gleichung (18) denjenigen Teil der induzierten elektromotorischen Kraft dar, der in Gleichung (8) als durch die zeitliche Schwankung des Feldes hervorgerufen bezeichnet wurde.[2])

In den alten Kommutationstheorien stellte L_s gewöhnlich den Selbstinduktionskoeffizienten der Spule dar, und man fügte noch ein ähnliches Glied für die gegenseitige Induktion der übrigen kurzgeschlossenen Stromkreise hinzu. Diese die übrigen Spulen durchsetzenden Kraftlinien haben wir aber schon bei der Berechnung des Selbstinduktionskoeffizienten zweiter Art Q berücksichtigt, ihre Wirkungsweise ist in E der Gleichung (17) enthalten, so daß L_s die reinen Selbstinduktionslinien bezeichnen soll.

---

1) Briot u. Bouquet, Journal de l'École Polytechnique, cah. 36; H. Poincaré, Journal de l'École Polytechnique, cah. 45; P. Riebesell, Elektrotechn. Zeitschr. p. 62. 1906.

2) Über die Berechnung von L_s vgl. R. Rüdenberg, l. c.

Ist aber E praktisch an einer Maschine durch Intensitätsmessung des Kommutationsfeldes bestimmt, so darf, wenn dieser Wert in die Differentialgleichung eingesetzt wird, die Wirkung der Selbstinduktion in derselben nicht mehr berücksichtigt werden, das Glied $L_e/T.\,di/d\vartheta$ hat also zu fehlen.

Soll überhaupt die Wirkung der Selbstinduktion durch das äußere Feld aufgehoben werden, soll also die sogenannte „Widerstandskommutation" erreicht werden, so finden sich die Bürsten tatsächlich in der wahren neutralen Zone.[1]) In der Differentialgleichung müssen aber die einzelnen Komponenten der kommutierenden elektromotorischen Kraft berücksichtigt werden, und wenn gesagt wird, daß die Bürsten aus der neutralen Zone entfernt werden müssen, so ist damit entweder die ursprüngliche oder diejenige gedachte resultierende neutrale Zone gemeint, die durch Anker und Feldmagnete entsteht. Um aus den Differentialgleichungen die günstigen Bedingungen zu folgern, müssen die einzelnen Komponenten der elektromotorischen Kraft in ihrer Abhängigkeit von t, i und J berücksichtigt werden.

Zu der Gleichung (18) gelangt man aber auch, indem man die Selbst- und gegenseitige Induktion erster Art einführt und mit denjenigen Kraftlinien rechnet, die *durch* benachbarte Windungen *hindurchtreten.* Die Koeffizienten der gegenseitigen Induktion erster Art sind als mit der Spulenentfernung x linear abnehmende Funktionen aufzufassen, und diese Abnahme führt auf eine Induktion zweiter Art, zu der wir hier gelangt sind, indem wir diejenigen Kraftlinien berücksichtigt haben, die *zwischen* zwei benachbarten Windungen hindurch den *Anker verlassen.*[2])

Die Wirkung der Kurzschlußströme läßt sich somit in der Differentialgleichung durch Koeffizienten erster und zweiter Art berücksichtigen. In (18) ist i_e als konstant anzusehen, der Wert ergibt sich aus $di/d\delta$, welches durch die folgende Mittelgleichung bestimmt ist.

2. Die Mittelgleichung.

$$-R_b\frac{d^2i}{d\vartheta^2}+\frac{L_e}{T}\frac{di}{d\vartheta}+i.R_e+E=0. \tag{19}$$

1) C. Menges, Elektrotechn. Zeitschr. p. 1058. 1907.
2) R. Rüdenberg, l. c.

Diese Gleichung ist gültig für:

$$\frac{\beta}{b} \leqq \vartheta \leqq 1 - \frac{\beta}{b};$$

die Grenzbedingungen ergeben sich aus (18).

Setzen wir für E den Wert (17) ein und differenzieren, so wird (19) eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung, die durch Quadraturen lösbar ist.

3. Die Endgleichung.

$$(20)\quad \frac{L_s}{T}\frac{di}{d\vartheta} + i.R_s + (J+i)\left[R_v + \frac{R_k}{l\beta(1-\vartheta)}\right] - \frac{i_c b^2 R_b}{\beta^2} + E = 0.$$

Sie gilt in dem Intervall

$$1 - \frac{\beta}{b} \leqq \vartheta \leqq 1,$$

die Anfangsbedingung ergibt sich aus (19).

Über i zur Zeit $\vartheta = 1$ ist von vornherein keine Aussage zu machen, da $\vartheta = 1$ als singulärer Punkt auftritt. Die nähere Diskussion zeigt, daß es ein sogenannter „Knotenpunkt" ist, durch den sämtliche Integralkurven hindurchgehen, so daß immer $i = -J$ ist für $\vartheta = 1$.

§ 5. Die gesamtelektromotorische Kraft.

Die drei Kurzschlußgleichungen liefern den Kurzschlußstrom i als Funktion der Zeit t. Um zu ihrer Lösung zu kommen, hat man allgemein den Ankerstrom J als unabhängig von der Zeit angenommen, und die Folgerungen, die man aus den Lösungen zog, haben zum Teil der Praxis genügt, zum Teil widersprachen sie ihr jedoch geradezu.[1]) Der Grund dafür liegt darin, daß man eine wichtige Beziehung vernachlässigt hat, die man durch Anwendung des Kirchhoffschen Satzes auf den äußeren Stromkreis erhält. Bereits in meiner Dissertation habe ich darauf hingewiesen, daß man *neben den Kurzschlußgleichungen die Hauptgleichung* des Stromes berücksichtigen muß, wie sie aus Fig. 2 abzuleiten ist, und in der Zeitschr. für Math. u. Physik[2]) sowie in der Elektrotechn. Zeitschr.[3]) habe ich

1) P. Riebesell, Elektrotechn. Zeitschr. p. 303. 1906.
2) 55. p. 147. 1907.
3) Elektrotechn. Zeitschr. p. 491. 1906.

einige Folgerungen hieraus gezogen und weitere **Resultate** in Aussicht gestellt. Nach mir hat dann Herr **Menges**[1]) auf diese Gleichung hingewiesen, und aus ihr die Folgerung gezogen, daß sämtliche alten Theorien unrichtig sind. Herrn Menges sind meine Arbeiten, obgleich er mich als Anhänger der alten Theorien nennt, jedenfalls nicht im Original bekannt gewesen, sonst hätte er nicht sagen können, daß er „von ganz neuen Anschauungen des Vorganges ausgehe". Immerhin haben seine Ausführungen dazu beigetragen, die Wichtigkeit der Hauptgleichung zu zeigen, wenn auch seine Schlußfolgerungen, wie weiter unten bewiesen wird, nicht richtig sind. Neuerdings ist von Herrn Rüdenberg eine Lösung des Problems angekündigt[2]), doch ist bereits *vorher die Auflösung der simultanen Differentialgleichungen* von mir vorgenommen.[3])

Um die Vorgänge im Ankerstromkreis beurteilen zu können, müssen wir zunächst die *gesamtelektromotorische Kraft*: E^* berechnen, die bei der Rotation des Ankers erzeugt wird. Die durch eine Windung zur Zeit t hindurchgehende Kraftlinienzahl ist nach (9) und (14):

$$(21)\quad \begin{cases} N = f[\mu_2 w_2 \Im \cos(\varphi + 2\pi n t) + \mu_3 (k - 2u) w_1 J \sin 2\pi n t] \\ \qquad\qquad + \frac{E_2}{w_1 v} \cdot 10^8. \end{cases}$$

Die in einer Windung nach Schluß des Kurzschlusses bis zum Wiederbeginn desselben unter der anderen Bürste während der Umdrehung erzeugte mittlere elektromotorische Kraft ist nun:

$$e_1 = \frac{\int_T^{\frac{1}{2u}} E\,dt}{\frac{1}{2n} - T}.$$

Da aber $E = -\,dN/dt \,.\, 10^{-8}$ war, so ergibt sich, wenn man berücksichtigt, daß $T = u/nk$:

1) C. Menges, Elektrotechn. Zeitschr. p. 1127. 1906.

2) R. Rüdenberg, Elektrotechn. Zeitschr. p. 1073. 1907.

3) P. Riebesell, Elektrotechn. Zeitschr. 1908, einer der nächsten Nummern.

$$e_1 = -\frac{2nf10^{-8}}{1-2nT}\Big[\mu_2 w_2 \Im\Big\{\cos(\varphi+\pi) - \cos\Big(\varphi + \frac{2\pi u}{k}\Big)\Big\}$$

$$-\mu_3 (k-2u) w_1 J \sin\frac{2\pi u}{k} + \frac{Q.10^8}{v w_1 T f}\int_T^{\frac{1}{2n}} i\, d\vartheta\Big].$$

Da $(k/2-u)w_1$ Windungen für die gesamte elektromotorische Kraft: E^* der Maschine in Betracht kommen, so ist:

$$(22)\quad \begin{cases} E^* = n k w_1 f.10^{-8}\Big[\mu_2 w_2 \Im\Big\{\cos\varphi + \cos\Big(\varphi + \frac{2\pi u}{k}\Big)\Big\} \\ \qquad + \mu_3 (k-2u) w_1 J \sin\frac{2\pi u}{k} - \frac{Q.10^8}{v.w_1 T f}\int_T^{\frac{1}{2n}} i\, d\vartheta\Big]. \end{cases}$$

§ 6. Die Hauptgleichung.

Nach dem Kirchhoffschen Satz ergibt sich aus Fig. 2, wenn der äußere Widerstand W_a und der gesamte Widerstand des betreffenden Ankerzweiges: $2R_v + R_s(k/2-u) = W_i$ gesetzt wird:

$$(23)\quad \begin{cases} E^* - \frac{L}{T}\frac{dJ}{d\vartheta} = 2JW_a + JW_i + (J+i)\frac{R_k}{l.\beta(1-\vartheta)} \\ \qquad\qquad + (J-i)\frac{R_k}{l.\beta\vartheta}. \end{cases}$$

Hierbei bedeutet L den Selbstinduktionskoeffizienten im Anker und in der äußeren Leitung. Da von den drei Kurzschlußgleichungen zu einer gegebenen Zeit immer nur eine gültig ist, so haben wir *zwei simultane Differentialgleichungen* für i und J zu berücksichtigen. Es ist daher nicht richtig, J von vornherein als *konstant* anzunehmen.[1]) Da es hauptsächlich auf den Beginn und den Schluß der Kurzschlußzeit ankommt, können wir die drei Gleichungen (18), (19) und (20) durch eine ersetzen, nämlich diejenige, welche für *eine* überdeckte Lamelle, d. h. für $b = \beta$ gültig ist. In ihr sind nämlich die einzelnen Probleme vereint enthalten, und die exakte Lösung der drei Gleichungen bietet keine größere Schwierigkeiten, es würden

1) W. Siebert, Elektrotechn. Zeitschr. p. 523. 1906; K. Waldmann, Elektrotechn. Zeitschr. p. 491. 1906; P. Riebesell, Elektrotechn. Zeitschr. p. 491. 1906.

sich nur die Resultate wesentlich unübersichtlicher gestalten. Sehen wir vorläufig von der magnetischen Rückwirkung der Kurzschlußströme ab und entwickeln wir E in (17) nach Potenzen von t, so können wir in erster Annäherung

$$E = P_1 + P_2 t$$

setzen. Dann erhalten wir die *Kurzschlußdifferentialgleichung* in der altbekannten Form:

$$(24)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{di}{d\vartheta} + i\left(\tau' + \frac{\tau}{\vartheta} + \frac{\tau}{1-\vartheta}\right) + J\left(\frac{\tau}{1-\vartheta} - \frac{\tau}{\vartheta}\right) \\ \qquad\qquad + P_1 \frac{T}{L_a} + P_2 \frac{T^2}{L_a}\vartheta = 0, \end{array} \right.$$

wo

$$\tau = \frac{R_k \cdot T}{l \cdot b \cdot L_a} \quad \text{und} \quad \tau' = \frac{R_a \cdot T}{L_a}.$$

Dazu kommt als *Hauptgleichung*:

$$(25)\quad \frac{dJ}{d\vartheta} + J\left(\lambda' + \frac{\lambda}{\vartheta} + \frac{\lambda}{1-\vartheta}\right) + i\left(\frac{\lambda}{1-\vartheta} - \frac{\lambda}{\vartheta}\right) - E^* \frac{T}{L} = 0,$$

wo

$$\lambda' = (2 W_a + W_i) \frac{T}{L} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{R_k \cdot T}{l \cdot b \cdot L}.$$

Dabei sei die Abhängigkeit der Größen E^*, P_1 und P_2 von i und J unberücksichtigt gelassen.

Diese beiden Gleichungen legt auch Hr. Menges seinen Ausführungen zugrunde, nur fehlt bei ihm das erste Glied der Gleichung (25), d. h. er vernachlässigt die Selbstinduktion im Anker- und im äußeren Stromkreis. Das ist aber durchaus unzulässig; denn wenn im Kurzschlußstromkreis, der sich nur über wenige Spulen erstreckt, die Wirkung der Selbstinduktion berücksichtigt wird, so muß um so mehr L in den übrigen Ankerspulen und in der Außenleitung in Rechnung gezogen werden. Bei symmetrischen Maschinen kam die gegenseitige Induktion, die im übrigen nur eine dämpfende Wirkung ausüben würde[1]), vernachlässigt werden.

§ 7. Die ablaufende Bürstenkante.

Die Ursachen der Funkenbildung führte man früher allein darauf zurück, daß infolge der Selbstinduktion der Strom i

1) G. Benischke, Elektrotechnik u. Maschinenbau 1906. Heft 47.

zur Zeit T noch nicht zu $-J$ kommutiert wäre, und daher am Schluß der Kurzschlußperiode eine Unterbrechung des Stromes stattfände. Die Diskussion von (24) zeigt jedoch, daß zur Zeit $t = T$ die Stromstärke i immer gleich $-J$ ist, die Funken daher nur durch die große Spannungsdifferenz erzeugt werden können. Die Potentialdifferenz an der ablaufenden Lamelle ist nun $R_k(J+i)/l.b(1-\vartheta)$, also für $x = 1$:

$$-\frac{R_k}{l.b}\left(\frac{di}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=1},$$

d. h. proportional $(di/d\vartheta)_{\vartheta=1}$.

Nun ergibt sich durch Auflösung von (24), daß i darstellbar ist in der Form:

$$i = \mathfrak{P}(1-\vartheta) + C.e^{-\tau'\vartheta}\left(\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\right)^{-\tau},$$

wo $\mathfrak{P}(1-\vartheta)$ eine Potenzreihe von $1-\vartheta$ ist. Daraus folgt, daß

$$\left(\frac{di}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=1} = \infty$$

wird, für $\tau \leqq 1$, so daß

$$\tau > 1$$

als *unerläßliche Bedingung für Funkenfreiheit* auftritt. Betrachten wir jetzt aber (25), ohne das erste Glied zu berücksichtigen, so sehen wir, daß dort die Potentialdifferenz

$$\left[\frac{(J+i)\lambda}{1-\vartheta}\right]_{\vartheta=1}$$

niemals unendlich werden kann. Dies ist der Widerspruch, den Hr. Menges den alten Theorien vorwirft.

Nun gilt aber der Grenzübergang auf $(di/d\vartheta)_{\vartheta=1}$ in (24) und (25) nur, wenn J konstant ist, bei Berücksichtigung der Variabilität von J ist die Potentialdifferenz proportional:

$$\left[\frac{d(J+i)}{d\vartheta}\right]_{\vartheta=1}.$$

Lassen wir zunächst L unberücksichtigt, so haben wir folgende zwei Gleichungen aufzulösen:

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{di}{d\vartheta} + i\left(\tau' + \dfrac{\tau}{\vartheta} - \dfrac{\tau}{1-\vartheta}\right) + J\left(\dfrac{\tau}{1-\vartheta} - \dfrac{\tau}{\vartheta}\right) \\ \qquad\qquad + P_1\dfrac{T}{L_s} + P_2\dfrac{T^2}{L_s}\vartheta = 0 \end{array}\right.$$

und

$$(27)\quad J\left(\lambda' + \frac{\lambda}{\vartheta} + \frac{\lambda}{1-\vartheta}\right) + i\left(\frac{\lambda}{1-\vartheta} - \frac{\lambda}{\vartheta}\right) - E^*\frac{T}{L} = 0.$$

Für den Fall der unendlich großen Potentialdifferenz ist der Grenzübergang zu $dJ/d\vartheta$ und $di/d\vartheta$ direkt in den Gleichungen (26) und (27) nicht gestattet, auch ist es nicht ohne weiteres ersichtlich, ob

$$\left(\frac{dJ}{d\vartheta}+\frac{di}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=1}$$

nicht unendlich werden kann. Eliminieren wir aber J in (26) durch (27), so erhalten wir eine Gleichung von der Form:

$$(28)\quad \frac{di}{d\vartheta}+i\left(\tau'+\frac{B}{\vartheta-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}+\frac{1}{4}}}+\frac{C}{\vartheta-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}+\frac{1}{4}}}\right)+D=0.$$

$\vartheta=0$ und $\vartheta=1$ sind hier keine singulären Punkte mehr, d. h. ein Unendlichwerden der Spannung ist ausgeschlossen; denn J verhält sich wie i regulär. Die singulären Stellen

$$\vartheta=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda'}+\frac{1}{4}}$$

liegen außerhalb der Kurzschlußzeit, kommen also für uns nicht in Betracht. Somit führt auch die strenge Rechnung scheinbar zu dem Ergebnis des Hrn. Menges. Jedoch ist die Gleichung (27) nur so lange gültig, als $(J+i)\lambda/1-\vartheta$, d. h. die Spannung, endlich bleibt; also haben wir von vornherein das Unendlichwerden ausgeschlossen. Das ist offenbar unzulässig; es ist daher von der vollständigen Gleichung (25) auszugehen.

§ 8. Die simultanen Differentialgleichungen.

Die beiden Gleichungen (24) und (25) zeigen durch ihre gleiche Gestalt an, daß sich i und J während der Kurzschlußzeit ganz ähnlich verhalten werden. Die Integration ist nach der d'Alembert-Ampèreschen Methode ausführbar. Die Resultate lassen sich jedoch durch eine *qualitative Diskussion* der Differentialgleichungen *für den Schluß der Kurzschlußzeit* wesentlich vereinfachen. So geht (24) über in:

$$\frac{di}{d\vartheta}-(J-i)\frac{\tau'}{2}+\frac{(J+i)\tau}{1-\vartheta}-\frac{(J-i)\tau}{\vartheta}+P_1\frac{T}{L_e}+P_2\frac{T^2}{L_e}\vartheta=0$$

und (25) in:

$$\frac{dJ}{d\vartheta}+(J-i)\frac{\lambda'}{2}+\frac{(J+i)\lambda}{1-\vartheta}+\frac{(J-i)\lambda}{\vartheta}-E^*\frac{T}{L}=0.$$

Durch Addition ergibt sich:

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d(J+i)}{d\vartheta} + (J-i)\cdot\frac{\lambda'-\tau'}{2} + (J+i)\cdot\frac{\lambda+\tau}{1-\vartheta} + (J-i)\cdot\frac{\lambda-\tau}{\vartheta} \\ &\qquad + P_1\frac{T}{L_s} + P_2\frac{T^2}{L_s}\vartheta - E^*\frac{T}{L} = 0 \end{aligned} \right.$$

und durch Subtraktion:

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d(J-i)}{d\vartheta} + (J-i)\frac{\lambda'+\tau'}{2} + (J+i)\cdot\frac{\lambda-\tau}{1-\vartheta} + (J-i)\cdot\frac{\lambda+\tau}{\vartheta} \\ &\qquad - E^*\frac{T}{L} - P_1\frac{T}{L_s} - P_2\frac{T^2}{L_s}\vartheta = 0. \end{aligned} \right.$$

Bereits aus diesen Gleichungen geht hervor, daß $\vartheta = 1$ für i und J ein Knotenpunkt ist. Die Lösung nach der d'Alembertschen Methode führt auf ganz ähnliche Gleichungen wie die alte Kurzschlußdifferentialgleichung, d. h. $J+i$ ist, wie ja auch schon aus (29) hervorgeht, in folgender Form darstellbar:

$$(31)\qquad J + i = \mathfrak{B}(1-\vartheta) + C.\left(\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\right)^{-(\tau+\lambda)}.$$

§ 9. Die günstigen Bedingungen.

Aus (31) folgt, daß

$$\cdot\left[\frac{d(J+i)}{d\vartheta}\right]_{\vartheta=1},$$

d. h. die Spannung an der ablaufenden Bürstenkante unendlich groß wird, wenn:

$$\tau + \lambda \leqq 1$$

ist. Wir sind somit zu einem wesentlich anderen Resultat gelangt als die alten Kommutationstheorien, und der Widerspruch, der bisher bezüglich der Bedingung $\tau > 1$ zwischen Theorie und Praxis bestand, scheint gelöst. Denn unserer *unerläßlichen Bedingung:*

$$(32)\qquad \tau + \lambda > 1 \quad \text{oder} \quad \frac{R_k \cdot T}{l \cdot b}\cdot\frac{L+L_s}{L \cdot L_s} > 1$$

kann sehr wohl in den Fällen genügt werden, wo die alte Bedingung nicht erfüllt war.

Der *günstigste Verlauf* wird offenbar eintreten, wenn

$$\left(\frac{dJ}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{di}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=1} = 0$$

sind, d. h. wenn:

$$(33)\qquad \begin{cases} J(2\tau+\tau') = P_1\frac{T}{L_s} + P_2\frac{T^2}{L_s} \\ \text{und} \\ J(2\lambda+\lambda') = E^*\frac{T}{L}. \end{cases}$$

Durch genaue Bestimmung von P_1, P_2 und E^* aus (17) und (22) sind hieraus leicht die Bedingungen für den Bürstenverschiebungswinkel φ abzuleiten, oder, falls dieser von Leerlauf bis Vollast konstant sein soll, die Bedingungen für die Dimensionierung der Feldmagnete, der Hilfspole oder des Ankers.

Bisher haben wir angenommen, daß der *Übergangswiderstand* R_k konstant sei. Er ist aber[1]) abhängig von der *Stromdichte* unter der Bürste, von dem Auflagedruck und der Tourenzahl, abgesehen von dem Material der Bürsten und des Kollektors.

Um wenigstens den Haupteinfluß der Stromdichte zu berücksichtigen, können wir setzen:

$$R_k = \frac{\delta}{s_n} + \varepsilon,$$

wo s_n die Übergangsstromdichte, δ und ε Konstante sind. Sind δ und $\varepsilon > 0$, so tritt in (24) ε an Stelle von $R_k/l.b$, während sich sonst nichts Wesentliches ändert. Ist aber, wie dies vorkommen kann, $\varepsilon < 0$, so ändern die Differentialgleichungen ihre Eigenschaften dahin, daß die Punkte $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 1$ sich in ihrer Bedeutung für die Kurzschlußstromkurve vertauschen. Dann ist $\vartheta = 1$ kein Knotenpunkt mehr, und die Funken können, ganz ähnlich wie nach der alten Anschauung, durch zu starkes Anwachsen der Stromstärke hervorgerufen werden. Für den Übergangsfall $\varepsilon = 0$ verschwinden die singulären Punkte $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 1$, i und J ergeben sich als ganze transzendente Funktionen. Dann müßte als günstige Bedingung $i_{\vartheta=1} = -J$ hinzugefügt werden.

§ 10. Zusammenfassung.

Die Differentialgleichungen des Kurzschlußstromes werden für den Fall, daß *eine große Zahl von Lamellen* von der Bürste

1) M. Kahn, Der Übergangswiderstand von Kohlebürsten, Stuttgart 1902; G. Dettmar, Elektrotechn. Zeitschr. 1900; L. Blanc, Ann. de Chim. et Phys. (8) 5. et 6. 1904.

überdeckt wird, in allgemeiner Form aufgestellt. Das in der Kommutierungszone vorhandene Feld wird näher untersucht, der *magnetische Einfluß* der Haupt- und Hilfspole, des Ankerfeldes sowie der Kurzschlußströme wird berechnet und eine angenäherte Formel für die *kommutierende elektromotorische Kraft* aufgestellt. Sodann wird die *gesamtelektromotorische Kraft* der Maschine ermittelt und die „*Hauptgleichung*" aufgestellt. Die Lösung der simultanen Differentialgleichungen (24) und (25) führt *zu wesentlich anderen Resultaten*, als die alte Kommutationstheorie festgestellt hatte. Der *Widerspruch*, der bisher zwischen Theorie und Praxis in bezug auf die günstigen Bedingungen ($R_1 T/L > 1$) bestand, wird durch die neuen Ergebnisse gelöst. Der Ankerstrom J und der Kurzschlußstrom i werden *beide* in ihrer Abhängigkeit von der Zeit untersucht.

Berlin, 19. Dezember 1907.

(Eingegangen 20. Dezember 1907.)

9. *Bemerkung zu der Abhandlung des Hrn. Angerer: „Ursprung der Wärmeentwickelung bei Absorption von Röntgenstrahlen“; von H. A. Bumstead.*

In diesen Annalen (24. p. 370) veröffentlicht Hr. Angerer die Resultate einer Untersuchung, welche er ausgeführt hat, um die Richtigkeit gewisser Versuche zu prüfen, welche ich vor ungefähr zwei Jahren gemacht habe (Phil. Mag., Februar 1906). Meine Versuche schienen zu beweisen, daß, wenn Röntgenstrahlen in gleichem Maße von Blei und von Zink absorbiert werden, im Blei ungefähr die doppelte Wärmemenge entwickelt wird, als im Zink. Hr. Angerer dagegen findet, daß die in beiden Fällen entwickelten Wärmemengen nur um einige Prozent des Gesamteffektes voneinander verschieden sind.

Aus neueren von mir ausgeführten Versuchen muß ich allerdings schließen, daß Hr. Angerer recht hat und daß meine früheren Resultate fehlerhaft waren. Nach meiner Rückkehr von Cambridge, wo ich die Versuche ausgeführt hatte, nach Amerika war ich durch anderweitige dringende Geschäfte für einige Zeit verhindert, diese Untersuchung weiter fortzusetzen. Im Laufe des letzten Sommers und Herbstes war ich jedoch imstande, mich weiter mit dieser Untersuchung zu beschäftigen, und ich habe gefunden, daß der Effekt (wenigstens zu einem großen Teil) darauf zurückzuführen ist, daß bei einem gegebenen Temperaturüberschuß über die Umgebung das Zink schneller Wärme verliert, als das Blei. Dies rührt wahrscheinlich von der Leitung der Stützen und der Zink-

drähte her, welche benutzt wurden, um die Metalle mit der Erde zu verbinden und um die Radiometerflügel vor elektrischen Einflüssen zu beschützen. Durch Verminderung dieser Leitung wird das Verhältnis der Wirkung der Röntgenstrahlen auf das Blei zu der Wirkung auf das Zink von 1,96 (dem früher erhaltenen Wert) auf 1,47 reduziert; dies ist das Mittel aus acht Beobachtungen mit umgekehrten Stellungen der Metallstreifen. Von noch größerer Bedeutung ist es, daß, wenn die Metalle durch das Licht einer elektrischen Glühlampe erwärmt werden, das Blei noch annähernd in demselben Verhältnis, nämlich 1,43, vorherrscht. In diesem Falle waren die Streifen mit Aluminiumanstrich bedeckt. Bei den in Cambridge ausgeführten Versuchen erhielt ich mit Licht gleiche Effekte auf den beiden Metallen, und ich glaubte hieraus schließen zu können, daß der Röntgenstrahleneffekt nicht auf eine Ungleichheit der Geschwindigkeit des Wärmeverlustes zurückzuführen sei. Die Metallstreifen wurden dann mit Aluminiumfolie bedeckt, die durch eine sehr dünne Wachsschicht fixiert war, und ich muß annehmen, daß die Gleichheit der mit Licht erhaltenen Effekte auf eine zufällige Kompensation der ungleichen Wärmeverluste durch eine ungleiche Wärmeaufnahme durch diese Wachsschichten zurückzuführen ist.

Ich habe auch den Versuch in einer Weise auszuführen versucht, die von der Abkühlungsgeschwindigkeit der Metalle unabhängig ist. Zu diesem Zwecke wurden zwei aus Blei und Zink geschnittene Gitter von gleicher Dicke in der Nähe der Radiometerflügel aufgestellt und die Enden mit massiven Elektroden verbunden, so daß ein Strom durch die Gitter gesandt werden und so eine bekannte Menge Wärme in ihnen erzeugt werden konnte. Diese wurde dann mit den Effekten von Röntgenstrahlen auf die Gitter verglichen. Bei diesen Versuchen herrschte anscheinend das Blei im Verhältnis 1,20 vor; allein die Ablenkungen waren so gering, namentlich beim Zink infolge seiner Wärmeleitfähigkeit, daß das Resultat von geringem Wert war.

Aus meinen neuen Versuchen hat sich ergeben, daß es nicht möglich ist, mit dem von mir benutzten Radiometer die Gleichheit der Wärmeeffekte in Blei und Zink ohne einen Fehler von annähernd 10 Proz. zu bestimmen. Ich hatte des-

halb die Absicht, vor Veröffentlichung meiner Resultate die Frage mit Hilfe einer Thermosäule zu prüfen. Eine Verzögerung in der Lieferung des empfindlichen Galvanometers, welches zu diesem Zwecke bei der Weston Instrument Company bestellt war, hat mich an der Ausführung dieses Vorhabens verhindert, und es freut mich, daß die sorgfältigen und genauen Versuche des Hrn. Angerer dies jetzt unnötig gemacht haben.

New Haven, Yale University, 20. November 1907.

(Eingegangen 11. Dezember 1907.)

10. *Über die Entropiefunktion beim Umsatz von chemischer und elektrischer Energie;* *von Emil Kohl.*

I. Vorbemerkungen.

Die in einem früheren Aufsatze durchgeführte Betrachtung der dielektrischen Schwingungen eines Systems ergab bei der Berechnung der kinetischen Energie des schwingenden Teilchens ein Glied, welches auf einen Umsatz chemischer Energie in elektrische innerhalb des Teilchens hindeutete. Zur weiteren Untersuchung einer derartigen Umwandlung eignen sich vor allem die beiden Hauptsätze der Wärmetheorie, da diese alle auftretenden Energiearten auf eine und dieselbe Größe, nämlich die innere Energie des Systems, zu beziehen gestatten, welche als definierende Funktion der Materie des Systems zu betrachten ist. Es soll hier vorläufig die Untersuchung auf den wohlbekannten Fall der Umwandlung von chemischer Energie in elektrische bei der Auflösung eines Metalles in einer leitenden Flüssigkeit beschränkt werden, für welchen bereits v. Helmholtz durch Betrachtung eines umkehrbaren Kreisprozesses die Grundgleichung abgeleitet hat, zu der man aber auch, wie sich zeigen wird, durch wesentlich andere Überlegungen gelangen kann. Das charakteristische Merkmal dieses Falles besteht darin, daß man einerseits den irreversiblen Vorgang der bloßen chemischen Auflösung und andererseits wenigstens theoretisch auch den entsprechenden reversiblen Prozeß in Form des Auftretens eines elektrischen Stromes kennt, wenn sich die Auflösung im galvanischen Elemente vollzieht. Da aber der zweite Hauptsatz nur dann eine mathematische Behandlung zuläßt, wenn die Prozesse reversibel sind, so wird man danach trachten müssen, die reversible Form für den chemischen Vorgang der bloßen Auflösung des Metalles in der Flüssigkeit zu finden. Es wird sich zeigen,

daß man für beide reversible Prozesse, sowohl für den chemischen wie für den elektrischen, auf formell vollkommen gleichgebaute Ausdrücke für die Entropiefunktion und die Arbeitsfunktion gelangt, was physikalisch ja allerdings im voraus wahrscheinlich erscheint, jedoch im Hinblick auf die Verschiedenheit der Zustandsvariablen, welche durch die Verschiedenheit der ins Spiel tretenden Energieformen bedingt ist, immerhin eines direkten Beweises bedarf. Diese Funktionen enthalten außer den Zustandsvariablen nur noch die innere Energie, also jene Größe, welche in gewissem Sinne als mathematischer Ausdruck für den Zusammenhang zwischen den Energien des Systems und dessen Materie als Träger dieser Energien aufgefaßt werden kann und daher als definierende Eigenschaft der Materie des Systems in diese Ausdrücke eintreten muß.

Es mögen vorerst kurz die Sätze angeführt werden, auf welche bei der Definition und Berechnung der Entropiefunktion zurückgegangen werden wird.

Bekanntlich sind die Vorgänge, welche bei Energiewandlungen auftreten, zweifacher Art, nämlich reversibel oder irreversibel, charakterisiert durch die Beziehung $\int_C \Delta Q/T \gtrless 0$, wobei ΔQ die von dem Systeme aus einem Reservoir mit der Temperatur T aufgenommene Wärmemenge bezeichnet und die Integration über eine beliebige geschlossene Kurve C zu erstrecken ist. Bei reversiblen Prozessen ist die Größe $\Delta Q/T$ durch ein vollständiges Differential dS der unabhängigen Zustandsvariablen darstellbar und führt zum Begriffe der Entropiefunktion S, während im Falle eines irreversiblen Prozesses $\int_A^B \Delta Q/T$ überhaupt keinen eindeutig bestimmten Wert hat, da man den Verlauf der äußeren Energieaufnahme auf dem Kurventeile $\overline{AB}$ in beliebiger Weise beeinflussen kann; dieses Integral steht, wenn sein Wert etwa für einen bestimmten irreversiblen Vorgang berechnet wird, in keiner weiteren Beziehung zur Energiefunktion, da diese ausdrücklich durch die Bedingung $\Delta Q/T = dS$ definiert ist. Was ferner die reversiblen Prozesse betrifft, so sind sie dadurch charakterisiert, daß sie Punkt für Punkt auf demselben Wege, aber in ver-

kehrter Richtung, wieder rückgängig gemacht werden können, also aus lauter Gleichgewichtszuständen bestehen; das System verharrt demnach dauernd im selben Zustande, wenn sich die Zustandsvariablen nicht ändern; hieraus folgt weiter, daß sich die Beträge dieser Zustandsvariablen in solchen Teilen des Systems, welche miteinander in thermische Wechselbeziehung treten, nur um unendlich kleine Werte unterscheiden können. Der zweite Hauptsatz sagt nun, daß die Entropie bei jedem irreversiblen Prozesse zunimmt, oder anders ausgedrückt: wenn man von einem Punkte aus durch einen irreversiblen Vorgang zu einem zweiten Punkt gelangt, so besitzt die Entropiefunktion dort einen größeren Wert als im ersten Punkte. Um diesen Satz aber überhaupt aussprechen zu können, muß man die Voraussetzung machen, daß man immer zwei beliebige, auseinander hervorgehende Zustände eines Systems, welche in der Natur überhaupt auftreten können, auch auf reversiblem Wege erreichen kann, da die Entropie nur für diesen definierbar ist; es muß daher zu jedem Gebiete der irreversiblen Vorgänge ein entsprechendes Gebiet von reversiblen Vorgängen geben. Eine weitere Forderung besteht dann weiter darin, daß der reversible Weg einen bestimmten physikalischen Sinn hat, d. h. tatsächlich ausführbar wäre, wenn man die entsprechenden Bedingungen für ihn verwirklichen könnte. Inwieweit dies letztere der Fall ist, berührt die Theorie nicht weiter; jedoch muß man wohl die Möglichkeit des reversiblen Vorganges annehmen, da sonst dem Begriffe der Entropie keine physikalische Bedeutung zukäme, soweit das Gebiet der irreversiblen Prozesse in Betracht kommt.

Was die Aufstellung der mathematischen Form für diese Bedingungen sowie die Entropiefunktion selbst betrifft, so gelingt sie ohne Schwierigkeit, wenn man die den Zustand des Systems bestimmenden Zustandsvariablen anzugeben vermag und außerdem von der während des Prozesses auftretenden Arbeitsenergie weiß, daß sie durch eine Produktensumme aus noch näher zu bestimmenden Faktoren mit den Differentialen dieser Variablen dargestellt werden kann. Man hat dann die Änderung der inneren Energie, welche stets ein vollständiges Differential der Zustandsvariablen ist, um die von dem Systeme reversibel abgegebene Arbeitsenergie zu vermehren, diese

Summe durch die Temperatur zu dividieren und nun die Bedingung, daß dieser Quotient ein vollständiges Differential sein soll, in der bekannten Weise mathematisch zu entwickeln. Man erhält so eine Reihe von Differentialgleichungen, welche eine Funktion von der Eigenschaft definieren, daß

$$\int_C \frac{\Delta Q}{T} = S, \quad \frac{\Delta Q}{T} = dS$$

ist; dies ist dann die gesuchte Entropiefunktion. Diese Funktion wird, da sie aus partiellen Differentialgleichungen abgeleitet wurde, noch willkürliche Funktionen enthalten; diese lassen sich in der Regel dadurch bestimmen, daß man die Entropiefunktion für einen bestimmten Fall, wenn nämlich das System keine Volumenergie besitzt, also $\partial U/\partial V = 0$ ist, aus anderen Betrachtungen kennt. Hierdurch ist jetzt der reversible Vorgang durch einen reversiblen gleichsam überbrückt, es ist also der anfangs gestellten Bedingung Genüge geleistet, daß man jeden Zustand auch auf reversiblen Wege erreichen kann.

II. Die Entropiefunktion für den reversiblen chemischen Prozeß.

Der chemische Vorgang der Auflösung eines Metalles in einer Säure oder Salzlösung unter gleichzeitiger Abscheidung des Kations stellt einen irreversiblen Prozeß dar, wobei unter Vernachlässigung der Arbeit des Luftdruckes die Differenz der inneren Energien des Systems am Anfang und Ende des Prozesses nach dem ersten Hauptsatze als Wärme frei wird; diese Wärmetönung kann als Maß für die Arbeit der chemischen Kräfte zwischen den aufeinander wirkenden Stoffen des Systems betrachtet werden. Das System besteht im allgemeinen aus drei Phasen, nämlich dem festen Metalle, der leitenden Flüssigkeit und dem als Gas oder als Niederschlag ausgeschiedenen Kation. Um hierfür den entsprechenden reversiblen Prozeß zu finden, hat man gemäß den früheren Überlegungen zuerst die unabhängigen Variablen des Systems aufzusuchen und sodann den Ausdruck für die Arbeitsenergie aufzustellen. Es läßt sich leicht zeigen, daß für den hier in Betracht kommenden Vorgang die Temperatur T und das Volum V des Systems diese Variablen sind.

Zu diesem Zwecke möge eine dritte Variable eingeführt werden, nämlich die Menge M_f des in die Flüssigkeit übergegangenen Metalles. Dann läßt sich für die feste und die ausgeschiedene Phase als homogene Körper aus den gegebenen Anfangswerten der Massen mittels M_f auch das Volum dieser Phasen berechnen und der thermische Zustand eindeutig etwa durch die Temperatur, den äußeren Druck und M_f festlegen. Was die Flüssigkeit betrifft, so ist zunächst ihre chemische Zusammensetzung durch M_f bedingt, denn man kann vermöge der stöchiometrischen Beziehungen aus M_f und den anfänglich gelösten Massen die Zusammensetzung vollkommen berechnen. Da eine Flüssigkeit von bekannter chemischer Konstitution bei gegebener Temperatur und Druck jedenfalls ein ganz bestimmtes spezifisches Volum besitzen muß und ihr Gewicht aus den bekannten Anfangsbedingungen mit Hilfe von M_f leicht zu finden ist, so wird das Volum durch Temperatur, Druck und M_f berechenbar sein und der thermische Zustand ist durch diese drei Größen vollkommen bestimmt; statt dieser Variablen lassen sich dann auch beliebige andere Kombinationen zu je dreien, z. B. die Temperatur T, das Volum V und M_f als definierende Zustandsvariable einführen. Eine einfache Überlegung zeigt nun, daß die dritte Variable M_f nicht unabhängig sein kann, sobald der Prozeß reversibel ist, daß also bloß zwei unabhängige Variable, z. B. Temperatur und Volum, zur vollkommenen Bestimmung des thermischen Zustandes ausreichen, von denen M_f selbst abhängt. Es folgt dies aus der Haupteigenschaft dieser Prozesse, daß man zwischen zwei beliebigen Zuständen (T, V, M_f) und (T', V', M_f') auf reversiblem Wege hin und zurück gelangen können soll; es kann daher M_f nicht mehr für jeden Zustand (T, V, M_f) ganz beliebig groß gewählt werden; andererseits treten aber außer T, V und M_f keine weiteren Bestimmungsstücke auf, es muß also M_f selbst durch T und V mitbestimmt sein.

Was nunmehr die Aufstellung des Ausdruckes für die Arbeitsenergie betrifft, so erkennt man aus der Tatsache, daß eine der Zustandsvariablen das Volum ist, sofort die Darstellbarkeit dieser Arbeitsenergie in Form einer Druckarbeit, welche aus einem auf die Oberfläche des ganzen Systems wirkenden hydrostatischen Drucke P zu bestimmen ist. Man hat sich

nun gemäß den früher gegebenen Darlegungen zu fragen, welche Größe dieser äußere Druck besitzen muß, damit seine Arbeit den Prozeß zu einem reversiblen macht; die aus der Bedingungsgleichung

$$\frac{dU + P\,dV}{T} = dS \tag{1}$$

in Form einer Beziehung zwischen T, V und P erhaltene Funktion für P kann dann als die Zustandsgleichung des Systems für das Gebiet der reversiblen Vorgänge aufgefaßt werden. Wenn der äußere Druck kleiner ist als diese Gleichung angibt, so hört der Vorgang auf, reversible zu sein und es tritt wegen des Gesetzes, daß die Entropiefunktion beim irreversiblen Prozesse ständig wächst, die beim reversiblen Vorgange als Maximum zu erhaltende Arbeitsenergie ganz oder zum Teile als mechanisch minderwertige Wärmeenergie auf. Zur Bestimmung des reversiblen Druckes hat man also

$$\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T}dT + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V} + P\right)dV = \frac{\partial S}{\partial T}dT + \frac{\partial S}{\partial V}dV \tag{2}$$

zu bilden, woraus die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T}\right] = \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V} + P\right)\right] \tag{3}$$

und weiter die Beziehung

$$P = T\int \frac{\frac{\partial U}{\partial V}}{T^2}dT + T\psi(V) \tag{4}$$

folgt. Was die willkürliche Funktion $\psi(V)$ betrifft, so läßt sie sich durch folgende Überlegung bestimmen, welche Planck[1]) bei Entwickelung der Theorie der verdünnten Lösungen anwendet. Der in (4) abgeleitete Ausdruck muß für jeden Prozeß gelten, welcher sich an den betrachteten weiter reversibel anschließt. Ein solcher idealer Vorgang wäre der, daß man das Metall in der Flüssigkeit sich ganz auflösen läßt, was bei genügend großer Menge der letzteren stets möglich sein wird, und nun die Flüssigkeit ohne Änderung ihrer Molekülzahlen in Gas verwandelt; die Temperatur soll hierbei so groß gewählt werden, daß auch das etwa als feste Phase aus-

1) M. Planck, Vorlesungen über Thermodynamik. Leipzig 1897, p. 215.

geschiedene Kation vergast wird. Dann ist für den Gaszustand $\partial U/\partial V = 0$; ebenso weiß man, daß dann

$$P = \frac{RT}{V}\sum n_i$$

ist, wobei die Größen n_i die Molekülzahlen der gasförmigen Produkte und R die Gaskonstante bedeutet. Hieraus folgt, daß

$$\psi(V) = \frac{RT}{V}\sum n_i$$

sein muß, woraus man schließlich für P die endgültige Gleichung

$$P = T\int \frac{\frac{\partial U}{\partial V}}{T^2}\,dT + \frac{RT}{V}\sum n_i \tag{5}$$

und hieraus für die Entropiefunktion S den Wert

$$S = \int \frac{U}{T^2}\,dT + \frac{U}{T} + R\sum n_i \log V + C \tag{6}$$

erhält. Die innere Energie U ist hierbei als eine die Materie des Systems definierende Funktion zu betrachten, welche man ihrer Form nach als gegeben voraussetzen muß.

Ganz dasselbe Ergebnis hätte man übrigens auch erhalten, wenn man die Menge der Flüssigkeit außerordentlich groß wählt, so daß sie nach Auflösung des Metalles als sehr verdünnte Lösung betrachtet werden kann und auch das ausgeschiedene Kation gänzlich in gelöstem Zustande enthält. Man kann dann einen Prozeß vornehmen, welcher sofort die Bedeutung von P und dessen Form liefert; er besteht darin, daß man die Flüssigkeit in ein Gefäß mit halbdurchlässigen Wänden bringt und dieses in ein zweites, mit dem reinen Lösungsmittel gefülltes Gefäß stellt. Dann ist P der Druck, welcher auf die Oberfläche der Lösung ausgeübt werden muß, um eine Verdünnung der Salzlösung infolge des Eindringens von Lösungsmittel in die Flüssigkeit zu verhindern; dieser Druck ist aber der bekannte osmotische Druck der Flüssigkeit. Um dies zu zeigen, braucht man sich bloß die Erscheinung des osmotischen Druckes auf Grund der eingangs erwähnten Sätze vor Augen zu führen. Jede Salzlösung hat, wie die Erfahrung zeigt, das Bestreben, sich irreversibel weiter zu verdünnen, und dies kann bei der bekannten Versuchsanordnung zum Nachweise des osmotischen Druckes nur dadurch geschehen, daß eine bestimmte

Menge des Lösungsmittels so lange in die Lösung hineindiffundiert, bis der so erzeugte hydrostatische Druck groß genug geworden ist, um den irreversiblen Diffusionsvorgang zu einem reversiblen Prozesse zu machen. Sobald dieser Grenzdruck gerade erreicht ist, herrscht gemäß einer oben erwähnten Eigenschaft der reversiblen Prozesse für konstant erhaltene Werte dieses Grenzdruckes und der Temperatur dauernd Gleichgewichtszustand, der Diffusionsprozeß kommt also zum Stillstande. Da bei unendlich verdünnten Lösungen die innere Energie die für Gase geltende Haupteigenschaft $\partial U/\partial V = 0$ besitzt, so muß dann P den osmotischen Druck einer unendlich verdünnten Lösung darstellen, woraus sich $\psi(V)$ wieder in der oben entwickelten Gestalt ergibt.

Der durch (5) definierte reversible Druck P hat eine ganz bestimmte physikalische Bedeutung, indem er zusammen mit der Temperatur T solche Zustände definiert, für welche Gleichgewicht im Systeme besteht. Läßt man also auf das System bei der konstant erhaltenen Temperatur T einen konstanten Druck von der durch (5) geforderten Größe wirken, so hört jede weitere Auflösung des Metalles bei der aus T und V bzw. T und P zu berechnenden, bereits in Lösung gegangenen Metallmenge M_f auf. Dieser Druck stellt daher die Lösungstension im Sinne der Nernstschen Theorie dar, da er die Pression angibt, bei welcher bei einer bestimmten Temperatur keine weitere Auflösung des Metalles mehr stattfindet; jedoch ist sein Zahlenwert ein anderer als für die in dieser Theorie aus dem bekannten logarithmischen Gesetze verdünnter Lösungen berechnete Lösungstension.

III. Folgerungen für diesen reversiblen Prozeß.

1. Wenn man dem Begriffe der Entropie eine physikalische Bedeutung zuschreibt, daher die Möglichkeit des reversiblen Vorganges voraussetzt, so folgt aus der zuletzt ausgesprochenen Deutung der Funktion P, daß man durch Ausübung eines genügend hohen Druckes den Vorgang der Auflösung eines Metalles in der Flüssigkeit, ja schließlich jeden chemischen Vorgang überhaupt, wieder reversibel rückgängig machen kann. Allerdings enthalten die thermodynamischen Gleichungen nicht den Zeitbegriff, es ist also über die Dauer,

welcher dieser Vorgang bedarf, keine Aussage möglich. Tatsächlich scheinen manche geologische Erscheinungen auf solche rückläufige Prozesse bei hohen Drucken hinzudeuten.

2. Es sollen nunmehr zwei besondere Fälle des reversiblen Überganges, nämlich der isotherme und der adiabatische, näher untersucht werden. Hierzu möge zunächst für einen mit Volumvergrößerung ($dV > 0$) verlaufenden isothermen Prozeß die von dem Systeme gegen den äußeren Druck P geleistete Arbeit A betrachtet werden, welche durch

$$(7) \qquad A = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = T\int \frac{U_2 - U_1}{T^2}\,dT + TR\sum n_i \log\frac{V_2}{V_1}$$

gegeben ist. Wie man sich sofort durch Einsetzung der Werte überzeugt, genügt A der Gleichung

$$(8) \qquad A = W + T\frac{\partial A}{\partial T},$$

wobei mit W die Wärmetönung $U_1 - U_2$ des Prozesses bezeichnet ist. Die von dem Systeme gegen den äußeren Druck geleistete Arbeit wird also nicht durch die Wärmetönung allein gegeben, sondern fällt größer oder kleiner als diese aus, je nachdem $\partial A/\partial T$ positiv oder negativ ist. Für die folgenden Betrachtungen ist es wichtig, die Bedeutung der Größe $T(\partial A/\partial T)$ zu bestimmen, was durch die Einführung der während des Prozesses von außen aufgenommenen Wärmemenge

$$(9) \qquad \Delta Q = \left(\frac{\partial U}{\partial V} + P\right) dV$$

möglich wird. Aus der allgemeinen Beziehung $\Delta Q/T = dS$ ergibt sich aus (3) für $\partial U/\partial V$ der Wert

$$(10) \qquad \frac{\partial U}{\partial V} = T^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{P}{T}\right) = T\frac{\partial P}{\partial T} - P$$

und hieraus durch Einsetzung in (9)

$$(9') \qquad \Delta Q = T\frac{\partial P}{\partial T}dV = T\frac{\partial}{\partial T}(P\,dV),$$

es ist also die ganze aufgenommene Wärmemenge Q durch

$$(11) \qquad \int \Delta Q = Q = T\frac{\partial A}{\partial T}$$

gegeben, und diese Größe ist eben das in Frage stehende zweite Glied der Gleichung (8). Man erhält demnach den Satz,

daß die während des isothermen Vorganges gegen den äußeren Druck geleistete Arbeit des Systems gleich der Summe aus der Wärmetönung und jener Wärmemenge ist, welche bei diesem Prozesse von außen aufgenommen wird. Es verwandelt sich also nicht nur die ganze innere Volumenergie $(\partial U/\partial V)dV$, sondern außerdem noch die ganze von außen aufgenommene Wärme in Spannungsarbeit. Die entsprechende Fassung der Aussage für den umgekehrten Lauf des Prozesses oder für den Fall, daß $\partial A/\partial T$ negativ ist, ergibt sich nach dem Gesagten von selbst. Die Größe $T(\partial A/\partial T)$ spielt also eine ähnliche Rolle, wie die Verdampfungs- oder Schmelzwärme, überhaupt wie die große Reihe jener Umsetzungswärmen q, welche der Bedingung $q = T(\partial p/\partial T)\Delta V$ genügen, wobei p den bei der Umsetzungstemperatur T herrschenden Druck und ΔV die Volumsänderung während des Umsetzungsprozesses bedeutet.

Für eine große Anzahl von Systemen ist $\partial A/\partial T = 0$ oder wenigstens sehr klein, so daß $\partial U/\partial T = -P$ und $A = W$ wird. Solche Systeme haben die Eigenschaft, daß die Spannungsarbeit gänzlich durch die Änderung der inneren Volumsenergie geleistet wird.

Von Interesse ist die Form der Isotherme. Denkt man sich die V-Achse horizontal, die P-Achse vertikal in der Zeichenebene gelegt, so wird die Kurve, wenn man sie in der Richtung der abnehmenden V verfolgt, mit dem gegebenen Volum der Metallösung und dem durch den osmotischen Druck bestimmten äußeren Drucke beginnen und zunächst sehr steil gegen die P-Achse hin ansteigen, da die Volumabnahme mit wachsender Pression jedenfalls nur gering sein wird. Vom Augenblicke der ersten Metallabscheidung an verläuft die Kurve fast horizontal so lange, bis das ganze Metall wieder ausgeschieden ist, da sich die Lösungstension, solange noch Metall gelöst ist, nicht wesentlich ändern wird. Erst nach vollständiger Metallabscheidung steigt die Kurve wieder sehr steil gegen die P-Achse weiter und besitzt die Gerade $V = V_\infty$ zur Asymptote, wobei V_∞ das dem Drucke $P = \infty$ entsprechende Volum darstellt.

Schließlich ersieht man aus diesen Darlegungen, daß die Funktion A die von v. Helmholtz als *freie Energie* in die Thermodynamik eingeführte Größe darstellt.

3. Eine zweite Folgerung läßt sich aus der Betrachtung des adiabatischen Prozesses ziehen. Es ist für diesen

$$\Delta Q = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} + P\right) dV,$$

oder, wenn $\partial U/\partial V$ aus (10) eingesetzt wird,

$$dT = -\frac{T}{\frac{TU}{\partial T}} \frac{\partial P}{\partial T} dV. \tag{12}$$

Man sieht nun, daß für positive dV die Beziehung $\partial P/\partial T \gtrless 0$ gilt, sobald $\partial \Delta A/\partial T \gtrless 0$ ist, wenn $\Delta A = P\,dV$ gesetzt wird; ferner hat $\partial U/\partial T$ jedenfalls einen positiven Wert, da sich die Temperaturenergie des Systems mit steigender Temperatur vergrößern muß. Hieraus folgt, daß dT das entgegengesetzte Vorzeichen von $\partial \Delta A/\partial T$ und auch von $T(\partial \Delta A/\partial T)$ besitzt, es ist somit nach (9') dT verkehrt bezeichnet mit der während des entsprechenden isothermen Vorganges aufgenommenen unendlich kleinen Wärmemenge ΔQ. Man kann daher den Satz aussprechen: Solche Systeme, welche während eines unendlich kleinen isothermen Vorganges bei Leistung einer Arbeit gegen den äußeren Druck Wärme aufnehmen, kühlen sich bei einem unendlich kleinen adiabatischen Vorgange, welcher bei derselben Temperatur unter Volumsvergrößerung verläuft, ab; wenn jedoch auf der Isotherme Wärme abgegeben wird, so erwärmt sich das System auf der Adiabate. Es rührt dies davon her, daß im ersten Falle die Änderung der inneren Volumsenergie $(\partial U/\partial V)dV$ nicht ausreicht, um die ganze Spannungsarbeit zu liefern, sondern noch ein Teil der inneren Temperaturenergie dazu verwendet werden muß, während im zweiten Falle diese Änderung größer als die Spannungsarbeit ist und der Rest in Wärme verwandelt wird.

IV. Die Entropiefunktion für den reversiblen elektrischen Prozeß.

Um die Entropiefunktion für den reversiblen elektrischen Prozeß aufzustellen, hat man wieder die unabhängigen Variablen aufzusuchen und den Ausdruck für die Arbeitsenergie zu entwickeln. Über eine sinngemäße Herleitung der hier in Betracht kommenden Variablen aus jenen des vorhergegangenen Falles

wird im nächsten Abschnitte gesprochen werden; einstweilen sollen sie in der Form eingeführt werden, wie sie in der Elektrizitätstheorie definiert sind.

Um einen möglichst idealen Fall des reversiblen Prozesses zugrunde zu legen, werde angenommen, daß das sich auflösende Metall einer zweiten Elektrode gegenübersteht, welche sich chemisch vollkommen neutral verhält und keinerlei Veranlassung zu sekundären Prozessen irgendwelcher Art gibt, ferner, daß sich das Kation als fester Niederschlag oder als gasförmige Okklusion an dieser Kathode anlegt, sich also fortwährend in der Lösung befindet.

Was zunächst die Arbeitsenergie betrifft, so ist sie beim elektrolytischen Vorgange durch $Eidt$ dargestellt, wobei E die elektromotorische Kraft, i die Stromstärke und t die Zeit bedeutet; sie kann durch Einschaltung eines sehr großen Widerstandes, wodurch die Joulesche Wärme beliebig klein ausfällt, theoretisch vollständig etwa in Form elektromagnetischer Induktionsarbeit gewonnen werden. Setzt man

$$E = \frac{d\Pi}{dx}, \quad i = \sigma f \frac{dx}{dt},$$

wo Π das herrschende Strompotential, f den Querschnitt des Leiters, dx/dt die Geschwindigkeit und σ die Dichte der Elektrizität bezeichnet, so ist

$$\int Eidt = \int \frac{d\Pi}{dx} \frac{dx}{dt} \sigma f dt = \Pi \sigma f l = \Pi I,$$

wenn I die Strommenge heißt, welche den Leiter während des ganzen Prozesses bereits durchflossen hat; der Arbeitszuwachs ΔA während des Durchtrittes der Strommenge dI ist also $\Delta A = \Pi dI$ zu setzen. Weiter erkennt man, daß die innere Energie offenbar durch die unabhängigen Variablen T und I vollkommen bestimmt ist, wozu außerdem noch der äußere Druck p als dritte unabhängige Variable tritt. Da jedoch die Reversibilität des Vorganges wenigstens innerhalb weiter Grenzen nicht von p abhängt, so kann man von dieser dritten Variablen absehen, wenn man nur berücksichtigt, daß er in der Funktion U als eine beliebig zu wählende Konstante enthalten ist, welche natürlich deren Wert beeinflußt. Wie

diese Tatsache physikalisch zu deuten ist, daß die Reversibilität nicht von p abhängt, darüber wird im nächsten Abschnitte eine Erklärung zu geben versucht werden.

Die zur Bestimmung der Entropiefunktion dienende Gleichung hat also die Gestalt

$$\frac{\Delta Q}{T} = \frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial T}dT + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial I} + \Pi\right)dI = dS,$$

woraus durch ähnliche Betrachtungen wie früher

$$\Pi = T\int \frac{\frac{\partial U}{\partial I}}{T^2}\,dT + T\psi(I) \tag{13}$$

folgt.

V. Bestimmung der Funktion $\psi(I)$.

Zur Bestimmung von $\psi(I)$ wird man wieder einen möglichst einfachen Endzustand, also die Bildung einer unendlich verdünnten Lösung nach vollständiger Auflösung des Metalles in der Flüssigkeit, voraussetzen und für diesen die Funktion Π_0 abzuleiten suchen. Wenn sich nun wieder zeigen läßt, daß $\partial U/\partial I$ dann verschwindet, so ist $T\psi(I)$ unmittelbar diese Potentialfunktion Π_0 und somit $\psi(I)$ seiner Form nach bestimmt. Über diese Form kann man nun durch folgende Betrachtungen einen Aufschluß gewinnen.

Es wurde im zweiten Abschnitte darauf hingewiesen, daß sich beim mechanisch-chemischen reversiblen Prozeß der Zustand des Systems durch zwei unter den vier Variablen T, V, M_f, P bestimmen läßt und daß insbesondere die jeweilig gelöste Metallmenge M_f Funktion von T und V ist. Es liegt nun in Hinblick auf die beiden elektrolytischen Gesetze Faradays der Gedanke nahe, daß die Beschreibung des elektrischen Prozesses durch die Variablen T und I eigentlich identisch ist mit der Einführung der Variablen T und M_f, wenn man noch die Grundvorstellung hinzufügt, daß die Metallmenge M_f eine ganz bestimmte, nicht weiter veränderliche Menge Elektrizität als Strommenge in die Flüssigkeit führt, wodurch dann I auch in M_f dargestellt werden kann. Es hätte demnach die Einführung von M_f als unabhängige Variable neben T die besondere Eigenschaft, daß die in dM_f ausgedrückte nach außen

geleistete Arbeit ΔA ganz unabhängig von dem äußeren Drucke p gerade so groß ist, um den Quotienten $dU + \Delta A/T$ zu einem vollständigen Differential zu machen; für die Variablen T und dV ist dies ja eben nicht der Fall, sondern es muß der äußere Druck seinem Betrage nach gleich der Lösungstension, oder nach vollzogener Auflösung des Metalles, gleich dem osmotischen Drucke gemacht werden, damit der Vorgang reversibel wird. Diese Auffassung liefert eine Erklärung dafür, warum die Reversibilität des elektrolytischen Vorganges nicht von p abhängig ist.

Auf Grund dieser Betrachtungen läßt sich die Überführung der Variablen I und M_f ineinander ohne Schwierigkeit vornehmen. Nach den Faradayschen Gesetzen führt jedes Ion, hier also auch jedes übergehende Metallatom, die Elektrizitätsmenge $\mu\varepsilon$ mit sich, wenn μ die Wertigkeit, ε das elektrische Elementarquantum ist. Wenn daher α das Gewicht des Wasserstoffatoms und m das Atomgewicht des Metalls bezeichnet, so gibt die Metallmenge dM_f Veranlassung zur Bildung einer Strommenge

$$dI = \mu\varepsilon\frac{dM_f}{\alpha m},$$

so daß also die Beziehung

$$I = \beta M_f \left(\beta = \frac{\mu\varepsilon}{\alpha m}\right) \tag{14}$$

besteht. Hieraus folgt, daß die Strommenge I eine ganz bestimmte obere Grenze I_0 besitzen wird, welche erreicht ist, sobald das ganze Metall in Lösung übergegangen ist. Man muß dann auch annehmen, daß in unendlich verdünnten Lösungen die innere Energie die Gleichung

$$\left(\frac{\partial U}{\partial I}\right)_{I=I_0} = 0$$

erfüllt.

Dieses Ergebnis läßt sich übrigens auch mittels Betrachtungen ableiten, welche Planck[1]) für die verdünnten Lösungen anstellt. Man kann nämlich U und V des Systems

1) M. Planck, l. c., p. 212—214.

in Reihen nach M_f entwickeln und sich bei genügender Kleinheit von M_f auf die beiden ersten Glieder beschränken, wodurch man

$$U = U_0 + \left(\frac{\partial U}{\partial M_f}\right)_{M_f=0} M_f = U_0 + a\,M_f, \tag{15 a}$$

$$V = V_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial M_f}\right)_{M_f=0} M_f = V_0 + b\,M_f \tag{15 b}$$

erhält. Die Differentialquotienten

$$\left(\frac{\partial U}{\partial M_f}\right)_0 = a \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial M_f}\right)_0 = b$$

sind hierbei Größen, welche von den ursprünglich gegebenen Anfangswerten von U, bzw. V, abhängen und außerdem Funktionen des äußeren reversiblen Druckes P, nicht aber solche der Menge M_f sind. Bekanntlich weisen die Lösungen von Salzen selbst in verdünntem Zustande ein außerordentlich kompliziertes Verhalten der Funktion V in ihrer Abhängigkeit von der gelösten Menge M_f bei gewöhnlichem Drucke auf[1]; diese Entwickelungen lassen erkennen, daß man nur für das Gebiet der reversiblen Drucke erwarten darf, auf das einfache Gesetz der Gleichung (15 b) zu gelangen. Bildet man nunmehr

$$\frac{\partial U}{\partial I} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial U}{\partial M_f} = \frac{\partial U}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial M_f} = b\frac{\partial U}{\partial V},$$

so erkennt man, daß für unendlich verdünnte Lösungen wegen der Beziehung

$$\frac{\partial U}{\partial V} = 0 \quad \text{auch} \quad \frac{\partial U}{\partial M_f} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial I} = 0$$

wird, wie oben aus anderen Gründen abgeleitet wurde.

Es entsteht nunmehr die Frage, welche Potentialdifferenz in der Flüssigkeit nach erfolgter Auflösung des Metalles bestehen kann, wenn man zugleich berücksichtigt, daß wegen der Größe des eingeschaltenen Widerstandes die Auflösung so langsam erfolgte, daß keinerlei Konzentrationsunterschiede be-

1) F. Kohlrausch und W. Hallwachs, Göttinger Nachrichten, 1893. p. 350—357.

stehen. Dann ist das gesuchte Potential Π_0 offenbar das Berührungspotential an der Grenze zwischen Flüssigkeit und der zweiten Elektrode, welches dem Voltaeffekt bei der Berührung heterogener Stoffe an der Grenzfläche entspricht, hier aber aus dem chemischen Gleichgewichte zwischen den Substanzen der Flüssigkeit und dem an der Elektrode abgeschiedenen oder okkludierten Kation bestimmt werden kann.

Der Wert von Π_0 ist gemäß der Nernstschen Theorie durch

$$\Pi_0 = R\,T \log \frac{c_1^{\nu_1}}{c_2^{\nu_2}}$$

gegeben, wo c_1 und c_2 die Konzentrationen des Metalles in der Lösung und des an der Elektrode abgeschiedenen Kations, und $\nu_{1,2}$ die Umsetzungszahlen bedeuten, da zu berücksichtigen ist, daß das Anion ungeändert bleibt. Man muß nun beachten, daß Π_0 in den elektrochemischen Betrachtungen eine etwas andere Bedeutung als hier hat, indem darunter der Wert $\Pi_0 = T \int \psi(I)\,dI$ für die Strommenge $I = 1$ verstanden wird. Statt der Konzentrationen kann man, da bloß ihr Quotient vorkommt, die Massen selbst setzen, und diese stehen in einfacher Beziehung zur übergegangenen Metallmenge M_f, indem die Konzentration des Metalls in der Lösung gleich jener des Kations zu Beginn des Prozesses, also proportional einem gewissen Anfangswerte A, und die Konzentration des abgeschiedenen Kations nach erfolgter Auflösung proportional $A + C M_f (\beta M_f = I_0)$ sein wird, da es sich ganz an der Elektrode ausgeschieden hat; C ist hierbei eine aus den Verbindungsverhältnissen zu entnehmende Konstante. Hieraus folgt, daß man für $\psi(I)$ eine Funktion von der Form

$$\psi(I) = R\left[\frac{1}{\nu_1}\,\frac{1}{I_a + I} - \frac{1}{\nu_2}\,\frac{1}{I_b + I}\right] \tag{16}$$

wählen muß, da dann Π_0 die verlangte Form besitzt. Die Werte I_a und I_b sind so zu bestimmen, daß für $I = 0$ das Potential Π_0 den Wert 0 und für $I = I_0$ den Wert

$$R\,T \log \frac{c_1^{\nu_1}}{c_2^{\nu_2}}$$

erhält; man kann dies erzielen, indem man I_a und I_b die Bedingungen

(17 a) $$\nu_1 \log I_a - \nu_2 \log I_b = 0\,,$$

(17 b) $$\nu_1 \log (I_a + I_0) - \nu_2 \log (I_b + I_0) = \nu_1 \log c_1 - \nu_2 \log c_2$$

auferlegt. Hierdurch ist die elektrochemisch definierte Funktion Π_0 während des ganzen Verlaufes durch einen Logarithmus aus dem Quotienten der Konzentrationen der chemisch umsetzbaren Stoffe gegeben, wie es die Theorie verlangt. Aus diesen Betrachtungen folgt schließlich, daß Π für den elektrischen reversiblen Prozeß die allgemeine Gestalt

(18) $$\Pi = T \int \frac{\partial U}{\partial I} \frac{dT}{T^2} + RT \left[\frac{1}{\nu_1} \frac{1}{I_a + I} - \frac{1}{\nu_2} \frac{1}{I_b + I} \right]$$

besitzt, woraus sich für die Entropiefunktion S der Ausdruck

(19) $$S = \int \frac{U}{T^2} dT + \frac{U}{T} + R \log \frac{(I_a + I)^{\nu_1}}{(I_b + I)^{\nu_2}} + C$$

ergibt.

VI. Folgerungen für diesen reversiblen Vorgang.

Es ist somit gezeigt, daß sich die beiden Entropien und ebenso die Arbeitsenergien bzw. P und Π, formell in der ganz gleichen Gestalt ergeben.

Bildet man ferner die Arbeitsenergie

(20) $$A = \int_{I_1}^{I_2} \Pi \, dI = T \int \frac{U_2 - U_1}{T^2} dT + RT \log \frac{(I_a + I_2)^{\nu_1} (I_b + I_1)^{\nu_2}}{(I_b + I_2)^{\nu_2} (I_a + I_1)^{\nu_1}}$$

des elektrischen Prozesses, so hat diese Funktion ganz wie beim reversiblen chemisch-mechanischen Vorgange die Eigenschaft, der Gleichung

(21) $$A = W + T \frac{\partial A}{\partial T} \quad (W = U_1 - U_2)$$

zu genügen. Diese Gleichung enthält zugleich den Satz von v. Helmholtz, da, wie erwähnt, das Potential und die elektromotorische Kraft elektrochemisch durch die Arbeitsenergie für die Strommenge $I = 1$ definiert werden.

Es gelten somit alle im dritten Abschnitte durchgeführten Betrachtungen, nur daß statt der Druckarbeit die elektrische Arbeitsenergie eintritt. Es stellt also $T(\partial A/\partial T)$ die Wärme dar, welche auf der Isotherme aufgenommen wird; ferner folgt der bekannte Satz, daß solche Elemente, für welche $\partial A/\partial A > 0$ ist, wo also die elektromotorische Kraft mit steigender Temperatur wächst, bei adiabatischer Tätigkeit sich abkühlen, während sie sich im Falle $\partial A/\partial T < 0$ erwärmen; die Ursache für dieses Verhalten läßt sich genau wie beim früheren Prozesse durch die dortigen Betrachtungen erklären.

Die Herkunft der Größe $T(\partial A/\partial T)$ wird wegen ihrer Form vielfach in Beziehung zur Peltierwärme gebracht[1]), welche beim Stromdurchtritte durch die etwa vorhandenen Doppelschichten entstehen muß. Es scheint, daß sie aber wenigstens zum Teile auch in anderen Vorgängen begründet sein kann, wie sich daraus ergibt, daß der erste Teil der Funktion

$$A_0 = T\int \frac{U_2 - U_1}{T^2}\, dT$$

ebenfalls für sich der Gleichung (21) genügt, wo also überhaupt keine Doppelschichten, theoretisch genommen, auftreten.

Schließlich läßt sich für die Arbeitsenergien A_m und A_e der beiden Prozesse für den Fall, daß ihre Wärmetönung gleich ist, ein Satz ableiten, welcher nicht unmittelbar als selbstverständlich zu betrachten ist. Bei gleicher Wärmetönung erhält man

$$[A_m - A_e] - T\frac{\partial}{\partial T}[A_m - A_e] = 0, \tag{22}$$

wobei

$$A_m - A_e = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV - \int_{I_1}^{I_2} \Pi\, dI$$

gesetzt wurde. Hieraus ergibt sich für diese Differenz der Arbeitsenergien die Beziehung

$$A_m - A_e = T.\, \Phi(V_1, V_2, I_1, I_2). \tag{23}$$

---

1) H. Jahn, Grundriß der Elektrochemie p. 321. Wien 1905; J. J. van Laar, Sechs Vorträge über das thermodynamische Potential p. 116. Braunschweig 1906.

Die Funktion $\Phi(V_1, V_2, I_1, I_2)$ hat nebenbei bemerkt die Eigenschaft, den n-fachen Wert zu erhalten, wenn man alle Massen und somit auch die Argumentswerte V_1, V_2, I_1, I_2 $n$mal so groß nimmt, da die Arbeit dann ebenfalls n mal größer wird. Wenn man nun berücksichtigt, daß der osmotische Druck sowie das Berührungspotential zwischen Flüssigkeit und Elektrode gegen die Lösungstension und das durch das Glied

$$T\int \frac{\frac{\partial U}{\partial I}}{T^2}\, dT$$

bestimmte Potential des eigentlichen chemischen Prozesses sehr kleine Werte darstellen, so kann man in erster Annäherung

$$(24)\quad A_m - A_e = T\int \frac{[U_2(T,V) - U_1(T,V)] - [U_2(T,I) - U_1(T,I)]}{T^2}\, dT$$

setzen. Dann folgt aus (23), daß das Integral gleich der Funktion $\Phi(V_1, V_2, I_1, I_2)$, also unabhängig von T ist, woraus sich durch Differentiation die Gleichung

$$(25)\qquad U_2(T,V) - U_1(T,V) = U_2(T,I) - U_1(T,I)$$

ergibt. Durch Einsetzen dieser Beziehung in (24) ergibt sich schließlich, daß $A_m - A_e = 0$, also $A_m = A_e$ wird. Bei gleicher Wärmetönung sind also die Arbeitsenergien beider Prozesse bis auf Glieder von der Dimension der Arbeit des osmotischen Druckes gleich groß.

Wenn man M_f sehr klein wählt, so kann man gemäß den im zweiten Punkte des Abschnittes III gemachten Bemerkungen über den Druck auf der Isotherme unter Vernachlässigung des Stückes der Arbeitskurve zwischen Lösungtension und osmotischen Druck bei einem isothermen Vorgange in erster Näherung

$$\int_{V_1}^{V_2} P\, dV = P\,\Delta V$$

setzen und aus (14) und (15b)

$$\Delta V = b\, M_f = \frac{b}{\beta}\,\Delta I$$

einführen; dann folgt wegen der eben abgeleiteten Gleichheit der beiden Arbeitsenergien und weil Π ebenfalls nahezu konstant ist,

$$P = \frac{b}{\beta}\,\Pi. \tag{26}$$

Wenn man also die Größe $b = \partial V/\partial M_f$ für das reversible Druckgebiet wenigstens annähernd bestimmen könnte, so würde sich aus dieser Beziehung die Möglichkeit ergeben, den Betrag der Lösungstension für eine bestimmte Temperatur seinem Größenverhältnisse nach schätzungsweise aus dem Werte des Einzelpotentiales zwischen dem Metalle und der Flüssigkeit zu berechnen.

Wien, im Dezember 1907.

(Eingegangen 14. Dezember 1907.)

11. *Zur Optik der bewegten Körper; von J. Laub.*

II.

Bekanntlich hat Hr. Einstein in seiner Abhandlung „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“ [1]) Transformationsgleichungen für die Zeit und Koordinaten angegeben, die darüber Auskunft erteilen, welche Zeit bzw. welche Länge ein „bewegter“ Beobachter konstatieren würde, falls sich die Uhren und Maßstäbe im „ruhenden“ System befinden. Die Einsteinschen Betrachtungen sind im leeren Raum ausgeführt, und auch die von ihm behandelten Probleme spielen sich alle im Vakuum ab. Es muß hervorgehoben werden, daß die Einsteinschen Transformationsgleichungen, insbesondere auch die Kontraktionsgleichung:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(x - v\,t)$$

nicht nur mit Hilfe des Prinzips der Relativität und der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit erhalten werden, sondern auch aus der von Einstein willkürlich im Vakuum ausgeführten Definition der Gleichzeitigkeit. Es scheint mir daher von Interesse klarzustellen, wie der Sachverhalt ist, wenn die Erscheinungen in der ponderablen Materie und nicht im Vakuum verlaufen; denn bis jetzt gelten die Einsteinschen Überlegungen nur im Vakuum.

Man wird wohl nicht einfach annehmen, daß die Einsteinschen Transformationsgleichungen unabhängig sind von der Art des Problems, ohne sich zu kümmern, wie man zu den in der ponderablen Materie gelangt. Denn die Definition der Gleichzeitigkeit im leeren Raum gehört zu den Grundlagen, aus welchen Einstein die Transformationsgleichungen ableitet; man wird zunächst die mit dem Kriterium für die Gleichzeitig-

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 891. 1905.

keit zweier Ereignisse verbundenen Schlüsse nicht aus dem leeren Raum in die Materie übertragen, sondern wird vielmehr versuchen, beim Übergang zu Bewegungen, welche nicht im Vakuum statthaben, die Einsteinschen Betrachtungen in einem beliebigen Medium auszuführen, und sehen, zu welchen Konsequenzen das führt.

Es möge ein homogenes Medium vom Brechungsindex n gegeben sein, in welchem zwei Koordinatensysteme ein „ruhendes" und „bewegtes" mit den nötigen Beobachtern, Maßstäben und Uhren betrachtet werden sollen. Wir nehmen an, daß die Maxwellschen Gleichungen auch noch auf Dielektrika angewendet werden können; man kann[1]) dann exakt die Geschwindigkeit bestimmen, mit welcher sich ein Lichtstrahl in der Materie fortpflanzt. Das infolge der Gruppengeschwindigkeit auftretende Dispersionsglied (ein sehr kleiner Bruch) kann man sich beliebig klein gemacht denken. Man kann sich dann *im gegebenen Medium* das Einsteinsche Kriterium für den synchronen Gang zweier Uhren ausgeführt denken und erhält für synchron laufende Uhren die Gleichung:

$$t_B - t_A = t'_A - t_B .$$

Bei der Vergleichung des „bewegten" und „ruhenden" Systems miteinander verlangen wir: der Gang zweier Uhren soll nur davon abhängen, ob sich der Beobachter im selben Bewegungszustand wie die Uhren befindet, oder relativ zu den Uhren eine Geschwindigkeit besitzt; hingegen soll der *Gang der Uhren völlig unabhängig sein vom Medium, welches sich zwischen ihnen ausbreitet.* Man erhält dann die Gleichungen[2]):

$$(1) \qquad \begin{cases} t_B - t_A = \dfrac{1}{c' - v} \\ t'_A - t_B = \dfrac{1}{c'' + v} \end{cases}$$

und

$$(2) \qquad \frac{1}{c' - v} - \frac{1}{c'' + v} = \frac{2v}{c^2 - v^2},$$

wobei c' die Geschwindigkeit im gegebenen Medium bedeutet, falls sich der Lichtstrahl in der Richtung der positiven X-Achse fortpflanzt, c'' hingegen die Lichtgeschwindigkeit in demselben

1) Vgl. M. Cantor, Wien. Ber. **116.** 1907.
2) Vgl. J. Laub, Ann. d. Phys. **28.** p. 740. 1907.

Medium für die Fortpflanzung in der negativen Richtung. Wir wollen zunächst c' und c'' als unbekannte Größen (etwa als Funktionen von v und n) betrachten, welche miteinander durch die Gleichung (2) verbunden sind[1]).

Um nun die Beziehungen zu gewinnen, welche zwischen den Koordinaten x, y, z und der Zeit t im ruhenden System (System I) und den Werten ξ, η, ζ, τ im bewegten (System II) bestehen, verfahren wir so, wie es Einstein im Vakuum macht. Setzt man nämlich $x' = x - vt$, so ist klar, daß einem im System II ruhenden Punkte ein bestimmtes, von der Zeit unabhängiges x', y, z zukommt. Man bestimmt dann zunächst τ als Funktion von t und x', y z, indem man das Einsteinsche[2]) Kriterium der Gleichzeitigkeit in II ausführt, wodurch man die Gleichung findet:

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\tau(0,\,0,\,0\;t) + \tau\left(0,\,0,\,0,\left\{t + \frac{x'}{c'-v} + \frac{x'}{c''+v}\right\}\right)\right] \\ \qquad = \tau\left(x',\,0,\,0,\,t + \frac{x'}{c'-v}\right). \end{cases}$$

Wählt man x' unendlich klein, so folgt hieraus in Verbindung mit der Gleichung (2):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c'-v} + \frac{1}{c''+v}\right)\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{c'-v}\,\frac{\partial \tau}{\partial t}$$

oder:

$$(4)\quad \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{c^2 - v^2}\,\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0.$$

Wir wollen nun dieselben Überlegungen auf die η- und ζ-Achse des Systems II anwenden. Ein Lichtstrahl wird sich längs dieser Achsen vom System I aus betrachtet immer mit der Geschwindigkeit

$$\sqrt{c_1^2 - v^2}$$

fortpflanzen, wobei unter c_1 eine vorläufig unbekannte Funktion von v und n zu verstehen ist. Führt man dieselbe Rechnung wie bei der X-Achse aus, so folgt:

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

1) Auf Grund der Gleichung (2) allein wurde l. c. der Fresnelsche Mitführungskoeffizient in erster Annäherung abgeleitet.

2) Vgl. A. Einstein, l. c.

Integriert man die Gleichungen (4) und (5) und berücksichtigt, daß τ eine lineare Funktion ist, so erhält man:

$$\tau = \psi(v, n)\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}x'\right).$$

Da wir aber verlangen, daß die vom Beobachter gefundene Zeit unabhängig sein soll vom Medium, in welchem die Beobachtung ausgeführt wird, so muß τ gleich sein der von Einstein im Vakuum gefundenen Zeit; es muß also die Gleichung bestehen:

$$\tau = \psi(v, n)\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}x'\right) = a(v)\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}x'\right), \tag{6}$$

d. h.

$$\psi = a.$$

Um nun die Größen ξ, η, ζ zu erhalten, verfahren wir analog wie Einstein, und verlangen, daß sich das Licht sowohl im *bewegten Medium* vom bewegten Beobachter, wie auch im ruhenden vom ruhenden Beobachter gemessen mit der Geschwindigkeit c/n fortpflanzt. Sendet man zur Zeit $\tau = 0$ in der Richtung der wachsenden ξ des Systems II einen Lichtstrahl aus, so gilt:

$$\xi = \frac{c}{n}\tau$$

oder

$$\xi = a(v)\frac{c}{n}\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}x'\right). \tag{7}$$

Nun bewegt sich aber der Lichtstrahl relativ zum Anfangspunkt des Systems II im System I gemessen mit der Geschwindigkeit $c' - v$, so daß man erhält:

$$\frac{x'}{c' - v} = t.$$

Setzt man diesen Wert für t in die Gleichung (7) ein, so erhält man:

$$\xi = a(v)x'\frac{c}{n}\left(\frac{1}{c' - v} - \frac{v}{c^2 - v^2}\right). \tag{8}$$

Wir verlangen nun: *Die von einem Beobachter gemessene Länge eines Stabes soll nur abhängen vom relativen Bewegungszustand des Beobachters und Stabes, hingegen soll sie vollständig unabhängig sein von der Natur des Mediums, in welchem die Messung ausgeführt wird;* denn würde die Länge oder die Zeit

auch noch vom Medium abhängen, dann könnte man eine absolute Bewegung mit Meßapparaten konstatieren, was nach dem Relativitätsprinzip ausgeschlossen ist.

Es muß daher die Gleichung (8) übereinstimmen mit derjenigen, welche Einstein im Vakuum findet, d. h., es muß

$$\xi = a(v)x'\frac{c}{n}\left(\frac{1}{c'-v} - \frac{v}{c^2-v^2}\right) = a(v)x'\frac{c^2}{c^2-v^2}. \tag{9}$$

Der Beobachter, welcher das Einsteinsche Kriterium der Gleichzeitigkeit in einem Medium vom Brechungsindex n ausführt, findet also, vom ruhenden System aus messend, die Geschwindigkeit des Lichtstrahls gleich c', welche der Gleichung (9) genügt. Berechnet man c' aus (9), so hat man die vom Beobachter beobachtete Geschwindigkeit; man erhält[1]):

$$\frac{c}{c^2-v^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{c'-v} - \frac{2v}{c^2-v^2}\right),$$

$$\frac{nc+v}{c^2-v^2} = \frac{1}{c'-v},$$

$$c' = \frac{c^2+nvc}{nc+v} = \frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{v}{nc}}$$

oder

$$c' = \frac{c}{n} + \left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left\{v - \frac{v^2}{cn} + \ldots\right\}. \tag{10}$$

Auf analoge Weise findet man durch Betrachtung eines Lichtstrahles, welcher sich längs der η-Achse fortpflanzt:

$$\eta = \frac{c}{n}\tau = a(v)\frac{c}{n}\left(t - \frac{v}{c^2-v^2}x'\right),$$

wobei aber

$$x' = 0,$$

$$\frac{y}{\sqrt{c_1^2-v^2}} = t$$

sind. Man hat daher:

$$\eta = a(v)\frac{c}{n}\cdot\frac{y}{\sqrt{c_1^2-v^2}}. \tag{11}$$

1) Vgl. auch M. Laue, Ann. d. Phys. **23**. p. 989. 1907.

Da aber eine gemessene Länge unabhängig sein soll vom Medium, in welchem die Messung vor sich geht, so muß η gleich sein dem im Vakuum gefundenen η; es muß also:

$$\eta = a(v) \cdot \frac{c}{n} \cdot \frac{y}{\sqrt{c_1^2 - v^2}} = a(v) \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} y. \tag{12}$$

Daraus kann man das vom Beobachter wahrgenommene c_1 berechnen; wir erhalten:

$$\frac{1}{\sqrt{c_1^2 - v^2}} = \frac{n}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$n^2(c_1^2 - v^2) = c^2 - v^2,$$

$$c_1^2 = \frac{c^2}{n^2} + v^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{c^2}{n^2} + v^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)},$$

oder

$$c_1 = \frac{c}{n} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{nc}(n^2 - 1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\frac{v^4}{nc^3}(n^2 - 1)^2 + \ldots \tag{13}$$

Genau so berechnet man die ζ-Koordinate. Wir sehen also, daß man die Einsteinschen Betrachtungen auch in der ponderablen Materie ausführen kann und bekommen dann wieder die Transformationsgleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \\ \xi &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}(x - vt), \\ \eta &= y, \\ \zeta &= z. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Die physikalische Bedeutung unserer Betrachtung ist klar. Das Vakuum ist nicht der einzelne Eichraum, in welchem wir unsere Uhren und Maßstäbe eichen müssen. Man kann im Prinzip in jedem Medium die Abhängigkeit der Länge der Maßstäbe und des Ganges der Uhren vom relativen Bewegungszustand der Beobachter und Meßapparate konstatieren und

findet immer die in den Gleichungen (14) ausgedrückte Tatsache. Denn trägt man die in einem Medium vom Brechungsindex n_1 (kann auch Vakuum sein) geeichten Uhren und Maßstäbe in ein anderes vom Brechungsindex n_2, so findet man bei einer Kontrolle der Apparate mit Hilfe des Einsteinschen Kriteriums der Gleichzeitigkeit im entsprechenden Medium immer die Apparate den Gleichungen (14) gehorchend, weil der Beobachter bei Anwendung von Lichtstrahlen die durch die Gleichungen (10) und (13) ausgedrückten Geschwindigkeiten c' und c_1 mißt.

Wir haben bei unserer Betrachtung gleichzeitig den Fresnelschen Mitführungskoeffizienten ohne Vernachlässigungen gleich:

$$c' = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left\{v - \frac{v^2}{c\,n} + \ldots\right\}$$

gefunden. (Meine Annahme[1]) $c' = c/n + x$, $c'' = c/n - x$ trifft also nur in Größen erster Ordnung zu.) Man kann sagen, daß das Fizeausche Experiment auf diese Weise eine Stütze für die Einsteinsche Elektrodynamik bildet.

Der Ausdruck:

$$c_1 = \frac{c}{n} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{n\,c}(n^2 - 1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{v^4}{n\,c^3}(n^2 - 1)^2 + \ldots$$

gibt uns einen „zweiten Mitführungskoeffizienten" an, denn er sagt aus, welche Lichtgeschwindigkeit ein ruhender Beobachter mißt, wenn sich die Lichtstrahlen senkrecht zur Bewegungsrichtung des Mediums fortpflanzen. Da es sich hierbei um Messungen von Interferenzerscheinungen handelt, ist es vielleicht nicht ausgeschlossen, daß man noch das Glied $\frac{1}{2}\frac{v^2}{n\,c}(n^2 - 1)$ bestimmen können wird. Eine experimentelle Bestätigung dieser Größe würde auch für die Richtigkeit der Relativitäts-Elektrodynamik sprechen.

Es möge nun noch auch die Frage nach der Überlichtgeschwindigkeit erörtert werden. Da Einstein das Kriterium der Gleichzeitigkeit im Vakuum ausführt, dann kann es natürlich in den Folgerungen überhaupt keine Überlichtgeschwindig-

1) J. Laub, l. c.

keit geben. Ein Körper kann sich nicht mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, weil sonst die Gleichung

$$t_B - t_A = \frac{r}{c - v}$$

unendlich groß wird, das Licht selbst kann sich nicht mit einem $c_a > c$ bewegen, weil wir eben im Vakuum sind. Das Einsteinsche Kriterium der Gleichzeitigkeit mit den daraus folgenden Schlüssen kann man sich aber in einem Dielektrikum ausgeführt denken. Dann kann sich das Licht selbst wohl mit $c_a > c$ bewegen. Das Additionstheorem würde dann zunächst nur gelten für Geschwindigkeiten materieller Punkte, denn würde man darin statt der Translationsgeschwindigkeit materieller Punkte die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Vakuum einsetzen, so folgt, daß es überhaupt kein $c_a > c$ gibt, wozu aber bis jetzt kein Anlaß vorhanden zu sein scheint. Man kann sich doch die Einsteinschen Betrachtungen im Prinzip in einem Medium von $n < 1$ ausgeführt denken.

Was aber die Bewegung materieller Körper betrifft, so kann sich ein Körper in einem Medium vom Brechungsindex n auch nur mit der Geschwindigkeit

$$v < \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}}$$

bewegen. Denn wird

$$v = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}} = c,$$

dann ist:

$$t_B - t_A = \infty \text{ (vgl. Gleichung (1))};$$

ist

$$v > c,$$

dann hätte man eine negative Zeit. Wir könnten also in dem Falle im entsprechenden Medium unsere Meßmethoden nicht anwenden.

Die Lichtgeschwindigkeit nimmt überhaupt in unseren Betrachtungen eine gesonderte Stellung ein; sie ist die einzige

Geschwindigkeit, welche nicht nur vom Bewegungszustand des Beobachters abhängt, sondern auch vom Medium, in welchem sie gemessen wird.

III.

Zum Schluß möchte ich noch zu dem in der Gleichung (10) enthaltenen Mitführungskoeffizienten folgende Bemerkung hinzufügen. Die Gleichung (10) sagt aus, wie groß die von einem ruhenden Beobachter gemessene Geschwindigkeit eines Lichtstrahles ist, der von einer mit der Geschwindigkeit v *bewegten* Lichtquelle kommend in einem mit derselben Geschwindigkeit v bewegten Medium sich fortpflanzt. Um nun den Fall zu haben, bei welchem der ruhende Beobachter die Geschwindigkeit eines Lichtstrahles mißt, der von einer in der Luft *ruhenden* Lichtquelle kommend sich in einem mit v bewegten Dielektrikum fortpflanzt, müssen wir nur im Gliede c/n der Gleichung (10) in n statt der relativen Periode T' die absolute Periode T, welche einer ruhenden Lichtquelle entspricht, einführen. Um die absolute Periode T zu erhalten, wenden wir das Dopplersche Prinzip an, welches auch in unserem Falle lautet:

$$T' = T\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$$

oder

$$T' = T\left(1+\frac{v}{c}-\frac{1}{4}\frac{v^2}{c^2}\cdots\right),$$

wobei c wieder die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bedeutet. Diese Modifikation rührt nur von der relativen Bewegung der Lichtquelle gegen das Medium her, indem auf dieses Licht veränderter Farbe fällt. Bezeichnet man mit N den Brechungsindex des ruhenden Mediums für die absolute Periode T, so ist:

$$n = N+\frac{\partial N}{\partial T}\cdot T\left(\frac{v}{c}-\frac{1}{4}\frac{v^2}{c^2}\cdots\right)$$
$$= N+\frac{\partial N}{\partial \lambda}\cdot\lambda\left(\frac{v}{c}\cdots\right),$$

wobei $\lambda = cT$ die Wellenlänge des Lichtes im Vakuum bedeutet. Berücksichtigt man in (10) nur die Glieder

$$\frac{c}{n}+v\left(1-\frac{1}{n^2}\right),$$

so erhält man:

$$c' = \frac{c}{N}\left(1 - \frac{\partial N}{\partial \lambda}\,\frac{\lambda}{N}\,\frac{v}{c}\right) + \frac{n^2-1}{n^2}\,v.$$

Führt man in dem mit v behafteten Glied den Näherungswert $n = N$ ein, so wird:

$$c' = \frac{c}{N} - \frac{\partial N}{\partial \lambda}\,\frac{\lambda}{N}\cdot\frac{v}{N} + v\,\frac{N^2-1}{N^2}$$

$$= \frac{c}{N} + v\left(\frac{N^2-1}{N^2} - \frac{\partial N}{\partial \lambda}\cdot\frac{\lambda}{N^2}\right).$$

Würzburg, Physik. Inst., am 18. November 1907.

(Eingegangen 19. Dezember 1907.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1908. № 2.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 25.

1. *Bemerkungen zu meiner Arbeit über Münzdurchdringungsbilder;* *von Chr. Jensen.*

(Hierzu Taf. I.)

Bei Untersuchungen über die durch Röntgenstrahlen hervorgerufenen Münzabbildungen[1]) hatte ich gefunden, daß beim Negativ im allgemeinen den Erhabenheiten — sei es nun auf der von der Schicht abgewandten, sei es auf der derselben zugewandten Seite — relativ helle und den Vertiefungen relativ dunkle Stellen entsprechen, daß aber bei Silbergeld bei genügender Dicke die Erhabenheiten auf der der Schicht anliegenden Münzseite dunkel auf dem Negativ erscheinen.

Wenn nun die Art der Abbildung, wie sie bei Kupfer- bzw. Nickelmünzen gefunden wurde, in erster Linie jedenfalls als Wirkung der durch verschieden große Metallschichten hindurchgegangenen und daher an den verschiedenen Münzstellen verschieden stark absorbierten Primärstrahlen erkannt wurde, blieb es einstweilen noch dahingestellt, wie die Umkehrerscheinung beim Silbergeld zustande kommt. Es erschien mir zunächst wahrscheinlich, daß es sich hier um eine von der Unterseite der Münze ausgehende sekundäre Strahlung handle, welche die photographische Platte in entgegengesetztem Sinne beeinflußt als das vorhergehende Moment, und zwar derart, daß bei einer gewissen Münzdicke die Wirkung der verschieden dicke Metallschichten verschieden stark durchdringenden Primärstrahlen ausschlaggebend sei, daß bei einer gewissen Dickenzunahme beide Momente sich in ihrer Wirkung das Gleichgewicht hielten und daß schließlich bei weiterer Dickenzunahme die Wirkung der von der Unterseite ausgehenden Strahlen das Übergewicht über das andere Moment erhielten. Es hat sich nun aber durch weitere Untersuchungen herausgestellt, daß das für die Erklärung der Umkehrerscheinung

1) Chr. Jensen, Ann. d. Phys. 21. p. 901—912. 1906.

wesentlich in Betracht kommende Moment nicht in einer von der Unterseite der in Frage kommenden Münzen ausgehenden sekundären Strahlung zu suchen ist, sondern daß dieselbe bedingt ist durch eine relativ wenig absorbierbare sekundäre Strahlung, welche von der Hinterseite der Kasette bzw. von dem Gegenstand, auf welchem die Kasette steht, ausgehend das Glas der photographischen Platte durchdringt, bis es die der Schichtseite derselben anliegende Münzseite trifft.

Es zeigte sich zunächst bei Weiterführung der Versuche, daß es zum guten Gelingen der gleichzeitigen Abbildung beider Münzseiten bei Verwendung gewöhnlicher Holzkasetten oder aber von Pappkästen — welche bei den Aufnahmen gewöhnlich direkt auf dem hölzernen Laboratoriumstisch oder aber auf den üblichen Holzblöcken standen — absolut nötig ist, die photographische Platte auf eine Metallunterlage zu bringen.[1]) Da nun die Sekundärstrahlen des Holzes eine relativ große Durchdringungskraft besitzen, so wird man leicht zu der Annahme geführt, daß die die Glasplatte durchsetzenden Primärstrahlen in dem Boden der Holzkasette, im Holz der als Unterlage dienenden Blöcke oder aber im Holz des Tisches eine Sekundärstrahlung erzeugen, welche rückwärtsgehend das Glas der photographischen Platte durchsetzt und nun die durch die von den verschieden dicken Stellen verschieden stark absorbierten Primärstrahlen bedingte gleichzeitige Abbildung beider Münzseiten verwischt.[2]) Ich habe nun mit mehr oder weniger günstigem Erfolge Einlagen verschiedener Metalle — Aluminium, Blei, Eisen, Kupfer und Zinn — benutzt und möchte hier ausdrücklichst darauf hinweisen, daß es oft geradezu erstaunlich ist, welch enormen Einfluß auf die Güte der Abbildung die Einlage eines Metalles ausübt, welches einmal möglichst stark die von unten kommenden durchdringenden sekundären Strahlen absorbiert und welches außerdem so gewählt ist, daß die von ihm selber ausgehenden Sekundärstrahlen möglichst

1) Zufälligerweise hatte ich schon vor der ersten Publikation mehrfach eine Kasette mit dünner Metalleinlage benutzt.

2) *Anmerkung*: Daß man von analogem Gesichtspunkt aus in der medizinischen Röntgenpraxis die Operationstische mit Blei ausschlägt (vgl. B. Walter, Physikal.-Techn. Mitteilgn. in d. Fortschr. a. d. Gebiet d. Röntgenstrahlen 1. p. 82–87), war mir bis dahin unbekannt.

stark vom Glas absorbiert werden. Es geht daraus hervor, daß nicht nur die Art, sondern auch die Dicke des als Unterlage dienenden Metalles von entscheidendem Einfluß sein kann. Den günstigen Einfluß einer Metalleinlage zeigt Fig. 1, Taf. I, welche folgendermaßen zustande gekommen ist: Es wurden zwei frisch geprägte Einpfennig- und desgleichen zwei Fünfpfennigstücke mit der Zahlenseite auf die Schicht einer Schleussnerplatte gelegt. Die photographische Platte lag in einer Schachtel, wie sie zur Verpackung von Schleussneremulsionsplatten benutzt werden. Unter der linken Hälfte der Platte lag eine Bleiplatte von 3,5 mm Dicke, wogegen unter der anderen Hälfte keine Metalleinlage war. Über der photographischen Schicht war die Antikathode einer Röntgenröhre, deren Härte zu gut 5,75 B. W. geschätzt wurde.[1]) Es ist nun deutlich zu erkennen, daß die beiden Seiten der über der Bleieinlage liegenden Münzen durch die Bestrahlung schön abgebildet wurden, wogegen die beiden anderen Münzen nur sehr verschwommene Bilder lieferten. — Auch die in Fig. 2, Taf. I, wiedergegebenen Münzdurchdringungsbilder wurden durch Benutzung einer Metalleinlage erhalten. In diesem Fall wirkte eine Röntgenröhre, deren Härte ca. 6 B. W. betrug und durch welche ein Strom von 0,3 bis 0,4 Milliampere ging, zwei Minuten lang, indem die Antikathode der Röhre ca. 29 cm von der Schicht der Schleussnerplatte entfernt war. Auf der Schicht der Platte lagen, mit der Zahl der Schicht zugekehrt, der Reihe nach: ein Zweipfennigstück, ein Zweiörestück, ein Fünfpfennigstück, ein Zehnhellerstück, ein Zehncentimesstück und ein silbernes Zwanzigpfennigstück; in der Mitte lag, mit dem Adler der Schicht zugekehrt, ein Goldfünfmarkstück.[2]) Hier wurde eine

1) Vgl. B. Walter, Über das Röntgensche Absorptionsgesetz und seine Erklärung, Ann. d. Physik 17. p. 562. 1905.

2) In der angegebenen Weise habe ich zum Teil in Bruchteilen einer Minute gute Durchdringungsbilder erhalten, so beispielsweise innerhalb sieben Sekunden ein leidlich gutes Durchdringungsbild eines Einpfennigstückes. Ein sehr gut gelungenes Durchdringungsbild eines Einpfennigstückes erhielt ich, indem ich eine Röntgenröhre, deren Härte auf 5,75 B. W. geschätzt wurde und durch welche ein Strom von drei bis vier Milliampere ging, dreißig Sekunden lang wirken ließ; dabei war die Antikathode ca. 14 cm von der Schicht der Schleussnerplatte entfernt. — Bei dickeren Münzen bzw. Medaillen — man tut dann gut, möglichst

[illegible]

[illegible]

[illegible]

naturgemäß auf den Gedanken, daß die dunkle Abbildung der der photographischen Schicht anliegenden Münzerhabenheiten durch jene vorher besprochenen, von unten kommenden Sekundärstrahlen großer Durchdringungskraft bedingt sei. Und dieser Gedanke hat durch weitere Untersuchungen mehr und mehr Stütze erhalten.

So wurde eine Reihe von Aufnahmen in der Weise angestellt, daß die auf der Schicht einer auf Holzunterlage befindlichen Schleussnerplatte liegenden Geldstücke mit so dicken Bleiplatten bedeckt waren, daß die Primärstrahlen einer darüber befindlichen Röntgenröhre die Münze praktisch genommen nicht mehr durchdringen konnten.[1]) Auf diese Weise erhielt ich in sehr ausgeprägter Weise die Umkehrerscheinung. In diesen Fällen konnten nun solche durch die die Münzen durchdringenden Primärstrahlen bedingte Sekundärstrahlen für die Entstehung des Umkehreffektes nicht in Betracht kommen, und es bleiben nur solche Primärstrahlen übrig, welche an den Münzen vorbeigegangen sind.[2]) Diese können natürlich nicht direkt die Abbildung herbeiführen, und man wird bei den Erklärungsversuchen zunächst weitergeführt auf die durch diese Primärstrahlen bedingten Sekundärstrahlen, welche das unter der Münze liegende Glas der photographischen Platte von der Rückseite her durchdringend, auf die Münze treffen. Übrigens muß hier darauf hingewiesen werden, daß auch das Glas der photographischen Platte selber in dem nämlichen Sinne wirkt wie eine Holzunterlage. Nachdem verschiedene Aufnahmen darauf hingedeutet hatten, unternahm ich syste-

---

durchdringungsfähige Sekundärstrahlen nach oben sendet, was auch ohne weiteres verständlich erscheinen dürfte. Allerdings ist diese Wirkung des Schachtelbodens nicht groß, was wohl erklärlich erscheint bei der geringen Tiefe, aus der in diesem Falle die Sekundärstrahlen herausdringen. — Nicht unerwähnt möchte ich schließlich die Tatsache lassen, daß man auch bei Verwendung von Paraffinklötzen statt der Holzunterlage besonders leicht die Umkehrerscheinung erhält.

1) So wurden mehrfach Bleiblöcke von einer Gesamtdicke von 9 mm angewandt.

2) Selbstverständlich wurde bei allen diesen Untersuchungen durch passende Kontrollversuche jede Möglichkeit einer Abbildung der Münzen bzw. entsprechender Platten mit Kanälen ohne Zutun der Röntgenstrahlen völlig ausgeschlossen.

matische diesbezügliche Untersuchungen. Die Fig. 3, Taf. I, zeigt eine hierher gehörende Aufnahme. In diesem Falle war in eine Kartonschachtel zunächst eine Bleiplatteneinlage von ca. 10 mm Dicke hineingebracht worden, auf diese war eine Schicht von 22 Glasplatten (Dicke gut 3 cm) und auf letztere die Schleussnerplatte, mit Schicht nach oben, gelegt. Auf die Schicht wurden nun der Reihe nach, mit der Zahl der Schicht zugekehrt, folgende Geldstücke gelegt: Ein Einpfennig-, ein Fünfpfennig-, ein Zehnheller-, ein Fünfzigpfennig- und ein Einhalbmarkstück. Auf jedem der Geldstücke lagen zwei runde Bleiplatten von einer Gesamtdicke von ca. 7 mm. Über dem Schachteldeckel war eine Röntgenröhre so angebracht, daß die Antikathode von der photographischen Schicht 15—16 cm entfernt war. Die Röhrenhärte betrug ca. 6 B.W. und während der 6 Min. dauernden Belichtung ging durch dieselbe ein Strom von kaum 0,3 Milliamp. hindurch. Nach der Entwickelung der Platte war bei den drei ersten Münzen kaum etwas von Detail zu erkennen, wogegen sich die Erhabenheiten des Silbergeldes recht schön dunkel abgebildet hatten[1]), was bei den hier gewählten Dimensionen der verschiedenen Einlagen doch wohl nur als eine Wirkung des Glases betrachtet werden kann.

Wenn nun auch die eben besprochenen Versuche deutlich genug dafür sprechen, daß etwaige in der Münze entstandene Sekundärstrahlen für die Entstehung der in Frage stehenden Erscheinung belanglos sind, so zog ich es doch vor, noch eine andere Versuchsanordnung zu treffen, bei welcher von vornherein jede etwa durch die Münze hindurchgehende Primärstrahlung ausgeschlossen war. Zu dem Ende ließ ich die Primärstrahlen einer Röntgenröhre durch eine Bleiblende mit genügend dicker Wandung gehen. Dieselben fielen auf ein 1 cm dickes und 30 cm im Quadrat haltendes Brett aus Nußbaumholz, welches einen Winkel von ungefähr 60° mit der vertikalen, die Bleiblende enthaltenden Wand bildete. Ungefähr 15 cm über der Mitte des Holzbrettes war horizontal eine Pappschachtel angebracht, in welcher sich eine Schleussnerplatte befand, in der mit Zahl auf Schicht ein Zweipfennig-,

1) Das dem Negativ des Einhalbmarkstückes enstsprechende Positiv der Tafel ist leider recht flau geworden.

ein Zwanzigheller-[1]) und ein Fünfzigpfennigstück lagen. Bei der Pappschachtel war der Pappboden entfernt und durch einen Boden aus schwarzem Karton ersetzt worden. Wenn nun in diesem Fall eine Münzabbildung zustande kommt, so kann dieselbe nur durch die vom Holz ausgehenden, den schwarzen Karton sowie das Glas der photographischen Platte durchdringenden Sekundärstrahlen bewirkt sein. Tatsächlich bildeten sich auch in diesem Fall die Zahlen des Fünfzigpfennigstückes gut ab, wogegen von den beiden anderen Münzen keine Abbildung zustande kam. Bei mehreren analogen Aufnahmen fand ich stets dasselbe Resultat.

Es könnte nun scheinen, als ob dies letzte Resultat in völliger Übereinstimmung mit den bei den anderen Versuchsanordnungen gewonnenen Ergebnissen stände. Es muß aber ergänzend bemerkt werden, daß wenn auch bei der anderen Versuchsanordnung Silber immer ganz besonders bevorzugt in dieser Richtung war, so doch tatsächlich die Umkehrerscheinung nicht völlig auf Silber beschränkt war und daß das völlige Fehlen derselben, welches ich bei den oben genannten Versuchen bei Kupfer und Nickel fand, wohl wesentlich auf Konto davon zu setzen ist, daß die bis zu den Münzen gelangende Sekundärstrahlung bei den durch die Versuchsanordnung bedingten Dimensionen besonders gering war. So fand ich neuerdings bei der zuerst besprochenen Versuchsanordnung wiederholentlich bei Kupfer- und vor allem bei Goldgeld eine, wenn auch schwache, so doch genügend deutliche dunkle Abbildung der der Schichtseite anliegenden Erhabenheiten der Münzen, welche jedenfalls bis jetzt auf keine andere als die erwähnte Ursache zurückgeführt werden konnte. Daraufhin wurden verschiedene reine Metalle nach dieser Richtung hin untersucht.

So wurde unter anderem folgender Versuch angestellt: Es wurden von verschiedenen Metallblechen erst zwei Streifen geschnitten, und auf dieselben wurde mittels Syndäticons ein dritter Streifen von gut der doppelten Breite des nämlichen Metalles so aufgeklebt, daß ein Kanal entstand, dessen Tiefe angenähert der Dicke des verwandten Metallbleches entsprach.

1) Das Zwanzighellerstück besteht aus reinem Nickel.

Auf diese Kombination wurde sodann eine Bleiplatte von gut 3 mm Dicke geklebt. Nun wurden vier Reihen verschiedener derartiger Klötze so auf eine Schleussnerplatte gestellt, daß die Kanäle der Schicht zugewandt waren. In der ersten Reihe war Aluminium mit Kanaltiefen von 0,10 und 0,46 mm. In der zweiten Reihe befand sich Kupfer (Tiefe des Kanals = 0,07 mm) und Zink (Kanaltiefe = 0,10 mm). In der dritten Reihe war in der angegebenen Reihenfolge: Palladium (Kanaltiefe = 0,10 mm), Silber (Kanaltiefe = 0,02 und 0,10 mm), Cadmium (Tiefe = 0,05 und 0,50 mm) und Zinn (Tiefe = 0,20 mm). In der vierten Reihe endlich befand sich in der hier angegebenen Reihenfolge: Platin (Kanaltiefe = 0,10 und 0,30 mm), Gold (Tiefe = 0,15 mm) und Blei (Tiefe = 0,25 mm). Dabei ist zu bemerken, daß die Metalle so angeordnet waren, daß diejenigen Elemente in einer Reihe lagen, welche nach der Lothar-Meyerschen Kurve der Atomvolumina auf dem nämlichen Ast liegen, und daß ich die auf diese Weise entstandenen vier Gruppen nach dem Vorgang von Voller und Walter[1]) als Aluminium-, Kupfer-, Silber- und Platingruppe bezeichnen werde. Es wurde die Pappschachtel, auf der sich die Platte befand, auf eine Holzunterlage gestellt. Nun wurde 6 Min. lang mit einer über der Schachtel befindlichen Röntgenröhre bestrahlt, deren Antikathode ca. 13 cm von der photographischen Schicht entfernt war, deren Härte gut 6 B.W. betrug und durch welche ein Strom von gut 0,2 Milliamp. hindurchging. Beim Aluminium war vom Kanal nichts zu sehen. Bei sämtlichen anderen Metallen dagegen war die Umkehrerscheinung mehr oder weniger deutlich ausgeprägt, vor allem bei der Silber- und der Platingruppe, und zwar, wie es schien, am deutlichsten bei der ersteren. Dieser Versuch wurde, indem Eisen mit einer Kanaltiefe von 0,55 mm, Nickel mit einer Kanaltiefe von 0,10 und einer solchen von 0,23 mm, Kupfer mit einer Kanaltiefe von 0,55 mm, Zink mit einer Kanaltiefe von 0,45 mm, Zinn mit einer Tiefe von 0,50 mm und Blei mit einer solchen von ebenfalls 0,50 mm hinzugenommen wurde, mit geringen Modifikationen mehrfach mit gleichem Resultat wiederholt, wobei auch noch erwähnt sei,

1) A. Voller u. B. Walter, Wied. Ann. **61.** p. 103. 1897.

daß abgesehen von der verschieden starken photographischen Wirkung der verschieden weit von der Platte entfernten Metallflächen auch die Abbildung der der Silbergruppe angehörenden Metalle an sich besonders stark zu sein schien[1]), und zwar auch erheblich größer als bei den zur Platingruppe gehörenden Metallen. Für sich habe ich mehrfach gleichzeitig Aluminium, Silber, Cadmium und Antimon untersucht, bei welcher Gelegenheit ich die Umkehrerscheinung auch bei dem zur Silbergruppe gehörenden Antimon stark ausgebildet fand. Eine Beziehung der Stärke der Differenzwirkung zur Tiefe der Kanäle scheint wohl vorhanden zu sein, und zwar derart, daß die Differenzwirkung jedenfalls bis zu einer gewissen Tiefe mit der Tiefe wächst. Weiteres hierüber kann ich jedoch noch nicht angeben und habe ich auch keine eingehenden diesbezüglichen Untersuchungen angestellt, da ich noch nicht in der Lage war, genauere quantitative Messungen mit einem dazu geeigneten Photometer anzustellen.

Erwähnenswert ist es wohl, daß auch die Platte mit den mit den angegebenen Kanälen versehenen Metallkombinationen in vorher angegebener Weise von unten mit von Holz — und zwar in diesem Fall Pappelholz von 3,3 cm Dicke — ausgehenden Sekundärstrahlen bestrahlt wurde. Auch diese Versuche wurden mehrfach mit geringen Modifikationen wiederholt und es lagen die Resultate hinsichtlich der verschiedenen Metalle durchaus in dem eben vorher angegebenen Sinne. Dabei aber muß notwendig erwähnt werden, daß diese sämtlichen — also sowohl bei Bestrahlung mit Sekundärstrahlen von unten als auch bei Bedeckung mit Blei und Bestrahlung mit Primärstrahlen von oben — Versuche mit Röhren angestellt wurden, deren Härte nahezu 6 B.W. betrug, da es nicht ausgeschlossen erscheint, daß sich die Resultate bei Verwendung von weicheren Röhren verschieben. Es wurde bei diesen Versuchen die Härte von ca. 6 B.W. benutzt, weil

1) Durch diese Verschiedenheit in der die photographische Schicht schwärzenden Wirkung der verschiedenen Metalle an sich wird offenbar die Beurteilung der Differenzwirkung leicht sehr erschwert. Nichtsdestoweniger sei aber erwähnt, daß es bisher stets den Anschein hatte, daß diese Differenzwirkung stärker ausgeprägt ist bei den zur Silber- als bei den zur Platingruppe gehörenden Metallen.

dies ungefähr diejenige Härte ist, bei welcher man, wie es scheint, die Münzdurchdringungsbilder, welche den Ausgangspunkt zu diesen Untersuchungen boten, am leichtesten gut erhält, und weil ich mit der nämlichen Härte die Umkehrerscheinung verfolgen wollte.

Im Anschluß hieran möchte ich nicht versäumen, auf folgendes aufmerksam zu machen. In einer Anmerkung meiner ersten Publikation über Münzdurchdringungsbilder wurde erwähnt, daß wenn Metallblöcke mit einer zylindrischen Höhlung auf der der Schichtseite einer photographischen Platte zugekehrten Seite und mit einem entsprechenden auskompensierenden zylindrischen Aufsatz auf der anderen Seite von einer über der Platte befindlichen Röntgenröhre bestrahlt würden, das Negativ bei Verwendung von Aluminium dunkle Mitte und hellen Rand, dagegen bei Verwendung von Kupfer und Silber helle Mitte und dunklen Rand zeige. Ich deutete damals an, daß dies verschiedene Verhalten von Kupfer und Silber einer- und Aluminium andererseits vielleicht jedenfalls zum Teil seine Erklärung dadurch finden könne, daß die — in diesem Fall also von oben kommend gedachten — Sekundärstrahlen des Aluminiums erheblich weniger von der Luft absorbiert werden als diejenigen der schwereren Metalle. Allerdings schien mir dies noch fraglich, und ich ließ die Erklärung einstweilen noch dahingestellt. Dies verschiedene Verhalten der verschiedenen Sekundärstrahlen hinsichtlich der Absorption durch die Luft spielt nun offenbar für das bei den erwähnten Blöcken auftretende Phänomen gar keine Rolle, sondern es sprechen die neuerdings in dieser Richtung angestellten Versuche deutlich dafür, daß auch hier wesentlich die von unten kommenden Sekundärstrahlen entscheidend sind. Die Versuche wurden wesentlich mit Blöcken aus Aluminium, aus Kupfer und aus Silber angestellt, und zwar wurden dieselben bei Bestrahlung mit Primärstrahlen von oben in der Weise variiert, daß entweder eine Metalleinlage benutzt wurde oder nicht, daß die Blöcke, um die das Metall durchsetzenden Primärstrahlen nach Möglichkeit auszuschalten, mit Blei bedeckt waren, oder auch nicht. Die Resultate dieser Versuche liegen nun alle in dem Sinne, daß der relativ dunkle Rand auf dem Negativ beim Kupfer und Silber in ähnlicher Weise wie die

bei den Münzen beobachteten Umkehrerscheinungen durch die Wirkung wenig absorbierbarer, von unten kommender Sekundärstrahlen zu erklären ist. Das nämliche zeigte sich bei einer Versuchsanordnung, wo Primärstrahlen überhaupt nicht auf die Platte fielen und die Sekundärstrahlen, von unten von einer Tafel aus Pappelholz herkommend, erst das Glas der photographischen Platte durchdringen mußten, bevor sie die photographische Schicht und die Metallklötze trafen. Bei dieser Versuchsanordnung wurden übrigens auch mit dem gleichen Resultat entsprechend geformte Blöcke aus Messing, Eisen und Zink untersucht. Während nun von vornherein — auch ohne Bedeckung mit Blei — bei den Blöcken aus spezifisch schwerem Metall eine Sekundärstrahlung von starker Durchdringungskraft nicht in Frage kommt, liegt die Sache umgekehrt beim Aluminium, welches zwar relativ wenig, dafür aber um so durchdringungsfähigere Sekundärstrahlen aussendet, und es scheinen wesentlich diese Strahlen zu sein, welche bei früheren Aufnahmen auf dem Negativ stets dunkle Mitte und hellen Rand ergaben. Insofern scheinen sich hier die Verhältnisse mehr den beim Bestrahlen mit Radium hervorgerufenen zu nähern, wo das Durchdringungsvermögen der Sekundärstrahlen auch bei den schwereren Metallen erheblich stärker ist als bei den Röntgenstrahlen und wo sowohl bei Aluminium als auch bei Eisen, Kupfer, Zink und Silber bei Bestrahlung von oben stets dunkle Mitte und heller Rand[1]) gefunden wurde. Von unten kommende sekundäre Röntgenstrahlen spielen hier beim Aluminium jedenfalls eine ganz geringe Rolle, denn wenn ich mit zylindrischer Höhlung versehene Blöcke oder aber mit Kanälen versehene Bleche aus Aluminium mit Sekundärstrahlen von relativ hoher Durchdringungskraft von unten bestrahlte, so bildeten sich niemals die Kanäle oder Höhlungen ab, und es zeichneten sich nur die Blöcke bzw. Bleche als Ganzes ab, und zwar in solcher Helle auf dem dunklen Grunde, daß man die Abbildung auf Konto der Schirmwirkung setzen konnte, welche die Blöcke gegenüber der Einwirkung der roten Strahlen

1) Wie in der früheren Arbeit, beziehen sich die im Text vorkommenden Bemerkungen bzw. Überlegungen stets, auch wenn es nicht ausdrücklich angegeben ist, auf die Negative der Aufnahmen, wogegen die Lichtdrucktafel die Positive wiedergibt.

auf die photographische Schicht beim Einlegen bzw. Ausnehmen der Platten ausübten. Immerhin mag es ja trotzdem sein, daß eine gewisse, wenn auch noch so geringe, Einwirkung des Aluminiums auf die photographische Schicht bei Bestrahlung mit wenig absorbierbaren Sekundärstrahlen vorhanden ist, und in diesem Sinne mag vielleicht die Tatsache aufzufassen sein, daß bei einigen Aufnahmen mit Aluminiumblöcken die Dunkelheit der Mitte gegenüber dem helleren Rand offenbar zunahm, wenn statt solcher Substanzen, welche Sekundärstrahlen von hoher Durchdringungskraft aussenden, Einlagen aus spezifisch schweren Metallen benutzt wurden.

Wenn nun auch aus den bisherigen Versuchen hervorgeht, daß die Umkehrerscheinung bei den Münzabbildungen durch von unten kommende Sekundärstrahlen relativ hoher Durchdringungskraft herrührt, so bleibt doch noch die Frage offen, in welcher Weise die Erscheinung durch diese Sekundärstrahlen zustande kommt. Zu einem bestimmten Resultat in dieser Beziehung bin ich allerdings noch nicht gekommen. Zunächst schien mir der Gedanke nahe zu liegen, daß diese Sekundärstrahlung bei den in Frage stehenden Metallen eine Tertiärstrahlung bewirkt, welche dann direkt auf die photographische Schicht einwirkt. Immerhin bleiben aber zunächst noch immer andere Erklärungsmöglichkeiten. Bei der Voraussetzung einer die Schicht beeinflussenden Tertiärstrahlung könnten nun etwa bei der Abbildung von Erhabenheiten bzw. Vertiefungen rein geometrische Verhältnisse ausschlaggebend sein, oder aber man könnte sich denken, daß eine verschieden starke Absorption in den verschieden dicken Luftschichten das Resultat herbeiführt, oder schließlich, daß beide Momente in Betracht kommen.[1]) Das Wahrscheinlichere schien mir zunächst zu sein, daß eine etwa vorhandene tertiäre Röntgenstrahlung bei

1) An dieser Stelle sei erwähnt, daß ich frühere Versuche mit einem mit zylindrischer Höhlung versehenen und mit Radiotellur überzogenen Kupferblock nachprüfte und das Resultat bestätigt fand, daß auch im Vakuum beim Negativ die Mitte hell und der Rand dunkel ist (zwischen Rand und Mitte scharfer dunkler Trennungsstrich). Es wurde eine Schleussnerplatte benutzt und das Vakuum belief sich auf ungefähr ein Hundertstel Millimeter. Wenn man nun auch von den α-Strahlen keine direkten Schlüsse auf die sekundären Röntgenstrahlen machen kann, so dürfte das Resultat jedenfalls im gegebenen Zusammenhang von Interesse sein.

den Metallen, welche die Umkehrerscheinung besonders gut zeigen, besonders stark durch die Luft absorbiert werde. Dagegen schien allerdings eine schon vor längerer Zeit erhaltene Aufnahme zu sprechen, wo die Umkehrerscheinung durch gutes, lichtdichtes schwarzes Papier, wie es zum Einwickeln photographischer Platten Verwendung findet, hindurchging. Es handelte sich in diesem Fall um ein mit der Zahlenseite der Schicht zugekehrtes Fünfzigpfennigstück, dessen Adlerseite abgeschliffen war und auf welchem ein auf beiden Seiten glattgeschliffenes Fünfzigpfennigstück lag. Diese Münzkombination lag in einer Pappschachtel ohne Metalleinlage, welche auf Holz stand und über welcher 12 Minuten lang eine Röntgenröhre wirkte, deren Härte ca. 6 B.W. betrug, deren Antikathode ca. 18,5 cm von der photographischen Schicht entfernt war und durch welche ein Strom von durchschnittlich ca. 0,25 Milliamp. floß. Diese Aufnahme wurde später mit demselben Resultat wiederholt.[1])

Darauf wurde der Versuch in der Weise variiert, daß gleichzeitig die früher erwähnten Metallkombinationen, bei denen über ihnen angebrachte Bleiklötze zur Schwächung bzw. Abhaltung der Primärstrahlen dienten und bei welchen die Kanäle durch eine Kombination von drei Plättchen aus dem nämlichen Metall (Aluminium, Eisen, Nickel, Kupfer, Zink, Palladium, Silber, Cadmium, Zinn, Platin, Gold, Blei) gebildet waren, von oben mit primären Röntgenstrahlen bestrahlt wurden, während sie durch das erwähnte schwarze Papier (Dicke ca. 0,08 mm) von der Schicht einer Schleussnerplatte getrennt waren. Auf dem Negativ zeigten sich deutlich, wenn auch nicht besonders schön, die Kanäle bei den der Silbergruppe angehörigen Metallen. Bei den übrigen Metallen jedoch — auch bei denen der Platingruppe — war in diesem Fall mit Sicherheit von Umkehrerscheinung nichts zu konstatieren. Bei einer weiteren Aufnahme, bei der das nämliche schwarze Papier zwischen den abzubildenden Metallen und der Schicht einer Schleussnerplatte lag, wurden die Metallkombi-

1) Es sei hierbei erwähnt, daß es mir nicht gelungen ist, die Umkehrerscheinung beim Silber durch Kupferblech von 0,07 und durch Aluminiumblech von 0,10 mm Dicke hindurch zu erhalten. Möglicherweise entsteht ja auch im Papier eine neue sekundäre Strahlung.

nationen von den von unten herkommenden Sekundärstrahlen von Pappelholz bestrahlt. Es wurde übrigens in diesem Fall nur *eine* Zinkkombination benutzt, und zwar die mit einer Kanaltiefe von 0,50 mm. Ohne weiteres war die Umkehrerscheinung hier sichtbar bei den Metallen der Silbergruppe; sicher erkennbar war dieselbe außerdem nur noch bei Kupfer mit einer Kanaltiefe von 0,50 und bei Blei mit Kanaltiefen von 0,50 und von 0,25 mm, bei letzterer jedoch nur noch eben zu erkennen. Am deutlichsten war die Erscheinung ausgeprägt bei Cadmium mit einer Kanaltiefe von 0,50 und bei Zinn mit der nämlichen Kanaltiefe. Es verdient aber hervorgehoben zu werden, daß die Erscheinung deutlicher hervortrat bei Cadmium mit einer Kanaltiefe von 0,05 mm als bei Silber mit einer solchen von 0,10 mm, wie es mir denn überhaupt bei sämtlichen hier in Frage kommenden Versuchen auffällig war, daß die Umkehrerscheinung auffällig leicht bei Cadmium hervortrat, selbst wenn die Dickenunterschiede im Metall sehr gering waren. Ebenso mag hervorgehoben werden, daß hier entsprechend den übrigen Aufnahmen mit zwischengeschaltetem schwarzem Papier nicht nur die Differenzwirkung besonders stark bei den Metallen der Silbergruppe ausgeprägt erschien, sondern daß auch die Abbildung dieser Metalle an sich besonders, ja auffällig kräftig hervortrat. Da sich nun diese besonders starke Abbildung der zur Silbergruppe gehörigen Metalle auch ohne Zwischenschaltung von Papier zeigte, so könnte man vielleicht denken, durch die Stärke der Tertiärstrahlung dieser Metalle an sich auch die starke Abbildung bei Zwischenschaltung von schwarzem Papier erklären zu können. Auf alle Fälle aber — sichere Resultate werden sich, wie gesagt, offenbar nur durch genaue photometrische Messungen finden lassen — führen diese Aufnahmen nicht zu der Ansicht, als ob die etwa vom Silber ausgehenden Strahlen eine besonders starke Absorption durch das Papier erleiden, was man doch wohl erwarten dürfte, wenn man das besonders leichte Zustandekommen der Umkehrerscheinung bei diesen Metallen auf Konto einer besonders starken Absorption durch die zwischen Metall und photographischer Schicht befindlichen Luft setzen will.

Von diesem Gesichtspunkt aus scheinen übrigens auch

einige Aufnahmen von Interesse zu sein, welche ich mit einem versilberten Zwei- bzw. Fünfpfennigstück erhielt. Diese Münzen wurden auf die Schicht einer Schleussnerplatte gelegt, welche von oben mit den von einer Röntgenröhre ausgehenden Strahlen bestrahlt wurde. Um nach Möglichkeit eine Durchdringung der Münzen durch Primärstrahlen zu verhindern, waren dieselben mit einer Bleischicht bedeckt, deren Dicke zum Teil 3 mm, zum Teil 7 mm betrug. Dabei wurde nur eine zum mindesten äußerst schwer erkennbare Umkehrerscheinung erhalten, während ein mit einer Bleischicht von entsprechender Dicke bedecktes Zwanzigpfennigstück unter sonst genau gleichen Bedingungen die Erscheinung gut zeigte. Daraus dürfte man, scheint mir, entnehmen, daß, wenn überhaupt für die Erklärung des Phänomens eine Tertiärstrahlung in Frage kommt, dieselbe jedenfalls aus einer gewissen Tiefe der Metalle herauskommen muß, und damit wiederum wäre schwer die Vorstellung zu vereinigen, daß die dünnen Luftschichten zwischen Metall und photographischer Schicht das wesentlich Wirksame sind, wenn man nicht etwa annehmen will, daß eine aus dem Kupfer austretende Tertiärstrahlung die Wirkung der von der dünnen Silberschicht herrührenden Tertiärstrahlung ganz oder jedenfalls großenteils verdeckt.

Ich habe nun schließlich versucht, der Frage direkter beizukommen, indem Versuche im Vakuum angestellt wurden, wobei allerdings gleich bemerkt sei, daß ich die Versuche nicht als abgeschlossen betrachte, weil ich noch nicht das gewünschte Vakuum erhielt, daß ich aber nichtsdestoweniger mit der Publikation der bis jetzt gewonnenen Ergebnisse nicht länger zögern möchte. Zunächst wurden nur geringe Vakua, und zwar solche von ca. 75 und von ca. 60 mm Druck, benutzt, und es wurden stets Parallelaufnahmen bei gewöhnlichem Druck gemacht. Als Unterlage der photographischen Platten diente ein Block aus Föhrenholz. Dabei wurden deutliche Umkehrerscheinungen beim Silber gefunden, ohne daß ein prinzipieller Unterschied gegenüber den Aufnahmen in gewöhnlicher Luft zu konstatieren war. Bei einer anderen Aufnahme belief sich das Vakuum auf ca. 15 Hundertstel Millimeter. Die photographische Platte (Schleussner) lag auf einem Block aus Föhrenholz von 2,7 cm Dicke, auf der Schicht lag ein Zweipfennig-,

ein Zwanzigpfennig-, ein Zwanzigheller- und ein Fünfzigpfennigstück und auf jede der vier Münzen war eine Bleischicht von 11,5—12 mm Dicke gelegt. Die über der Platte befindliche Röntgenröhre, deren Antikathode ca. 12 cm von der photographischen Schicht entfernt war, wirkte 12 Minuten. Die Röhrenhärte belief sich auf 6 B.W. und es floß ein Strom von nahezu 0,1 Milliamp. durch dieselbe. Diese Aufnahme wurde darauf in der Weise variiert, daß sonst nach Möglichkeit dieselben Bedingungen herrschten, dagegen die Platte mit den Metallen sich statt im Vakuum in Luft von normalem Druck befand. In beiden Fällen nun erschien eine deutliche dunkle Zeichnung der der Schicht anliegenden Münzseite nur beim Silbergeld, und ich möchte nicht gern darüber entscheiden, ob die Umkehrerscheinung im einen Fall schärfer zum Ausdruck kam als im anderen. Wenn aber wirklich die nun mehrfach erwähnten Luftschichten eine Rolle bei der Erscheinung spielen, so müßte sich doch wohl bei einem Luftdruck, der 5066 mal geringer ist als der normale Druck von 760 mm, ein prinzipieller Unterschied zeigen, der doch vermutlich in der Richtung zu suchen wäre, daß die Abbildung der verschieden weit von der photographischen Schicht entfernten Teile der nämlichen Münze wesentlich undeutlicherausfällt. Immerhin behalte ich mir jedoch noch vor, bei Gelegenheit weitere Untersuchungen in möglichst hohen Vakuis anzustellen. Auch könnte man noch Untersuchungen in anderen Gasen anstellen.

Es soll auch nicht unerwähnt bleiben, daß auch der Gedanke nicht ganz fern lag, daß man es bei der Umkehrerscheinung vielleicht mit einer chemischen Wirkung an den Berührungstellen der Metalle und der photographischen Schicht zu tun haben könnte, welche durch die schon öfter erwähnte Sekundärstrahlung in Wirksamkeit tritt. Wäre das der Fall, so wären allerdings diejenigen Aufnahmen nicht verständlich, bei welchen das Bild trotz der Zwischenlage des Papiers zustande kam, wenn man nicht etwa annehmen wollte, daß die chemischen Agenzien durch das Papier hindurch aufeinander wirken. Um auch diese Frage weiter zu ventilieren, könnten noch Untersuchungen mit Papieren angestellt werden, bei denen die lichtempfindlichen Silbersalze durch andere lichtempfindliche Metallsalze ersetzt sind. Es wurde übrigens auch schon

eine Reihe von Versuchen in dieser Richtung — von denen ich mir allerdings nicht gerade viel verspreche — angestellt, ohne daß jedoch positive Ergebnisse gewonnen wurden. Wollte man übrigens wirklich annehmen, daß bei dieser Gruppe von Erscheinungen chemische Wirkungen in Frage kämen, so wäre es doch schwer verständlich, daß die Tiefe der Kanäle von so wesentlichem Einfluß zu sein scheint.

Mit Sicherheit scheint nun aus den bisherigen Aufnahmen nur folgendes hervorzugehen:

I. Bei Bestrahlung mit einer über der lichtempfindlichen Schicht befindlichen Röntgenröhre erhält man wirklich gute Durchdringungsbilder, vorausgesetzt, daß überhaupt die Undurchlässigkeit für Röntgenstrahlen und die Dicke der Münzen bzw. Medaillen nicht zu groß und die Dickenunterschiede an den verschiedenen Stellen nicht zu klein sind, nur dann, wenn durch geeignete Ein- bzw. Unterlagen von Schwermetallen dafür gesorgt wird, daß von unten kommende Sekundärstrahlen geringer Absorbierbarkeit nicht die der photographischen Schicht anliegende Seite der abzubildenden Metallgegenstände treffen können. Diese Durchdringungsbilder lassen sich bei genügender Röhrenhärte — bis jetzt wurden die besten Aufnahmen mit einer Härte von ungefähr 6 B.W. erzielt — und bei geeigneter Metalleinlage zum großen Teil in wenig Minuten bzw. Bruchteilen einer Minute herstellen, und bei dieser Art von Abbildungen, wo also auf dem Negativ die Erhabenheiten hell und die Vertiefungen dunkel erscheinen, ist das wesentlich wirksame Moment in der Dickendifferenz der verschiedenen Münzstellen zu suchen, derart gedacht, daß die durch relativ dicke Stellen der Münze hindurchgehenden Strahlen durch die stärkere Absorption die photographische Platte entsprechend geringer beeinflussen als die dünnere Stellen durchdringenden Strahlen.

II. Die soeben erwähnten Sekundärstrahlen, welche beispielsweise von Holz, von Karton, Paraffin und auch von Glas ausgehen, führen bei Silbermünzen leicht zu der darin bestehenden Umkehrerscheinung, daß sich beim Negativ die Erhabenheiten der der photographischen Schicht anliegenden Metallseite dunkel und die ensprechenden Vertiefungen hell abbilden. Diese durch die von unten kommenden Sekundärstrahlen bedingte Wirkung arbeitet gegen die Wirkung der

die Durchdringungsbilder herbeiführenden Primärstrahlen an, und es erscheint dadurch verständlich, daß man von Silbermünzen relativ schwer gute Durchdringungsbilder erhält.

III. Diese Umkehrerscheinung wurde zunächst in geringerem Grade auch bei Kupfer-, Nickel- und vor allem auch bei Goldmünzen gefunden und es wurden darauf verschiedene reine mit Kanälen versehene Metalle geprüft, und zwar Aluminium, Eisen, Nickel, Kupfer, Zink, Palladium, Silber, Cadmium, Zinn, Antimon, Platin, Gold und Blei. Das dabei gewonnene Resultat läßt sich nun so aussprechen, daß die der Silber- und der Platingruppe angehörenden Elemente die Erscheinung am besten zeigen, daß dieselbe dagegen beim Aluminium gar nicht zu konstatieren war. Die, abgesehen von den Dickendifferenzen, durch die Metalle an sich hervorgerufenen Plattenschwärzungen waren am intensivsten bei den zur Silbergruppe gehörigen Metallen und es hatte den Anschein, daß auch die Differenzwirkung (also Umkehrerscheinung) bei diesen Metallen stärker ausgeprägt war als bei den Elementen der Platingruppe.

IV. Um möglichst gut die Umkehrerscheinung zu erhalten, tut man, wenn man nicht von vornherein mit reiner Sekundärstrahlung arbeiten will, gut daran, die Objekte mit möglichst dickem Blei zu bedecken, damit dieselben möglichst wenig von Primärstrahlen durchdrungen werden. Dieser Weg scheint auch am schnellsten zum Ziel zu führen.

V. Was die Beziehung der scharfen Ausprägung der Umkehrerscheinung zur Tiefe der Kanäle betrifft, so war die Erscheinung jedenfalls bei einigen Metallen, so beispielsweise beim Cadmium und beim Zinn, jedenfalls bis zu einer gewissen Grenze, um so ausgeprägter, je tiefer die Kanäle waren; es sind aber noch nicht genügend systematische Untersuchungen in dieser Richtung angestellt worden.[1])

Was die mit Becquerelstrahlen erhaltenen Aufnahmen betrifft, so will ich mich hier möglichst kurz fassen. Es wurde eine ganze Reihe von Aufnahmen gemacht, und zwar zum Teil mit den früheren Präparaten, zum großen Teil aber mit einem 20 mg reinstes Radiumbromid enthaltenden Präparat,

1) Ebenso müßten noch eingehende systematische Untersuchungen über den Einfluß der Belichtungszeit und der Intensität der Primärstrahlung auf das Phänomen angestellt werden.

welches ich der Güte des Hrn. Hans Hauswaldt aus Magdeburg-Neustadt verdanke. Es bestätigte sich bei den Versuchen mit Münzen durchaus das früher angegebene Resultat, daß eine auch nur einigermaßen deutliche Abbildung der von der photographischen Schicht abgewandten Seite sehr schwer zu erhalten ist, ganz im Gegensatz zu den Aufnahmen mit Röntgenstrahlen, wo bei geeeigneten Maßregeln relativ leicht eine gleichzeitig deutliche Abbildung beider Münzseiten zu erreichen ist. Von der in der früheren Arbeit ausgesprochenen Ansicht, daß vielleicht dieser Unterschied bei der Verwendung der verschiedenen Strahlengruppen wesentlich bedingt sei durch die verschieden große Durchdringungskraft der primären Röntgenstrahlen einer- und der β- bzw. γ-Strahlen andererseits[1]), bin ich allerdings inzwischen abgekommen, indem ich nun vielmehr der Ansicht zuneige, daß die schwieriger zu erhaltende Abbildung der von der photographischen Schicht abgewandten Münzseite bei Anwendung von Becquerelstrahlen jedenfalls im wesentlichen zu erklären ist durch die relativ starke und gleichzeitig relativ stark durchdringungsfähige in der ganzen Metallmasse entstehende Sekundärstrahlung.[2])

1) Wenn nur die sonstigen Bedingungen annähernd gleich sind, so dürfte doch vielleicht die in der früheren Arbeit geäußerte Ansicht, daß bis zu einer gewissen Grenze die Wegedifferenzen von solchen Metallgegenstände durchdringenden Strahlen eine um so größere Kontrastwirkung auf der photographischen Platte hervorufen werden, je weniger durchdringungsfähig dieselben sind, ihre Richtigkeit durch die jetzigen Resultate nicht eingebüßt haben. Wie schon erwähnt, wurden die meisten meiner mit Röntgenstrahlen angestellten Versuche mit einer Röhrenhärte von ca. 6 B. W. gemacht; auch scheint es, daß man im allgemeinen nicht unter 5 B. W. herabgehen soll, weil sonst die Durchdringungskraft zu gering wird. Immerhin aber erscheint es mir nicht ausgeschlossen, daß, falls man nur die richtigen Belichtungszeiten trifft, mit einer etwa die Mitte zwischen 5 und 6 B. W. haltenden oder einer vielleicht noch etwas geringeren Röhrenhärte noch kontrastreichere Durchdringungsbilder zu gewinnen wären als bei 6 B.W. Die wenigen Versuche, welche ich mit geringerer Härte als ca. 6 B.W. anstellte, geben aber in dieser Richtung noch nicht genügende Anhaltspunkte.

2) Vgl. B. Walter, Fortschritte a. d. Geb. d. Röntgenstrahlen 3. p. 74. — Diese Sekundärstrahlung scheint auch die Ursache davon zu sein, daß bei den vorher erwähnten zylindrischen Metallblöcken bei Verwendung von Becquerelstrahlen stets — d. h. bei Aluminium, Eisen, Kupfer, Zink, Silber — dunkle Mitte und heller Rand gefunden wurde.

Bei dieser Voraussetzung würde bei Anwendung verschiedener Metallbleche, welche auf der von der photographischen Schicht abgewandten Seite mit Kanälen versehen sind, wenn die Dicke der Bleche und die Tiefe der Kanäle gleich groß sind, das Zustandekommen einer Abbildung wesentlich abhängig sein von der Intensität der in den verschiedenen Metallen erzeugten Sekundärstrahlung und von dem Verhältnis der Durchdringungsfähigkeit der primären zu derjenigen der sekundären Strahlen. Wenn ich daher bei Untersuchungen mit Blechen aus Blei, Kupfer, Zink und Eisen, deren Dicke fast genau dieselbe war und bei denen die Kanaltiefe genau gleich war, fand, daß beim Blei eine deutliche Abbildung des von der photographischen Schicht abgewandten Kanals relativ leicht zustande kam, so würde das unter der angegebenen Voraussetzung, da die Intensität der Sekundärstrahlung beim Blei besonders hoch ist, darauf hindeuten, daß das Verhältnis des Durchdringungsvermögens der Primärstrahlung zu demjenigen der Sekundärstrahlung bei diesem Metall relativ groß ist. Jedoch müssen hierüber noch weitere Untersuchungen angestellt werden.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß ich bei Verwendung von Radiumstrahlen, trotzdem ich verschiedenste Plattenunterlagen und überhaupt verschiedenste Versuchsbedingungen wählte, bisher keine Aufnahme fand, die ich mit Sicherheit als ein Analogon zu der bei den Röntgenstrahlen gefundenen Umkehrerscheinung hätte bezeichnen können.

Hamburg, Physik. Staatslaboratorium, 10. Dez. 1907.

(Eingegangen 23. Dezember 1907.)

2. *Molekular-kinetische Theorie der Opaleszenz von Gasen im kritischen Zustande, sowie einiger verwandter Erscheinungen; von M. v. Smoluchowski.*

[Bearbeitet nach einer am 2. Dezember 1907 der Krakauer Akademie vorgelegten und demnächst in dem Bullet. Intern. Crac. erscheinenden Abhandlung.]

§ 1. Der Gegensatz zwischen der thermodynamischen und der kinetischen Methode beruht bekanntlich darauf, daß die erstere mit Begriffen (wie Dichte, Druck, Temperatur usw.) operiert, welche der makroskopischen Beobachtung entstammen und durch Annahme räumlicher und zeitlicher Homogenität idealisiert werden, während letztere dieselben durch statistische Begriffe ersetzt, welche die Anwendung von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen erfordern.

Man kann es wohl als erwiesen betrachten, daß die kinetische Theorie mit den aus der Erfahrung abgeleiteten Grundsätzen der Thermodynamik insofern übereinstimmt, als Zustände größter Wahrscheinlichkeit oder normale Vorgänge (d. i. Übergänge aus unwahrscheinlichen Anfangszuständen in wahrscheinlichere) in Betracht kommen, indem diese den thermodynamischen Gleichgewichtszuständen und den mit Entropiezuwachs verbundenen Vorgängen entsprechen.

Nun folgt aber aus dem Begriffe der Wahrscheinlichkeit, daß neben Zuständen größter Wahrscheinlichkeit auch minder wahrscheinliche vorkommen müßten, welche somit den Regeln der Thermodynamik widersprechen würden, und dies wurde von verschiedenen Seiten als gewichtiger Einwand gegen die Kinetik vorgebracht.

Demgegenüber wurde auf die ungeheure Anzahl von Molekülen hingewiesen, welche in den kleinsten der Beobachtung zugänglichen Teilen der Materie enthalten sind, infolge deren die experimentell beobachtbaren Vorgänge im allgemeinen sehr nahe dem Gesetz der großen Zahlen entsprechen, also mit den

wahrscheinlichsten oder „thermodynamischen" Vorgängen übereinstimmen müßten.[1])

Aber nun entsteht die Frage, wie groß jene Abweichungen des *augenblicklichen, zufälligen* Zustandes von dem *wahrscheinlichsten* oder *durchschnittlichen* Zustand sind, und ob dieselben nicht doch in gewissen Fällen sich bemerkbar machen sollten, — eine Frage, deren Wichtigkeit daraus erhellt, daß derartige Fälle ein Experimentum crucis behufs Entscheidung der alten Streitfrage über die Berechtigung der Kinetik oder Thermodynamik ermöglichen könnten.

Einige Fälle dieser Art sollen im folgenden näher besprochen werden; die Folgerungen aus denselben scheinen mir, wie ich schon hier bemerken möchte, durchaus zugunsten der kinetischen Theorien zu sprechen.

§ 2. Das auffallendste derartige Beispiel bilden die Bewegungen, welche an kleinen in Flüssigkeiten oder Gasen suspendierten Körpern als Folge der Molekularbewegung auftreten. Der Thermodynamik zufolge sollte ein solcher Körper im Falle vollständigen Gleichgewichts in Ruhe verbleiben; ebenso behauptet auch die Kinetik, daß der wahrscheinlichste Wert einer Verschiebung in der beliebigen X Richtung Null ist; doch folgt hieraus nicht, daß der *absolute* Wert der Verschiebung Null bleibt. Im Gegenteil, die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung des Körpers muß durchschnittlich der kinetischen Energie der fortschreitenden Bewegung eines Moleküls gleich sein; zwar könnten diese Verschiebungen bei größeren Körpern wegen der Kleinheit der mittleren Weglänge nicht konstatiert werden, wohl aber sollten sie bei mikroskopisch kleinen Teilchen eine meßbare Größe erreichen.

In einer früheren Arbeit[2]) sind nun gewichtige Gründe dafür angegeben worden, daß diese theoretisch zu erwartenden Bewegungen mit der den Mikroskopikern wohlbekannten Brownschen Bewegung identisch sind, und es ist auch die Übereinstimmung ihrer Größenordnung mit den diesbezüglichen Messungen F. Exners erwiesen worden.

1) Vgl. insbesondere die Kontroverse zwischen E. Zermelo und L. Boltzmann, Wied. Ann. **57.** p. 485, 773. 1896; **59.** p. 793; **60.** p. 392. 1907.

2) M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. **21.** p. 756. 1906.

Seither ist diese Ansicht durch anderweitige Experimentaluntersuchungen gestützt worden. So hat The Svedberg[1]) in seinen Messungen, welche unter ganz anderen Versuchsbedingungen und mittels anderer Methoden als die bisher üblichen angestellt waren, die theoretischen Folgerungen betreffs der Abhängigkeit der Bewegung von der Zähigkeit der Flüssigkeit und mit einer gewissen Annäherung auch die Größenordnung derselben bestätigt gefunden.

Weiters hat F. Ehrenhaft[2]) mittels ultramikroskopischer Messungen die Richtigkeit der l. c. bezüglich des Vorkommens und der Größenordnung analoger Phänomene *in Gasen* ausgesprochenen Vermutungen erwiesen. H. Molisch[3]) hat diese Bewegungen mittels eines gewöhnlichen Mikroskops beobachtet. Ultramikroskopische Beobachtungen derselben sind auch von R. Zsigmondy bereits im Jahre 1902 an Rauchteilchen angestellt worden, und sind dieselben in seiner Monographie „Zur Erkenntnis der Kolloide" (Jena 1905) p. 152 erwähnt, worauf mich der Verfasser freundlichst aufmerksam machte. Letztere Beobachtungen waren allerdings nur qualitativer Natur. Ich möchte jedoch noch auf eine in jenem Werke p. 108 enthaltene quantitative Angabe hinweisen.

Zsigmondy gibt an, daß kolloidale Goldteilchen von einem Durchmesser von $6 . 10^{-7}$ cm in $^1/_6$—$^1/_8$ Sekunde einen Weg von über $10\,\mu$ zurücklegen. Der theoretischen Formel zufolge, welche für Teilchen von 10^{-4} cm Durchmesser den mit Exners Messungen übereinstimmenden Wert $1{,}8\,\mu$ für den in einer Sekunde zurückgelegten Weg ergibt, sollte für den obigen Fall die Verschiebung $8{,}8\,\mu$ betragen. Dies kann wohl als eine überraschend gute Bestätigung der theoretisch zu erwartenden Zunahme der Bewegungen mit Abnahme der Teilchengröße gelten, welche Zsigmondy anfänglich bewogen hatte, jenes Phänomen als ein vom Brownschen verschiedenes anzusehen.

Es scheint somit in der Brownschen Molekularbewegung

1) The Svedberg, Zeitschr. f. Elektrochem. 12. p. 853, 909. 1906; vgl. insbesondere die zusammenfassende Darstellung in dessen Monographie: „Studien zur Lehre von den kolloidalen Lösungen", Upsala 1907.

2) F. Ehrenhaft, Wiener Ber. 116. p. 1175. 1907.

3) H. Molisch, Zeitschr. f. Mikroskopie p. 97. 1907.

eine augenscheinliche (und bei geeigneten Bedingungen sogar mit freiem Auge sichtbare![1]) Bestätigung der kinetischen Theorie vorzuliegen, welche zugleich beweist, daß der übliche thermodynamische Begriff der molaren Bewegung, bzw. Ruhe, schon bei Anwendung auf mikroskopisch kleine Räume versagt. Damit hängt natürlich auch die theoretische Realisierbarkeit eines Perpetuum mobile zweiter Art zusammen.[2])

§ 3. Eine andere Frage dieser Art möge an dieser Stelle etwas ausführlicher untersucht werden, nämlich die Ungleichförmigkeiten der Dichte, welche der Kinetik zufolge in Gasen und Flüssigkeiten auftreten müssen. Einige diesbezügliche Erwägungen wurden in einer vor mehreren Jahren erschienenen Arbeit mitgeteilt.[3])

Es war erwiesen worden, daß die Dichte eines Gases nicht durchaus gleichförmig sein kann, sondern daß die nach den Regeln des Zufalles erfolgende Gruppierung der Gasmoleküle stellenweise eine etwas größere, stellenweise geringere Dichte bedingt. Befinden sich gerade n Moleküle einem Raume, auf welchen bei gleichförmiger Verteilung ν Molelküle entfallen sollten, so nennen wir das Verhältnis $n/\nu - 1 = \delta$ die zufällige (oder lokale) Verdichtung. Die Wahrscheinlichkeit einer zwischen δ und $\delta + d\delta$ enthaltenen Verdichtung ist nun für den Fall eines idealen Gases durch die folgende Formel bestimmt:

$$W(\delta)\,d\delta = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}}\, e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}\, d\delta, \tag{1}$$

woraus der Mittelwert der positiven oder negativen Verdichtung folgt[4]):

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\nu\pi}}. \tag{2}$$

Offenbar widersprechen diese spontanen Abweichungen vom Mittelwert der Dichte dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, wie auch daraus hervorgeht, daß sie die Herstellung

1) H. Molisch, Wiener Ber. **116.** I. p. 467. 1907.

2) M. v. Smoluchowski, l. c. p. 778; The Svedberg, Zeitschr. phys. Chem. **59.** p. 451. 1907.

3) M. v. Smoluchowski, Boltzmann-Festschrift p. 626. 1904.

4) An der erwähnten Stelle ist die Zahl 2 aus Versehen in den Nenner gesetzt worden.

eines Perpetuum mobile zweiter Art ermöglichen würden, falls wir imstande wären, Ventile von verschwindend kleiner Masse und von einem Querschnitte von der Ordnung $[1\ \mu]^2$ herzustellen.

Diese Ungleichförmigkeiten der Dichte können auch die Zustandsgleichung der Gase beeinflussen; insbesondere war gezeigt worden, daß infolge derselben auch die Van der Waalssche Gleichung gewisse Modifikationen erleiden muß.

§ 4. Doch wollen wir jetzt in diese Fragen nicht näher eingehen, sondern wollen die Wahrscheinlichkeit solcher Verdichtungen in einem beliebigen gasförmigen oder flüssigen Medium von einem allgemeineren Standpunkt aus erwägen, indem wir uns des bekannten e^{-hz} Theorems Boltzmanns in einer gewissen von Einstein angegebenen Form[1]) bedienen werden.

Stellen wir uns ein zylindrisches Gefäß vom Querschnitt q vor, welches an einem Ende verschlossen, am anderen Ende mit einem großen Gasbehälter verbunden ist, in welchem der Druck p_0 und die Temperatur T_0 herrscht. Eine gewisse Menge, nämlich q Gramm dieses Gases, soll in jenem Zylinder mittels eines beweglichen, für Wärme durchlässigen Kolbens abgeschlossen sein. Im Normalzustand, d. h. wenn Druck, Temperatur und die entsprechende Dichte beiderseits gleich sind, wird sich der Kolben somit in der Entfernung $x = v_0$ vom Boden des Zylinders befinden ($v_0 =$ das dem Drucke p_0 und der Temperatur T_0 entsprechende spezifische Volum), und einer Entfernung aus dieser Normallage, z. B. einer Verkleinerung von x, wird der Druckzuwachs des eingeschlossenen Gases entgegenwirken. Wenn wir aber auf den Kolben eine äußere Kraft: $F = q(p - p_0)$ einwirken lassen, welche einerseits den Druck p des eingeschlossenen, auf das spezifische Volum v komprimierten Gases, andererseits den konstanten Druck p_0 des im Behälter befindlichen Gases aufhebt, so wird der Kolben in jeder beliebigen Lage im Gleichgewicht sein, wird also infolge der unregelmäßigen, zufälligen Molekularstöße jede Lage (innerhalb des Zylinders) mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein-

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 19. p. 373. 1906 Gleichung (I).

nehmen. Die Wahrscheinlichkeit eines spezifischen Volums $v \ldots v + dv$ ist somit:

$$W(v)\,dv = a\,dv, \tag{3}$$

wo a eine Konstante bedeutet.

Vergleichen wir hiermit den früheren Zustand des Systems, vor Einführung der Kraft F. Um die Kraft F zu vernichten, führen wir eine Zusatzkraft $-F$ ein, welche das Potential

$$\Phi = -\,q\int_{v_0}^{v}(p - p_0)\,dv$$

besitzt. Hierdurch wird für diesen Fall nach dem erwähnten Boltzmann-Einsteinschen Satze:

$$W(v)\,dv = b\,e^{-h\Phi}\,dv. \tag{4}$$

Hier bedeutet h den Koeffizienten $N/\varrho\,R\,T$, wo N die Anzahl Moleküle pro $1\,\mathrm{cm}^3$ des Gases ($= 4 \cdot 10^{19}$), R die Gaskonstante (für Luft $2{,}87 \cdot 10^6$) bezeichnet. Da nun Nq/ϱ gleich der Gesamtzahl der Moleküle des abgeschlossenen Gases ist, welche wir mit ν bezeichnen, so erhalten wir allgemein die Wahrscheinlichkeit, daß ν Gasmoleküle einen dem spezifischen Volum $v \ldots v + dv$ entsprechenden Raum einnehmen, falls der Druck p_0, das normale spezifische Volum v_0 beträgt:

$$W(v)\,dv = b\,e^{\frac{\nu}{R\,T_0}\int_{v_0}^{v}(p - p_0)\,dv}. \tag{5}$$

Das Integral im Exponenten bedeutet offenbar die Kompressionsarbeit, also die zwischen den Koordinaten p_0, v und der Isotherme T_0 eingeschlossene Fläche des pv Diagramms.

§ 5. Insofern wir uns auf Betrachtung geringfügiger Abweichungen vom Normalzustande beschränken, können wir den Exponenten nach dem Taylorschen Satz entwickeln:

$$\int_{v_0}^{v}(p - p_0)\,dv = \frac{(v - v_0)^2}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_0 + \frac{(v - v_0)^3}{2\cdot 3}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_0 + \frac{(v - v_0)^4}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)_0 + \ldots \tag{6}$$

und erhalten die Näherungsformel für einen Kompressionsbetrag $\delta \ldots \delta + d\delta$:

$$(7) \quad \begin{cases} W(\delta)\,d\delta = b\,e^{-\alpha\delta^2}, \\ \alpha = -\frac{\nu v_0^2}{2RT_0}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_0 = \frac{\nu}{2RT_0\varrho_0\beta} = \frac{V}{2\omega p\beta}, \end{cases}$$

wo β die Kompressibilität $-\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}$, V das durch die gegebene Gasmenge eingenommene Normalvolum, ω das dem Drucke p entsprechende Molekularvolum bedeutet.

Durch Substitution des Gesetzes von Boyle-Charles folgt hieraus wieder die früher mittels direkter Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen abgeleitete Formel (1).

Die Konstante b bestimmt man zufolge der Bedingung:

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} W(\delta)\,d\delta = 1$$

und für die mittlere Abweichung der Dichte vom Durchschnittswert erhält man

$$(9) \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} = \sqrt{\frac{2RT_0\varrho_0\beta}{\nu\pi}} = \sqrt{\frac{2\omega p\beta}{V\pi}}.$$

Die zufälligen Verdichtungen und Verdünnungen sind somit offenbar um so geringer, je größer die in Betracht gezogene Molekülanzahl ist, und je steiler die Neigung der Isotherme $\partial p/\partial v$ ist. In den Punkten eines maximalen oder minimalen p, wo $\partial p/\partial v = 0$ ist, überschreitet das Gas die Stabilitätsgrenze; das sind mithin die äußersten Grenzen möglicher Übersättigung oder Überhitzung.

§ 6. Wenden wir uns der Untersuchung größerer Abweichungen vom Normalzustande zu. Für gegebene Werte von v_0, p_0 (und die entsprechende Temperatur T_0) folgen die wahrscheinlichsten und unwahrscheinlichsten Werte des spezifischen Volums aus der Bedingung, daß der Exponent in (5) ein Minimum oder Maximum sei; das heißt:

$$\frac{\partial}{\partial v}\int_{v_0}^{v}(p - p_0)\,dv = 0 \quad \text{oder} \quad p = p_0.$$

Innerhalb des Temperaturbereiches, wo die Zustandsgleichung für ein gegebenes p_0 drei Werte des spezifischen Volums er-

gibt, entsprechen zwei davon, v_0 und v', Zuständen größter Wahrscheinlichkeit, der mittlere Wert v'' einem Zustande minimaler Wahrscheinlichkeit.

Man kann sich die Dichteverteilung innerhalb der Volumelemente eines solchen Gases mittels einer Wahrscheinlichkeitsfläche veranschaulichen, indem man (für eine gegebene Temperatur T_0) zu jedem p_0, v das zugehörige W nach Formel (5) als dritte, zu jenen senkrechte, Koordinate aufträgt (Fig. 1).

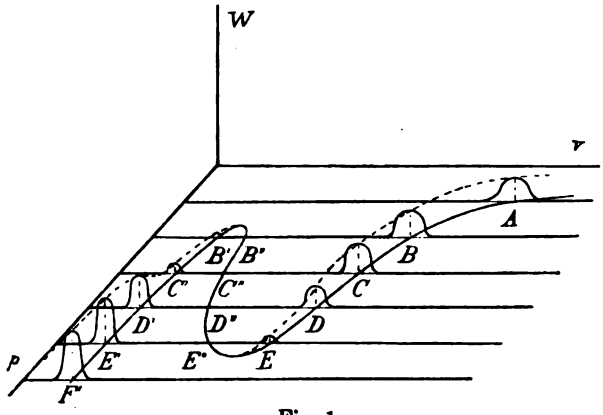


Fig. 1.

Die Punkte größter Erhebung und größter Depression bezeichnen die Lage der normalen Isotherme. Gehen wir z. B. von einem gasförmigen Zustande A aus. Bei steigendem Normaldruck p_0 geht das Gas in den Zustand B über, wo eine, wenn auch anfänglich sehr geringe, Wahrscheinlichkeit eines flüssigen Aggregatzustandes B' besteht. Bei weiterem Wachsen von p_0 wächst aber die dem Querschnitt B' proportionale Wahrscheinlichkeit eines flüssigen Zustandes, während die Wahrscheinlichkeit eines gasförmigen Zustandes abnimmt.

Um diese Größen zu vergleichen, bemerken wir, daß man wegen der Existenz eines sekundären Maximums im Punkte B' entwickeln kann:

$$\int_{v_0}^{v}(p-p_0)\,dv = \int_{v_0}^{v'}(p-p_0)\,dv + \frac{(v-v')^2}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)' + \ldots,$$

wo die gestrichenen Zeichen den Werten der normalen Iso-

therme in B' entsprechen. Mithin hat die Schnittkurve nicht nur in B, sondern auch in B' den Charakter einer Laplaceschen Kurve, und die Flächenräume ergeben sich zu:

$$W_{\text{gas}} = \int_B W\,dv = b\sqrt{\frac{2RT_0\varrho_0\beta_0}{\nu\pi}},$$

$$W_{\text{liq}} = \int_{B'} W\,dv = b\,e^{\frac{\nu}{RT_0}\int_{v_0}^{v'}(p-p_0)\,dv}\sqrt{\frac{2RT_0\varrho'\beta'}{\nu\pi}},$$

woraus mit Rücksicht auf (8) folgt:

$$b = \frac{\sqrt{\frac{\nu\pi}{2RT_0}}}{\sqrt{\varrho_0\beta_0} + \sqrt{\varrho'\beta'}\,e^{\frac{\nu}{RT_0}\int_{v_0}^{v'}(p-p_0)\,dv}} \tag{10}$$

und die relative Wahrscheinlichkeit eines gasförmigen oder flüssigen Zustandes ist:

$$\frac{W_{\text{gas}}}{W_{\text{liq}}} = \sqrt{\frac{\varrho_0\beta_0}{\varrho'\beta'}}\,e^{-\frac{\nu}{RT_0}\int_{v_0}^{v'}(p-p_0)\,dv} \tag{11}$$

Genau genommen müßte also der Verflüssigungspunkt $D\,D'$, wo W_{gas} und W_{liq} gleich werden, von der Zahl ν, also von der Substanzmenge abhängen. Da aber die Molekülzahl ν auch für die kleinste direkt wahrnehmbare Substanzmenge ungemein groß ist, so wird jener Quotient (11) einen ungemein großen Wert behalten, solange als das Integral einen merklichen negativen Wert hat, dagegen wird der flüssige Zustand außerordentlich wahrscheinlicher sein, wenn das Integral einen merklichen positiven Wert erhält und der Übergang aus dem gasförmigen in den flüssigen Zustand wird mit ungemein großer Annäherung durch die Bedingung:

$$\int_{v_0}^{v'}(p-p_0)\,dv = 0 \quad \text{oder} \quad \int_{v_0}^{v'} p\,dv = p_0(v'-v_0) \tag{12}$$

bestimmt sein, in Übereinstimmung mit der bekannten Maxwellschen Regel.

Will man sich also das Verhalten einer Substanzmenge veranschaulichen, welche aus einer größeren Zahl Moleküle besteht, so muß man sich die Erhebungen $ABCD$, $D'E'F'$ unvergleichlich höher und schmäler denken als es die Fig. 1 zeigt, dagegen müßten die Erhebungen der metastabilen Teile DE, $B'C'D'$ kaum merklich sein. So z. B. ist es 10^{40} mal wahrscheinlicher, daß $[0{,}2\,\mu]^3$ Wasserdampf sich bei einer Temperatur 100,01° und einem Drucke 760 mm im gasförmigen als im flüssigen Zustand befindet.

Das Wahrscheinlichkeitsdiagramm beleuchtet somit die Verdampfungsvorgänge und insbesondere die Maxwellsche Regel von einer neuen Seite, wobei jedoch auch der schwache Punkt sämtlicher Beweise jener Regel deutlich hervortritt: daß nämlich der Teil $E'D''C''B''$ der Isotherme benutzt wird, obwohl ausdrücklich bewiesen wurde, daß derselbe Zustände geringster Wahrscheinlichkeit vorstellt.

Es erscheint auch die Tendenz zu Übersättigungserscheinungen im Punkte D und zu Siedeverzügen im Punkte D' verständlich, da eine Änderung des Aggregatzustandes einen Übergang durch das Gebiet der unwahrscheinlichsten Zustände erfordert. Dabei muß jedoch bemerkt werden, daß diese Übersättigungsphänomene den Rahmen der hier dargelegten Theorie überschreiten, da in diesen Rechnungen ihre eigentliche Ursache, die Erschwerung der Tropfenbildung im übersättigten Dampf und der Bläschenbildung in der überhitzten Flüssigkeit durch spezielle Kapillaritätserscheinungen nicht in Betracht gezogen ist.[1])

§ 7. Gehen wir zur Untersuchung der Verhältnisse in der Nähe des kritischen Punktes über. Ein für die kritische Temperatur entworfenes Diagramm nach Art der Fig. 1 würde

1) Eine diesbezügliche vervollständigte Theorie müßte zu dem Schlusse führen, daß bei sehr geringen Substanzmengen auch die Gestalt derselben in Betracht kommt; bei unseren ungenügenden Kenntnissen betreffs des Wesens der Kapillarkräfte scheint jedoch eine solche Vervollständigung der Theorie nicht angemessen zu sein, um so mehr als der Einfluß dieser Verbesserungen im allgemeinen recht unbedeutend sein dürfte, mit alleiniger Ausnahme der Übersättigungserscheinungen, wo die an der Grenze zweier so verschiedener Medien wie Dampf und Flüssigkeit auftretenden Oberflächenkräfte eine größere Rolle spielen müssen.

zeigen, daß dort die Tendenz zur Ausbildung von lokalen Verdichtungen und Verdünnungen außerordentlich zunehmen muß. Für den kritischen Punkt selbst haben wir in der Entwickelung (6) einzusetzen:

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0$$

und erhalten aus (5):

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} W(\delta)\, d\delta = b\, e^{-\gamma \delta^4}\, d\delta, \\ \gamma = -\frac{\nu}{R T_\varkappa} \frac{v_\varkappa^4}{4!} \left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)_\varkappa. \end{cases}$$

Die mittlere Abweichung von der normalen Dichte wird:

$$\text{(14)} \qquad \delta = \frac{1}{\sqrt[4]{\gamma}} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4)} = \frac{0{,}489}{\sqrt[4]{\gamma}}.$$

Wenn wir z. B. die van der Waalssche Gleichung annehmen, so ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)_\varkappa = -\frac{a}{81\, b^5} = -\frac{27}{8} \frac{R T_\varkappa}{v_\varkappa^4},$$

somit:

$$\gamma = \frac{9\,\nu}{64}$$

und die mittlere Abweichung der Dichte:

$$\text{(15)} \qquad \delta = \frac{1{,}13}{\sqrt[4]{\nu}}.$$

Wir bemerken, daß diese Größe von der Natur des Gases ganz unabhängig ist und nur von der Molekülzahl ν abhängt. Zur besseren Orientierung in diesen Verhältnissen betrachten wir folgende Beispiele. Die Anzahl der in einem Würfel von der Kantenlänge einer Lichtwellenlänge $[0{,}6\ \mu]^3$ enthaltenen Gasmoleküle ist unter normalen Verhältnissen $9 \cdot 10^6$ [1]), und die mittlere Abweichung von der normalen Dichte wird nach (2) $\delta = 2{,}7 \cdot 10^{-4}$. Dasselbe Volum würde im kritischen Punkt des Äthyläthers $5{,}4 \cdot 10^8$ Äthermoleküle enthalten, und gemäß (15) haben wir in diesem Falle $\delta = 7{,}2 \cdot 10^{-3}$. [2]) Es werden

1) J. H. B. A. Jeans, Phil. Mag. 8. p. 692. 1904.

2) Zum Vergleich geben wir noch die entsprechenden Werte für Äther unter normalem Druck und Temperatur 20°: $\delta = 3{,}7 \cdot 10^{-5}$ und für Quecksilber: $\delta = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ an.

also solche Volumteile im Mittel mehr als einprozentige Dichteunterschiede aufweisen.

§ 8. Eine solche „Körnigkeit" der Struktur müßte sich aber durch das Auftreten der für trübe Medien charakteristischen optischen Erscheinungen — der Opaleszenz und des sogenannten Tyndallschen Phänomens — bemerkbar machen. Den Untersuchungen Lord Rayleighs zufolge muß nämlich ein Medium, welches kleine Teilchen suspendiert enthält, einen einfallenden Lichtstrahl nach Maßgabe eines scheinbaren Absorptionskoeffizienten h schwächen:

$$h = \frac{32}{3}\pi^3 N T^2 \frac{\varepsilon^2}{\lambda^4} \tag{16}$$

und gleichzeitig eine entsprechende Energiemenge als diffuses Licht nach allen Richtungen ausstrahlen, während der Brechungsindex des Mediums eine Vergrößerung im Verhältnis von $(1 + NT\varepsilon)$ erfährt. Dabei bedeutet N die Anzahl der Teilchen pro Volumeinheit, T deren Volum, ε den Bruchteil, um welchen der Brechungsindex der suspendierten Substanz größer ist als jener des Mediums.[1])

Der normale Brechungsindex wird somit durch die teils positiven, teils negativen Dichteunterschiede und die zu denselben proportionalen ε nicht beeinflußt (wenigstens bei diesem Grade der Annäherung). Dagegen muß der Koeffizient h, welcher für die Absorptions- und Opaleszenzphänomene maßgebend ist, und welcher vom Quadrate jener Größen abhängt, bei Annäherung an den kritischen Punkt eine enorme Vergrößerung erfahren. So würden wir für das oben angeführte Beispiel [unter Annahme: $T = \lambda^3$; $n = 1/T$; $\varepsilon = 0{,}1\,\delta$] einen Wert $h = 2{,}7$ erhalten, d. h. daß die Intensität des einfallenden Lichtes schon durch Passierung einer 0,26 cm dicken Schicht von im kritischen Zustande befindlichen Ätherdampfes auf die Hälfte vermindert würde. Demgegenüber sei bemerkt, daß eine analoge Berechnung für Luft im Normalzustand $h = 3 \cdot 10^{-8}$ ergibt, daß also selbst die ganze Dicke der Erdatmosphäre nur eine Verminderung der Intensität um 2 Proz.

1) Vgl. insbesondere Phil. Mag. 41. p. 167. 1871; 47. p. 375. 1899; Lord Rayleigh, Papers 4. p. 400.

hervorbringen würde, und nicht viel größere Zahlen erhält man für Ätherdampf unter Atmosphärendruck.

Diese Berechnung ist zwar in quantitativer Hinsicht sehr mangelhaft, da Rayleighs Formeln Teilchen voraussetzen, welche im Innern homogen sind und Dimensionen besitzen, die klein sind im Vergleich zur Lichtwellenlänge λ, aber sie ist gewiß zur Ableitung qualitativer Schlußfolgerungen vollständig geeignet.[1])

§ 9. Bekanntlich tritt tatsächlich bei Gasen im kritischen Zustande eine deutliche Opaleszenz auf. Diese Erscheinung ist zuerst wohl von Altschul und Wesendonck konstatiert, und in letzterer Zeit von M. Travers und F. Usher sowie von S. Young genauer untersucht worden.[2]) Es hat sich gezeigt, daß die Opaleszenz ein sehr charakteristisches und empfindliches Merkmal des kritischen Punktes bildet, indem sie nur innerhalb von Zehntelgraden und innerhalb gewisser Volumgrenzen um jenen Punkt herum auftritt; und zwar erscheint sie vor dem Verschwinden des Meniskus unter entsprechenden Bedingungen sowohl in der Flüssigkeit wie im Gase, nach Verschwinden desselben in der gemeinsamen Phase. Auch die öfters bemerkten bräunlichen Nebelwölkchen dürften sich im Zusammenhang damit wohl als Farben trüber Medien im durchgehenden Licht deuten lassen.

Was nun die Erklärung dieses Phänomens anbelangt, so

---

1) Nach Lord Rayleigh ist die Luft ein trübes Medium, dessen Teilchen T die Luftmoleküle selbst sind, und daraus erklärt sich die blaue Farbe des Himmels und die Lichtabsorption in der Erdatmosphäre. Rayleighs Berechnung ergibt für h (unter Annahme $N = 4.10^{19}$) den Wert 7.10^{-8}. Obige Rechnung würde also beweisen, daß auch die lokalen Dichteunterschiede dabei in merklicher Weise mitspielen. Eine genaue Berechnung dieses Einflusses würde aber weitgehende Änderungen in Rayleighs Entwickelungen erfordern, da deren Grundvoraussetzungen, daß die Anordnung der Teilchen eine zufällige sei, und daß die in einem gewissen Volum enthaltene Anzahl derselben diesem Volum proportional sei, dem obigen zufolge miteinander in teilweisem Widerspruch stehen. Damit hängt auch die genaue Berechnung der in §§ 14, 15 zu besprechenden Erscheinungen zusammen.

2) M. Altschul, Zeitschr. f. physik. Chem. 11. p. 578. 1893; K. v. Wesendonck, Naturw. Rundschau 9. p. 210. 1894; 22. p. 145. 1907; M. Travers u. F. Usher, Zeitschr. f. physik. Chem. 57. p. 365. 1906; S. Young, Proc. Roy. Soc. 78. p. 262. 1906.

ist bisher eine solche nur von Donnan[1]) versucht worden. Seiner Hypothese zufolge sollte die Oberflächenspannung im kritischen Punkte zwar für ebene Flächen verschwinden, aber für kleine Krümmungsradien noch einen endlichen Wert behalten, so daß kleine Tröpfchen auch oberhalb jener Temperatur eine stabile Existenz führen könnten. Diese Hypothese scheint mir in mehrfacher Beziehung unklar zu sein. Vor allem handelt es sich nicht um zwei verschiedene Substanzen, sondern um eine Substanz, deren zwei Phasen schon bei der kritischen Temperatur identisch werden. Was ist das also für eine Flüssigkeit, von deren Existenz oberhalb der kritischen Temperatur die Rede ist? Und warum tritt die Opaleszenz auch unterhalb jener Temperatur auf? Auch scheint den üblichen Ansichten über das Wesen der Kapillarkräfte eher eine Abnahme der Oberflächenspannung mit Verkleinerung des Krümmungsradius zu entsprechen als umgekehrt.

Übrigens werden wir in eine ausführliche Diskussion dieser Fragen nicht eingehen, da Donnans Hypothese angesichts der einfachen molekular-kinetischen Erklärung jener Phänomene vollkommen überflüssig erscheint. Wir sind wohl berechtigt, diese Opaleszenz geradezu als einen augenscheinlichen Beweis für die Richtigkeit der Überlegungen des § 3—7 aufzufassen.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß die derart konsequent durchgeführte kinetische Theorie sich in gewissem Sinne der Theorie der liquidogenen und gasogenen Moleküle von Traube[2]) nähert, da man mit solchen Namen die Teile $B'C'D'E'$ und $BCDE$, oder allgemein die verdichteten und verdünnten Partien bezeichnen könnte. Es sei jedoch bemerkt, 1. daß dies weder eigentliche Moleküle noch Tröpfchen sind, sondern diffuse Häufungen, von unbestimmter Größe, da zu jedem Werte v ein entsprechendes δ gehört, 2. daß ihr Zustand im Falle des thermischen Gleichgewichts durch die Werte des Druckes (p_0) und der Temperatur (T_0) eindeutig bestimmt ist, daß also die klassische Theorie der kritischen Erscheinungen bestehen bleibt, wenigstens insoweit Verzögerungs-

1) F. Donnan, Chem. News 20. p. 139. 1904; Rep. Brit. Ass. 1904. p. 504.

2) J. Traube, Ann. d. Phys. 8. p. 267. 1902; Zeitschr. phys. Chem. 58. p. 475. 1907.

erscheinungen ausgeschlossen werden. Diesbezüglich wird allerdings oft übersehen, daß die zur Herstellung vollständigen thermodynamischen Gleichgewichts erforderliche Zeit wegen der Bedingungen

$$\frac{\partial p}{\partial v} = 0, \quad c_p = \infty,$$

im kritischen Punkte ausnehmend groß ist.

Unsere Ausführungen geben kein Mittel, um die Existenzdauer individueller Häufungen zu schätzen. Bei idealen Gasen wird die zu einem gewissen Volumteile gehörige Größe δ sehr rasch zwischen positiven und negativen Werten schwanken, aber es ist nicht ausgeschlossen, daß die Existenzdauer solcher Agglomerate im kritischen Zustand größer ist. Dieselben würden sich bei Temperaturerniedrigung in die Nebeltröpfchen verwandeln, aus deren Vereinigung die flüssige Phase entsteht[1]).

§ 10. Ganz analoge Opaleszenzerscheinungen wie die soeben besprochenen sind auch als charakteristisches Merkmal einer anderen Art kritischen Zustandes bekannt, nämlich des sogenannten „kritischen Lösungspunktes" oder „kritischen Trennungspunktes" teilweise lösbarer Flüssigkeiten. Solche Flüssigkeitspaare bilden in Mischungen bei gewissen Temperaturen zwei mit der Dampfphase koexistierende Flüssigkeitsschichten verschiedener Konzentration x, x'; der Konzentrationsunterschied $x - x'$ nimmt meistens mit steigender Temperatur ab, bis zu einer bestimmten Temperatur T_k, der kritischen Lösungstemperatur, wo die Zusammensetzung beider Schichten identisch wird ($= x_k$), infolgedessen die Oberflächenspannung der Grenzfläche verschwindet[2]) und beide Schichten in eine homogene Flüssigkeit zerfließen. Bei höheren Temperaturen besteht dann nur eine einzige flüssige Phase für beliebige Konzentration.

Wenn nun eine der kritischen Konzentration x_k nahe Lösung von einer die kritischen übersteigenden Anfangstemperatur abgekühlt wird, so tritt in ihr bei Annäherung an T_k eine bläuliche Opaleszenz auf, welche schließlich in eine weiß-

1) Vgl. G. Teichner, Ann. d. Phys. 13. p. 595. 1904.

2) Siehe die experimentellen Messungen Antonows, Journ. chim. phys. 5. p. 363. 1907.

liche Trübung übergeht, worauf die Spaltung in zwei Schichten erfolgt. Für andere Konzentrationen treten diese Opaleszenz- und Trübungserscheinungen bei Annäherung an die betreffende Trennungstemperatur auf, aber werden um so undeutlicher, je mehr sich die Konzentration von x_κ unterscheidet, was auch quantitativ durch die von Friedländer für verschiedene Konzentrationen und Temperaturen gemessenen Absorptionskoeffizienten illustriert wird[1]).

Derselbe Forscher hat auch die völlige zeitliche Unveränderlichkeit dieses Phänomens bewiesen; dieser Umstand erschwert nach seiner wie auch Rothmunds[2]) Ansicht die Erklärung der Erscheinung durch suspendierte Tröpfchen, da gemäß Lord Kelvins Regel die größeren Tröpfchen auf Kosten der kleineren wachsen müßten, also das Phänomen sich im Laufe der Zeit ändern müßte.

§ 11. Ein Erklärungsversuch ist von Konowalow[3]) gegeben worden, demzufolge das eigentliche Agens kleine in der Flüssigkeit suspendierte Staubteilchen wären, welche Attraktionszentra für eine der beiden Flüssigkeiten bilden und sich infolgedessen mit einer Flüssigkeitsschicht von verschiedener Konzentration überziehen würden. Diese Schicht sollte um so dicker sein, je geringer die zu einer Konzentrationsänderung erforderliche Arbeit ist, und da diese Arbeit im kritischen Trennungspunkt verschwindend klein ist, wie Konowalow aus den Dampfdruck-Kurven folgert, so müßten solche Erscheinungen in jenem Punkte am deutlichsten hervortreten.

Demgegenüber ist einzuwenden, daß eine derartige Attraktionswirkung von Staubteilchen eine unbewiesene, ad hoc ersonnene Hypothese bildet, da ja die bekannte quasi-katalytische Wirkung des Staubes auf übersättigten Dampf etwas hiervon ganz Verschiedenes ist. Auch sprechen gegen eine solche Theorie, welche die Opaleszenz als eine zufällige durch Staub verursachte Erscheinung ansieht, die Regelmäßigkeit derselben, sowie auch die Versuche von Friedländer, welche die völlige Wirkungslosigkeit eines Potentialgefälles dargetan

1) I. Friedländer, Zeitschr. phys. Chem. **38.** p. 335. 1901.
2) V. Rothmund, Zeitschr. phys. Chem. **26.** p. 433. 1898.
3) D. Konowalow, Ann. d. Phys. **10.** p. 360. 1903.

haben, das z. B. eine kolloidale Kolophoniumlösung sofort zum Koagulieren brachte.

§ 12. Vor allem ist jedoch gegen Konowalows Hypothese, wie auch gegen Donnans Theorie (§ 9), welche auch hier angewendet werden könnte, einzuwenden, daß diese Hypothesen überflüssig sind. Die ganze Erscheinung erklärt sich ganz einfach, in analoger Weise wie die Phänomene der § 7—9, nämlich als Folge spontaner Konzentrationsunterschiede, welche ebenso aus den kinetischen Grundannahmen gefolgert werden müssen, wie die dort behandelten Dichteunterschiede. Ohne in eine quantitative Berechnung einzugehen, bemerken wir nur, daß man für diesen Fall Diagramme von Konzentrationswahrscheinlichkeiten analog der Fig. 1 entwerfen könnte, und daß die Ausnahmestellung des kritischen Trennungspunktes durch die Bedingungen:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

begründet ist, aus welchen für diesen Punkt, analog zu § 7, eine extreme Zunahme der lokalen Konzentrationsunterschiede und als Folge der optischen Inhomogenität eine enorme Steigerung des Opaleszenzvermögens folgt. Die Bildung der weißlichen Trübung kennzeichnet dagegen den Moment, wo sich wirkliche Flüssigkeitströpfchen mit einem der Lichtwellenlänge gleichen Durchmesser zu bilden beginnen, wo also eine endliche Kapillaritätskonstante und eine zweite Flüssigkeitsphase auftritt.

§ 13. Ähnliche Abweichungen von der normalen Konzentration wie die soeben besprochenen müssen, wenn auch in schwächerem Grade, in einer jeden Lösung auftreten. Im Falle verdünnter Lösungen kann man eine ganz analoge Überlegung anwenden wie in § 4, indem man voraussetzt, daß der Kolben halbdurchlässig ist, daher einen durch die van't Hoffschen Gesetze bestimmten osmotischen Druck p erfährt. Man erhält so wieder dieselbe Formel (2):

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\nu \pi}},$$

wobei aber jetzt δ die Abweichung von der normalen Konzentration, ν die Anzahl der Moleküle des gelösten Stoffes bedeutet.

Bei gegebener Stoffmenge wird also δ desto größer sein, je größer das Molekulargewicht ist, muß also bei kolloidalen Lösungen abnorm hohe Werte erreichen. Um die Opaleszenzfähigkeit zu bestimmen, berechnen wir den Koeffizienten h nach (16), unter Rücksicht darauf, daß eine Konzentrationsänderung im Verhältnis $1 : 1 + \delta$ eine Änderung des Brechungsindex um $dn = (\partial n / \partial c) . c\,\delta$ hervorruft. Es folgt daraus:

$$h = 1{,}8 \,.\, 10^{-5} \frac{\mu c}{\varrho} \left(\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial c} \right)^2, \tag{17}$$

wo μ das Molekulargewicht der gelösten Substanz, ϱ die Dichte der Lösung, c den Prozentgehalt derselben bedeutet. Für wässerige Lösungen kann man $\varrho = 1$, und für $\left(\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial c} \right)$ Werte von der Größenordnung 0,2 (für Natriumchlorid, Mastix) annehmen, woraus in der Tat für Lösungen mit einem Molekulargewicht von 10^4 schon eine merkliche Opaleszenz folgen würde.

Bekanntlich tritt eine solche auch tatsächlich in kolloidalen Lösungen auf, und man könnte jene Konzentrationsunterschiede auch in diesem Falle für die Ursache der Erscheinung ansehen. Es scheint mir jedoch, daß dieselbe in kolloidalen Lösungen und Emulsionen in gleichem oder wahrscheinlich sogar höherem Grade der Wirkung der Moleküle des gelösten Stoffes oder der suspendierten Tröpfchen zuzuschreiben ist; die Formel (16), welche sich hierauf direkt anwenden läßt, ergibt nämlich einen Wert derselben Größenordnung wie (17). Aus diesem Grunde erscheint mir auch Konowalows Ansicht, welcher zufolge die Opaleszenz kolloidaler Lösungen und die Erscheinungen der §§ 10—12 ganz analoge Phänomene wären, nicht ganz zutreffend. Soweit jedoch eine Analogie besteht, hängt sie tatsächlich, sowohl in unserer als in Konowalows Theorie, mittelbar damit zusammen, daß die zur Herstellung von Konzentrationsunterschieden erforderliche Arbeit in diesen beiden Fällen ausnehmend klein ist.

§ 14. Hier mögen noch einige Bemerkungen betreffs einer Frage Platz finden, welche sich angesichts der Ergebnisse der §§ 3—12 aufdrängt. Sollten sich nämlich derartige Dichte- und Konzentrationsunterschiede nicht bei direkten Messungen der optischen Weglänge bemerkbar machen?

Da es sich hier nur um ungefähre Schätzungen handelt, und da uns die innere optische Struktur eines Moleküls ohnehin unbekannt ist, ersetzen wir alle Moleküle durch Zylinder, deren Achsen die Richtung des Lichtstrahles besitzen, und deren Durchmesser und Höhe dem Molekulardurchmesser σ gleich sind.

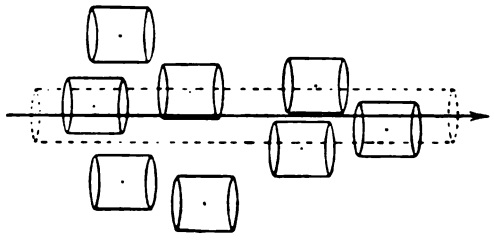


Fig. 2.

Dann ist klar, daß der Lichtstrahl alle jene Moleküle passiert, deren Mittelpunkte sich in einer geringeren Entfernung als $\sigma/2$ befinden, indem er in jedem derselben einen gleichen Weg zurücklegt. Bei gleichförmiger Verteilung wäre deren Anzahl

$$\nu = \frac{\pi \sigma^2 l N}{4}, \tag{18}$$

wo N die auf 1 cm³ entfallende Anzahl, l die Länge des Lichtstrahles bedeutet. Infolge der zufälligen Dichteunterschiede wird diese Zahl im Verhältnis $1 + \delta$ vergrößert oder vermindert; und da die brechende Kraft des Gases derselben proportional ist, wird dadurch eine mittlere Phasendifferenz $\varkappa = (2\pi/\lambda)(n-1) l \delta$ verursacht. Für ein ideales Gas haben wir somit gemäß (2) [1]):

$$\varkappa = (n-1)\frac{4\sqrt{2}}{\lambda \sigma}\sqrt{\frac{l}{N}}\,. \tag{19}$$

Für Luft mit $\sigma = 2{,}9 \cdot 10^{-8}$ cm würde also $\varkappa = 0{,}15\sqrt{l}$ resultieren, d. h. daß schon die Passierung einer 100 cm dicken Luftschicht eine mittlere Phasendifferenz von $\pi/2$ hervorbringen würde. Da nun diese Phasendifferenz in vollkommen zufälliger Weise positive oder negative Vorzeichen erhält, so

1) Dies hängt in einfacher Weise mit der mittleren Weglänge der Gasmoleküle zusammen.

könnte man schließen, daß zwei auf verschiedenen Wegen durch derartige Luftschichten geführte Strahlen ihre Interferenzfähigkeit einbüßen müßten. Eine solche Folgerung scheint mir jedoch unzulässig zu sein; einerseits kann man nie einen einzelnen Lichtstrahl isolieren, und die mittlere Phasendifferenz für ein Strahlenbündel vermindert sich proportional mit dessen Durchmesser, so daß sie für einen Querschnitt von $[0{,}2\,\mu]^2$ nur ein Tausendstel des obigen Wertes beträgt; andererseits haben wir auch kein Mittel, um die *augenblickliche* Phasendifferenz zu konstatieren, denn die Messung optischer Effekte scheint im Grunde genommen immer auf Resonanzphänomenen zu beruhen, in welchen der resultierende Effekt einer Reihe von Wellen auftritt und die einzelnen Unregelmäßigkeiten verwischt werden.

Dieselben Einwände richten sich auch gegen die Ableitung szintillationsartiger Phänomene, zu welcher obige Rechnungen verleiten könnten. Allerdings wären die Aussichten einer praktischen Verwirklichung in den Fällen §§ 7, 12, 13 bedeutend besser, aber es wäre wohl gewagt, hierüber etwas Bestimmtes voraussagen zu wollen.

§ 15. Schließlich möchte ich noch auf einige theoretisch interessante Konsequenzen der Phänomene der §§ 3—13 hinweisen, welche in Medien, die eine Drehung der Polarisationsebene aufweisen, eintreten sollten. Stellen wir uns ein linear polarisiertes Strahlenbüschel vor, welches nach Durchgang durch eine solche Substanz durch den Analysator aufgefangen wird.

Streng genommen geht ein jeder Strahl durch eine Schicht von etwas verschiedener Dichte, und infolgedessen ist auch die Schwingungsrichtung eines jeden Strahles etwas verschieden. Der Analysator wird zwar nach der mittleren Richtung derselben eingestellt, aber die in jene Richtung entfallende Resultante muß geringer sein als die ursprüngliche Schwingung, wofür andererseits unregelmäßige Komponenten in einer hierzu senkrechten Richtung übrig bleiben werden. Daraus müßte also eine teilweise Depolarisation, d. i. eine teilweise Umwandlung in natürliches Licht, resultieren.

Eine auf Grund von (2), (15) und (18) ausgeführte Schätzung zeigt zwar, daß dieser Effekt im allgemeinen sehr gering sein

muß und daß er nur in Ausnahmefällen [im Falle außerordentlich starker Drehung, oder in einem der Fälle eines abnorm großen δ] eventuell bemerkbar sein könnte. Aber vom Standpunkt der Theorie ist es interessant, daß derartige Messungen ein Mittel an die Hand geben würden, um den Molekulardurchmesser σ auf Grund von (18) zu berechnen, was eine von den üblichen vollkommen verschiedene Methode vorstellt.

§ 16. In den vorhergehenden Abschnitten haben wir auf Grund molekular-kinetischer Betrachtungen eine Reihe von Folgerungen betreffs der Begriffe der molaren Bewegung, der Dichte und Konzentration entwickelt, welche mit den üblichen thermodynamischen Anschauungen in Widerspruch stehen, aber durch die Erfahrung, soweit dieselbe bisher reicht, bestätigt werden. In analoger Weise könnte man fast jeden auf materielle Körper bezüglichen Begriff analysieren und mit dessen Hilfe theoretische Mechanismen konstruieren, deren Wirkung dem Carnotschen Prinzip entgegen wäre.[1]) Da wir uns jedoch auf Besprechung experimentell kontrollierbarer Fälle beschränken wollen, erwähnen wir hier nur noch ein Beispiel dieser Art, nämlich die Gestalt der Flüssigkeitsoberflächen.

Bakker[2]) hat sehr überzeugende Gründe dafür angeführt, daß es überhaupt keine scharfe Grenze zwischen Flüssigkeit und Dampf gibt, sondern daß eine Übergangsschicht existiert, in welcher ein kontinuierlicher Übergang stattfindet. Überdies muß jedoch bemerkt werden, daß die Niveauflächen nicht vollkommen eben sein können, sondern daß sie infolge der zufälligen Unregelmäßigkeiten der Molekularbewegung und insbesondere infolge der lokalen Unregelmäßigkeiten der Dichte und der damit zusammenhängenden Oberflächenspannung fortwährend wechselnde Verbiegungen erfahren müssen. Diese lokalen Ausbauchungen und Vertiefungen werden desto größer, je geringer die Oberflächenspannung ist; daher müssen sie um so deutlicher werden, je mehr sich der Zustand dem kritischen

1) G. Lippmann (Rapports du Congrès intern. de Physique, Paris 1900. I. p. 546) schließt aus derartigen Beispielen auf die Unrichtigkeit der Kinetik, während wir dieselben als Beweise der begrenzten Anwendbarkeit der Thermodynamik ansehen.

2) Vgl. z. B. G. Bakker, Ann. d. Phys. 15. p. 543. 1904.

Punkte (oder dem kritischen Trennungspunkte, insofern es sich um Grenzflächen zweier Flüssigkeiten handelt) nähert, da in diesem die Oberflächenspannung vollständig verschwindet, und die Dichteunterschiede ihren maximalen Wert erreichen.

Diese zunehmende Rauhigkeit der Oberfläche müßte sich optisch durch eine diffuse Reflexion des auffallenden Lichtes, das ist durch Weißfärbung der Oberfläche kenntlich machen. Allerdings gilt dies nur, insofern die Dicke der Bakkerschen Übergangsschicht, welche bei Annäherung an den kritischen Zustand zunimmt, kleiner bleibt als die Lichtwellenlängen, da bei größerer Dicke derselben überhaupt keine Reflexion stattfinden würde.[1]) Auf diese wenigen Bemerkungen wollen wir uns einstweilen beschränken, da eine nähere theoretische Untersuchung dieses letzten Beispieles in Anbetracht der Mangelhaftigkeit unserer Kenntnisse betreffs des Mechanismus der Kapillarkräfte nur problematischen Wert hätte.

Lemberg, Dezember 1907.

---

1) Vgl. Lord Rayleigh, Proc. L. Math. Soc. 11. p. 51. 1880; Papers I. p. 461.

(Eingegangen 20. Dezember 1907.)

3. *Messung der Geschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten und des Verhältnisses der beiden spezifischen Wärmen des Äthers mit Hilfe Kundtscher Staubfiguren;* von *Karl Dörsing.*

(Auszug aus der Bonner Dissertation des Verfassers.)

(Hierzu Taf. II.)

§ 1. Einleitung, Methode.

Für die Messung der Schallgeschwindigkeit bieten sich zwei wesentlich verschiedene Methoden.

Die erste, *direkte*, mißt Weg und Zeit. Sie läßt sich nur auf Wasser und Luft anwenden.

Die zweite, *indirekte*, mißt Schwingungszahl und Wellenlänge. Sie ist auf alle Arten elastischer Körper anwendbar.

Auf tropfbare Flüssigkeiten sind beide Methoden wiederholt angewandt worden, doch hat bisher nur die eine direkte Messung Colladons (1826) (meistens zitiert: Colladon und Sturm 1827) ein einwandfreies Resultat ergeben.

Übersicht über die bisherigen Bestimmungen.

1. A. Monro 1780	*Wasser*, *direkt*, kleiner, 800 Fuß langer See bei Edinbourgh. v in Wasser $= v$ in Luft.
2. H. Beudant ca. 1820	*Meerwasser*, *direkt*, Meer vor Marseille. $v = 1500$ m/sec. Rohe Messung mit zufällig gutem Resultat.
3. J. D. Colladon 1826	*Wasser*, *direkt*, Genfer See, Experimentierweite ca. 13,5 km. $v = 1435$ m/sec bei 8,1° C.
4. Cagniard de la Tour 1831	*Tonhöhe verschiedener Flüssigkeiten* in einer sehr primitiven Pfeife „pipette siffleur". v nicht ausgerechnet.
5. Cagniard de la Tour 1833	*Tonhöhe des Wassers* in einer 1 m langen, oben offenen, longitudinal geriebenen Röhre „tube éprouvette". $n = 790$ einf. Schw. pro sec.

6. G. Wertheim 1848	*Zwölf verschiedene Flüssigkeiten* in Orgelpfeifen. v für die unbegrenzte Masse falsch korrigiert.
7. L. Matthiessen 1868/70	Vorschlag einer *Methode* zur Bestimmung von v aus Kapillarwellen mit einigen experimentellen Beispielen.
8. Fr. André 1870	*Wasser, direkt,* Fortpflanzung einer hydraulischen Kompression in einem 80 cm weiten (600 m langen) Kanal. $v = 897{,}80$ m/sec.
9. O. E. Meyer 1874	*Wasser, direkt,* Fortpflanzung einer ebensolchen Kompression in einem 7 mm weiten (3000 m langen) Bleirohr. $v = 1000$ m/sec.
10. Kundt u. Lehmann 1874	*Wasser, indirekt,* Wellenlänge in sechs verschiedenen Glasröhren aus Kundtschen Staubfiguren.
11. V. Dvořák 1874	*Wasser, indirekt,* Wellenlänge in fünf verschiedenen Glasröhren aus Kundtschen Staubfiguren.
12. T. Martini 1886	*Verschiedene Flüssigkeiten* in einer Pfeife durch Messung ihrer Tonhöhe mit Hilfe von „Ausflußtönen".
13. Threlfall u. Adair 1889	*Meerwasser, direkt,* Fortpflanzung von Explosionswellen. v, bedeutend größer als die Schallgeschwindigkeit, wächst mit der Stärke der explodierenden Ladung von 1732 bis 2013 m/sec, bei 9 bis 64 Unzen Schießbaumwolle.
14. W. Schmidt 1905	Adiabatische Kompressibilität *verschiedener Flüssigkeiten* aus der Schallgeschwindigkeit in einem Rohr durch Messung der Tonhöhe des Rohres und des aus Rohr und Flüssigkeit zusammgesetzten schwingenden Systems.[1])

1) Literaturverweise der Übersicht: *1.* A. Monro, Vergleichung des Baues und der Physiologie der Fische usw. p. 60. Aus dem Englischen. 4°. Leipzig 1787. *2.* Nicht veröffentlicht, nach persönlichen Mitteilungen Beudants zitiert von Colladon (Nr. 3). *3.* Pogg. Ann. **12.** p. 184. 1828. *4.* Pogg. Ann. **26.** p. 352. 1832. *5.* Ann. chim. phys. **56.** p. 252. 1834. *6.* Pogg. Ann. **77.** p. 427. 1849. *7.* Pogg. Ann. **134.** p. 107. 1868; **141.** p. 375. 1870. *8.* Compt. rend. **70.** p. 568. 1870. *9.* Pogg. Ann. Jubelbd. p. 1. 1874. *10.* Pogg. Ann. **153.** p. 1. 1874. *11.* Pogg. Ann. **154.** p. 156. 1875. *12.* Atti R. Ist. Ven. (6) **4.** Append. p. 1. 1886. *13.* Proc. Roy. Soc. **45.** p. 450. 1889; **46.** p. 496. 1890. *14.* Wien. Ber. [2a] **114.** p. 945—991. 1905. Näheres über den Inhalt der Arbeiten und ausführliche Zusammenstellung der gesamten Literatur

Die indirekte Methode leidet an dem Nachteil, daß sie Schwingungen zylindrischer Säulen verwendet, aus denen sich erst theoretisch die Schallgeschwindigkeit in der unbegrenzten dreidimensionalen Masse erhalten läßt. Für Flüssigkeiten sind zwei brauchbare Theorien vorhanden (Korteweg 1878[1]), Lamb 1898[2])), von denen eine im Verlauf dieser Arbeit geprüft wird.

Von den drei verschiedenen Anwendungsarten der indirekten Methode hat die Interferenzmethode für Flüssigkeiten bisher noch kein Resultat geliefert. Die Verwendung tönender Säulen leidet außer dem Umstand, daß an den offenen Enden der verwendeten Pfeifen die longitudinalen Schwingungen in bisher rechnerisch noch nicht genau kontrollierbarer Weise gestört werden, bei Flüssigkeiten an dem weiteren Mangel, daß diese sich nur sehr schwer zum Selbsttönen bringen lassen. Sie ist trotzdem fünfmal auf Flüssigkeiten angewandt worden, davon allerdings zweimal in stark veränderter und komplizierter Form (Übers. Nr. 4, 5, 6, 12, 14). Die elegante und bei Gasen so fruchtbare Methode der Kundtschen Staubfiguren litt in Flüssigkeiten bisher selbst in den Händen von Kundt an großen unaufgeklärten Schwierigkeiten und hat deshalb erst zweimal bei einigen wenigen Versuchen in Wasser Resultate geliefert (Übers. Nr. 10 und 11).

Nachdem in vorliegender Arbeit erst vergeblich versucht worden war, durch mikroskopische Beobachtung der Exkursionen kleiner suspendierter Teilchen die Bäuche einer in stehende Longitudinalschwingungen versetzten Wassersäule nachzuweisen, gelang es nach einjährigem Experimentieren, eine wichtige Vorbedingung für das Erscheinen der Staubfiguren festzustellen, deren Erfüllung dann eine lange Reihe interessanter und exakt meßbarer Staubfiguren in Wasser sowohl, als auch in anderen Flüssigkeiten zutage gefördert hat.

über Schallgeschwindigkeit, Schwingungen, Schallintensität usw. in Flüssigkeiten von 1678 bis 1906, sowie der wichtigsten Literatur über Kundtsche Staubfiguren in der Dissertation (Über die Geschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten, 85 pp. Bonn, Carl Georgi, 1907). Eine Anzahl Exemplare ist dort in Komissionsverlag niedergelegt.

1) D. J. Korteweg, Wied. Ann. **5**. p. 525—542. 1878.

2) H. Lamb, Mem. Manchester Soc. (3) **42**. Nr. 9. p. 1—16. 1898.

Diese Bedingung leitet sich aus folgender, weiter unten zahlenmäßig bestätigten Tatsache ab.

Wird eine in einer Röhre befindliche Wassersäule in stehende Longitudinalschwingungen versetzt, so rufen diese auch in der umgebenden Rohrwand schwache Longitudinalschwingungen hervor. Wenn diese die Schwingungen der Flüssigkeit nicht stören sollen, muß ihre Periode dieselbe, oder ein gerades Vielfaches derjenigen der Flüssigkeit sein. Zur Erzielung Kundtscher Staubfiguren in der Flüssigkeit ist es also erforderlich, die Schallquelle auf möglichst gute Resonanz mit dem verwendeten Rohr abzustimmen; denn es ist ganz natürlich, daß bei durchaus verschiedenen Schwingungszahlen von Rohr und Flüssigkeit an der Stelle, wo beide sich berühren, von den Schwingungen der letzteren keine Staubfiguren mehr erzeugt werden können.

Von dem Vorhandensein dieser longitudinalen Schwingungen der Glaswand und der Größe, zu der sie in einigen seltenen und besonders günstigen Fällen anwachsen konnten, gibt die unten folgende Tabelle ein Beispiel. In ihr enthält jede Zeile die Längen nebeneinander liegender Staubfiguren. Die fettgedruckte Zahl gehört der Figur an, die am nächsten in der Mitte des bei $^1/_4$ und $^3/_4$ seiner Länge eingeklemmten Glasrohres lag, also dort, wo die Schwingungen der Rohrwand ihre größte Amplitude hatten.

137	112	**180**	110	150
140	110	**177**	122	—
138	100	**185**	124	—
135	127	**154**	115	135?
135	127	**151**	120	145
133	120	**154**	125	142

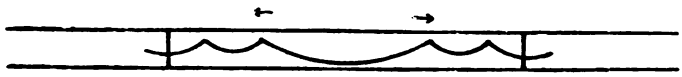


Fig. 1.

Wie man aus den augenfälligen, stets an derselben Stelle auftretenden Unregelmäßigkeiten erkennt, werden die zu beiden Seiten der Mitte des Rohres liegenden Knoten der schwingenden Flüssigkeit von den dort am stärksten auftretenden Schwingungen der Rohrwand nach den Seiten hinausgeschoben, und

zwar um so mehr, je näher sie der Mitte liegen; denn in diesem Maße sind die daneben liegenden Figuren verkürzt (vgl. auch Fig. 1).

Solche Zahlen sind natürlich zur Messung von Wellenlängen durchaus nicht zu gebrauchen, und sind auch von mir nie dazu gebraucht worden. Sie gehörten eben zu den seltensten Ausnahmen. Sonst waren die erhaltenen Staubfiguren bis auf solch kleine Differenzen, wie sie schon Kundt bei seinen Messungen in Luft gefunden hatte, gleich lang, was sowohl die Photographien derselben (Taf. II) und die gute Übereinstimmung der in § 4 angeführten Mittelwerte der einzelnen Messungen einer Versuchsreihe als auch die folgende ausführliche Anführung der ursprünglichen Aufzeichnung einer willkürlich herausgegriffenen Versuchsreihe zeigen werden:

Vers. Nr.	Alkohol Rohr 6. (Bei allen Versuchen tritt die Oktave des Grundtones auf.) Ablesungen in cm																$\lambda/4$ (cm)
150	0	5,7	12,1	18,3	24,6	30,9	37,1	43,2	49,6	55,4	62	68,1	74,3	80,5	87		6,22
151	0	6	12,1	18,5	24,3	31	37,3	43,1	49,7	55,4	62,1	68,2	74,6	80,6	87,1	93,3	6,22
152	0	6,3	12,5	18,6	25,1	30,4	37,7	43,7	50,1	56,3	62,5	68,6	74,7				6,24
153	0?	6,9	12,9	19,6	25,3	32	37,9	44,3	50,3	56,8	62,9	69,1	75	81,5			6,23
154	0	6	12,7	18,5	25,1	31,2	37,5	43,5	49,8	56	62,2	68,2	74,6				6,21
155	0	5,9	12,7	18,4	25	30,9	37,3	43,2	49,7	55,8	62	68,2	74,5				6,21

§ 2. Versuchsanordnung.

Als *Schallquelle* diente ein von einer rotierenden Reibvorrichtung kontinuierlich erregter Glasstab. Eine solche Vorrichtung ist in diesen Annalen[1]) von W. Altberg ausführlich beschrieben. Der Stab war mit einem Knoten in der Mitte zwischen zwei Holzkeilen fest eingeklemmt. Sein Hinterende würde von oben gegen das von einem $^1/_2$ pferdigen Gleichstrommotor getriebene und durch auftropfenden wässerigen Alkohol stets feuchtgehaltene Reibzeug mit einer Kraft von 30 kg durch Vermittelung zweier quer über den Stab gespannter Hanfschnüre angepreßt. Die Schnüre machten die Schwingungen des Stabes mit und absorbierten daher trotz der großen pressenden Kräfte nur einen kleinen Teil der Schallintensität. Der Ton des

1) W. Altberg, Ann. d. Phys. 11. p. 409. 1903.

Stabes war anhaltend und von einer ganz unerträglichen Intensität. Seine Schwingungszahl wurde durch Staubfiguren in Luft bestimmt.

Auf einem besonderen Tisch befand sich *das mit Flüssigkeit gefüllte Rohr.* Es war doppelt so lang, wie der tönende Stab, bei $^1/_4$ und $^3/_4$ seiner Länge in filzgepolsterten Klammern eingeklemmt und mit diesen an zwei schweren Bunsenschen Stativen, direkt über dem dreibeinigen Fuße derselben festgeschraubt. An dem der Schallquelle zugelegenen Ende war es durch eine Membran geschlossen, am Hinterende trug es einen doppelt durchbohrten Kork. In die eine Durchbohrung war ein dünnes Thermometer *a* (Fig. 2) eingeführt, das an dem

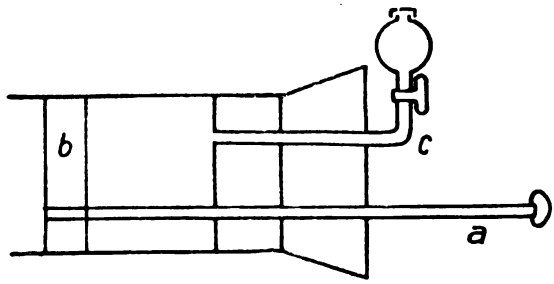


Fig. 2.

eingeführten Ende, an dem sich auch die Quecksilbermenge befand, eine das Rohr fast ausfüllende, mit drei Kerben am Rande versehene Korkscheibe *b* trug. In der anderen Durchbohrung stak ein dünnes Glasröhrchen *c*, das sich zu einer kleinen Kugel erweiterte. Die Kugel konnte gegen die Röhre durch einen kleinen Hahn, nach außen durch eine Gummikappe abgeschlossen werden. Bei allem war auf möglichst geringes Gewicht geachtet. Beim Füllen wurde das Rohr an der einen Seite mit der Membran geschlossen, bis zum anderen Rande vollgegossen und hierauf der Pfropfen aufgesetzt. Die Kugel nahm die überschüssige Flüssigkeit auf und vermittelte beim Verschieben der Korkscheibe den Flüssigkeitsaustausch. Bei dieser Einrichtung konnte die gefüllte Röhre, da sie nicht durch Schläuche mit einem größeren Gefäß in Verbindung stand, beliebig herumgetragen werden, was beim Messen und Photographieren der Staubfiguren und beim Neu-

verteilen des Staubes von großem Vorteil war. Während des Versuches stand sie so, daß ihre Membran das zu einer Platte aufgestauchte Vorderende des tönenden Stabes gerade berührte (Fig. 3). Durch winzige Verschiebung der beiden Stative wurde

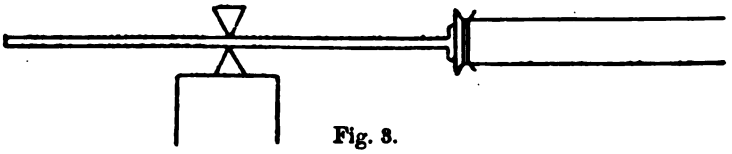


Fig. 3.

die Berührung so reguliert, daß die Membran einen reinen Ton gab. Meistens erreichte ich dies schon, wenn ich mehr am Vorder- oder Hinterende des Rohres die Hand fest auf den Tisch legte, oder mich vor dem Tisch mehr nach der einen oder anderen Seite hinstellte.

§ 3. Staubfiguren.

Als Pulver zur Erzeugung der Staubfiguren erwies sich nach längerem Probieren der verschiedensten Staubarten feingemahlener Bimssteinsand als am besten geeignet. Er wurde vor jeder Versuchsreihe durch Erhitzen in einer Porzellanschale getrocknet, weil er sonst, wie alle Staubarten, in die Flüssigkeit gebracht, zu Klumpen oder Flocken zusammenballte, und durch Schräghalten des Rohres zu einer feinen ca. 1 mm breiten Linie längs der Glaswand verteilt. Während der Versuche fiel dann, wenn der Staubfaden etwas zur Seite gedreht war, an den Bäuchen der Sand herunter, an den Knoten blieb er liegen und es entstanden die girlandenartigen Figuren der angefügten Photographien. Sobald die Figuren sich zu bilden

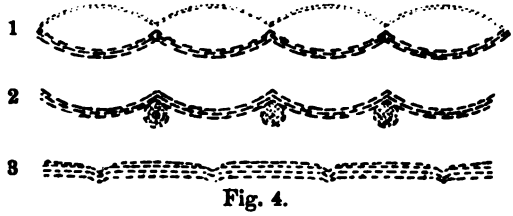


Fig. 4.

begannen, wurde die Hand an den Schalter des die Reibvorrichtung treibenden Motors gelegt, und dieser in dem Augenblick, wo die Ecken der Figuren am schärfsten waren,

herumgezogen, wodurch die Schallquelle sofort verstummte und weitere Bewegungen des Sandes aufhörten.

Zuweilen traten noch weitere Zeichnungen zu den einfachen Bögen hinzu. So war bei Kochsalzlösungen häufiger, bei Wasser und Alkohol bisweilen zu den unteren Bögen symmetrisch ganz fein ein zweiter Bogen gezeichnet (Fig. 4, Nr. 1). Bei den Versuchen in Wasser erhielt ich zweimal die unter Nr. 2 gezeichneten Figuren. An jedem Knoten beschrieb ein kleines Bimssteinkügelchen ganz langsam eine kreisförmig verschlungene Bahn und erzeugte dadurch einen verwischten Fleck von nicht ganz 1 cm Durchmesser. Bei den Versuchen in Benzin und Salzsäure gelang es mir einigemal, durch vorzeitiges Abstellen der Schallquelle die Figuren Nr. 3 zu erhalten. Auch erhielt ich einmal bei Kochsalzlösung den bei Gasen schon häufiger beobachteten Fall, daß ein Wellenzug größere Amplitude hatte, als der entgegengesetzte, wodurch mehr hakenförmige Bogen entstanden.

Sehr häufig prägten sich auch harmonische Obertöne der schwingenden Flüssigkeit in den Staubfiguren aus. Dies zeigen

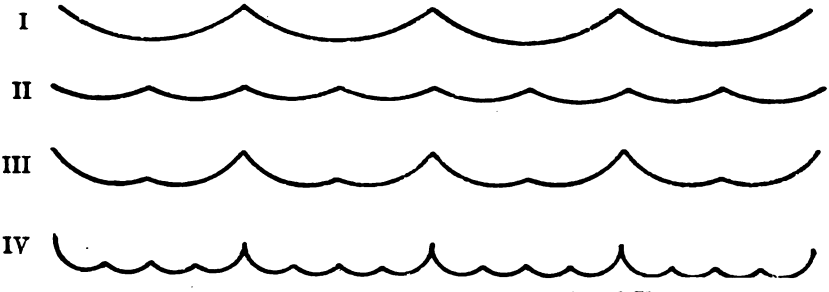


Fig. 5. (Schema der Photographien auf Taf. II.)

I: Grundton, II und III: erster harm. Oberton (bei III ist der Grundton stärker markiert), IV: dritter harm. Oberton (Grundton stärker markiert).

die in § 4 besonders in den Tabellen II. B häufigen, in Klammern beigefügten Zahlen, ebenso auch die Photographien und die nach letzteren schematisch gezeichnete Fig. 5. Außerordentlich häufig und scharf trat die Oktave des Grundtones (Nr. II u. III), zuweilen ebenso scharf auch der zweite (nicht photographiert) und einigemal weniger scharf der dritte harmonische Oberton (Nr. IV) auf. Der Grundton war dabei nicht selten in den

Staubfiguren deutlicher ausgeprägt (Nr. III u. IV). Zuweilen zeigten die Staubfiguren nur in einem Teile des Rohres das Vorhandensein des Obertones, während in dem anderen Teile der Grundton zutage trat.

Die bei den Staubfiguren in Gasen stets auftretenden Rippungen habe ich nur in einigen wenigen Fällen deutlich erhalten, und zwar stets zum Nachteil der Schärfe der Knotenstellen. Dagegen erschienen in Alkohol und Äther oft Figuren mit schöngezeichneten Kurven (Taf. II, Nr. III und Fig. 6), besonders dann, wenn die Menge des Bimssteinpulvers etwas reichlicher bemessen war. Die Kurven biegen sich von der Mitte des Schwingungsbauches nach beiden Seiten auseinander (Fig. 6) und zeigen das Bestreben, sich an den Knotenstellen zu vereinigen. Sie fallen meist zusammen, sobald die Flüssigkeit zu schwingen aufhört; nur in wenigen Fällen waren sie auch in der ruhenden Flüssigkeit noch sichtbar.

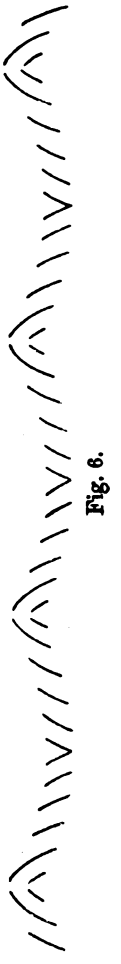


Fig. 6.

Am schnellsten erschienen die Figuren in Alkohol und Äther, am schärfsten gerieten sie in Ammoniak. Diese drei sind auch die einzigen Flüssigkeiten, in denen es mir nach vielen Versuchen gelungen ist, in einem absichtlich nicht auf Resonanz eingeklemmten Glasrohre meßbare Figuren zu erzeugen. In Ammoniak gelang mir dies einmal, in Alkohol und Äther mehrmals, in anderen Flüssigkeiten dagegen nie. Am schwersten zu erhalten waren die Staubfiguren in Wasser und Kochsalzlösung. Ich möchte deshalb den Vorschlag machen, bei einer etwaigen Wiederholung der Versuche nicht, wie bisher, mit Wasser, sondern am besten mit Alkohol zu beginnen. Wasser erzeugte auch die kräftigsten Resonanzschwingungen der Rohrwand, was man aus den drei ersten Zahlenreihen der Tabelle p. 230, die in Wasser gemessen wurden, entnehmen kann. Wovon die Amplitude dieser Resonanzschwingungen abhängt, vermag ich nicht zu sagen, da ich nur in Wasser und Salzsäure durch sie veranlaßte Längenunterschiede der Staub-

figuren und zudem in nur einigen sehr wenigen Fällen beobachtet habe.

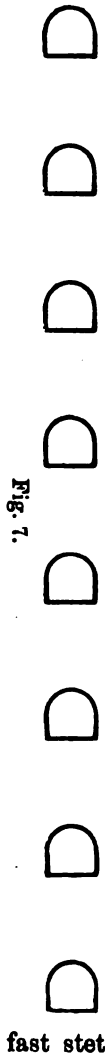


Fig. 7.

Der Umstand, daß die Versuche in Ammoniak so gut gelangen, zeigt, daß es zur Erzielung der Staubfiguren nicht erforderlich ist, die Flüssigkeit von absorbierten Gasen zu befreien, wie dies Kundt[1]) angibt. Auch kleine Luftbläschen stören die Schwingungen nicht. Sie wandern bei Beginn des Versuches recht energisch zu den Knotenstellen hin und vereinigen sich dort zu größeren Bläschen. Bisweilen waren über die ganze obere Längslinie des Rohres solche Luftbläschen in gleichen Abständen verteilt und ließen vor dem Erscheinen der Staubfiguren schon ungefähr vermuten, wie groß die erwarteten Wellenlängen sein würden. Würde in solchen Fällen das Rohr am Hinterende etwas höher eingeklemmt, so machten die Luftbläschen, sobald sie bei ihrer Wanderung nach der höheren Stelle in die Gegend eines Schwingungsbauches kamen, die tollsten Sprünge durch den ganzen Durchmesser der Röhre, in der Nähe eines Knotens dagegen glitten sie ruhig an der obersten Längslinie des Rohres entlang.

Die zur Bestimmung der Schwingungszahlen in Luft gebildeten Staubfiguren von Semen lycopodii hatten infolge der gewaltigen Schallintensität sehr häufig, bei hohen Schwingungszahlen (7914) immer, das Aussehen von Fig. 7. Sie sind ähnlich den von Kundt als weniger gut meßbar bezeichneten Häufchenfiguren, nur nach der reflektierenden Wand hin glatt abgeschnitten und daher sehr exakt zu messen. Häufchenfiguren erhielt ich auch in einigen Fällen nach länger ausgedehnten Versuchen in Wasser und Alkohol. Sie waren jedoch fast stets so unscharf, daß sie eine brauchbare Messung nicht zuließen.

1) A. Kundt, Übersicht Nr. 10. Bei den im folgenden mitgeteilten Messungen ist trotzdem luftfreies Wasser verwandt, weil absorbierte Gase die Schallgeschwindigkeit vergrößern (vgl. p. 250).

Die Messung der einzelnen Staubfiguren war, trotzdem ihre Längen meist 10—15 cm betrugen, mit nur wenigen Ausnahmen (bei Kochsalzlösung und Salzsäure) bis auf Millimeter genau bequem auszuführen. Häufig ließen sich auch noch die Zehntelmillimeter bestimmen.

Der Mittelwert der gemessenen Längen eines Versuches wurde nach der von Kundt mit Hilfe kleinster Quadrate abgeleiteten Ausgleichungsformel[1]) berechnet. Aus diesen Mittelwerten wird am Schluß einer jeden Tabelle nochmal das arithmetische Mittel gezogen.

§ 4. Versuchstabellen.

Vorbemerkung. Bei den Messungen der Schallgeschwindigkeit verschiedener Flüssigkeiten wurde stets dasselbe Glasrohr (Nr. IV, Länge 110 cm, innerer Durchmesser 2,71 cm, Wandstärke 0,32 cm) und derselbe tönende massive Glasstab (Nr. IV, Länge 55 cm, Dicke 1,05 cm, Schwingungszahl 4600 pro Sek.) benutzt. Bei den verschiedenen Röhren (Nr. 1—7) der darauffolgenden Versuche in Alkohol und Äther wurde die Rohrlänge von 110 cm beibehalten. Der tönende Stab war ganz derselbe. Er blieb stets an derselben Stelle eingeklemmt, so daß seine Schwingungszahl sich nicht ändern konnte. Sie wurde von Zeit zu Zeit neu bestimmt, wobei sich Abweichungen ergaben, die unter der Grenze der Beobachtungsfehler blieben. Bei den Vorversuchen wurden noch drei Röhren und Stäbe (Nr. I—III) von anderen Längenmaßen benutzt, wobei es zweimal gelang, durch einen 32 cm langen Stab in einem 128 cm langen Rohr Staubfiguren hervorzurufen. (Versuch Nr. 10 u. 11.)

I. Tabelle der Schwingungszahlen.

Bemerkung. Die Bestimmungen sind mittels Kundtscher Staubfiguren an Tagen geringer Luftfeuchtigkeit ausgeführt. Das zur Erzeugung der Staubfiguren benutzte Glasrohr hatte bei den ersten fünf Messungsreihen einen Innendurchmesser von 5 cm und eine Wandstärke von 0,2 cm, bei den beiden letzten Reihen einen Innendurchmesser von 3,2 cm und eine Wandstärke von 0,5 cm (Rohr 7 der folgenden Tab. II, B).

1) A. Kundt, Pogg. Ann. 135. p. 359. 1868.

Die Schallgeschwindigkeit der Luft von der Temperatur t wurde gesetzt

$$v = 332{,}5\sqrt{1 + 0{,}004\,t}.$$

Eine Korrektion dieses Wertes mit Hilfe der Helmholtz-Kirchhoffschen Formel wegen des Einflusses der Rohrwand, wobei für die Konstante γ der von Kayser[1]) experimentell gefundene Wert 0,0235 gewählt wurde, ergab für die verschiedenen Schwingungszahlen und Rohrdimensionen Korrektionsfaktoren zwischen 0,999939 und 0,999970 und Werte der Schallgeschwindigkeit der Luft von 0° zwischen 332,48 und 332,49. Diese Korrektion wurde deshalb nicht angebracht.

Abkürzungen:

L Länge der Glasstäbe (cm).
t Temperatur, λ Wellenlänge (mm) } der schwingenden Luftsäule.
A Anzahl der gemessenen Staubfiguren.
n Zahl der Schwingungen in einer Sekunde.

Glasstab Nr.	L	Versuch Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	n	
I	32	1—6	17°	21,71	190	7914	
II	55	12—17	15°	36,62	148	4674	
III	„	21—26	15,5°	37,32	135	4591	
IV	„	36—41	13,6°	37,13	158	4592	
„	„	67—72	15,8°	37,28	152	4598	4600
„	„	129—134	28°	37,61	134	4607	
„	„	219—224	19°	37,41	156	4610	

II. Tabellen der Wellenlängen.

Abkürzungen.

d Wandstärke, $2r$ Innendurchmesser, L Länge } der Glasröhren.
n Schwingungszahl der Schallquelle.
t Temperatur, λ Wellenlänge (mm) } der schwingenden Flüssigkeitssäulen.
A Anzahl der gemessenen Staubfiguren.
v Schallgeschwindigkeit im Rohr (m/sec).

Die unter $\lambda/2$ in Klammern beigefügten Zahlen sind die ursprünglichen, durch Obertöne veranlaßten, Längen von Staubfiguren (vgl. p. 284). Aus ihnen folgt durch Multiplikation mit 2 oder 3 der Wert $\lambda/2$.

1) H. Kayser, Wied. Ann. 2. p. 218. 1877.

A. Verschiedene Flüssigkeiten in demselben Glasrohre.

Wellenrohr. Rohr Nr. IV: $2r = 2{,}71$ cm, $d = 0{,}32$ cm, $L = 110$ cm.
Schallquelle. Stab Nr. IV: $n = 4600$.

Luftfreies destilliertes Wasser.

Versuch Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$ (mm)	A	$v\left(\frac{\text{m}}{\text{sec}}\right)$
42	13°	135,0 (45,0)	4	1242,0
43	„	135,0 (45,0)	5	1242,0
44	„	135,6 (45,2)	10	1247,5
Mittelwerte	13°	135,3	19	1244,8
114	19°	136,2 (68,1)	6	1253,0
115	„	136,8 (68,4)	7	1258,6
116	„	136,2 (68,1)	7	1253,0
117	„	136,8 (68,4)	10	1258,6
118	„	137,2 (68,6)	10	1262,2
119	„	137,0 (68,5)	6	1260,4
Mittelwerte	19°	136,7	46	1257,6
112	32°	139,4	6	1282,5
113	30°	140,0 (70,0)	12	1288,0
Mittelwerte	31°	139,8	18	1286,2

Alkohol, 95 Pros.

Versuch Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
45	12,0°	122,6 (61,3)	6	1127,9
46	12,4	122,4 (61,2)	8	1126,7
47	12,4	123,8 (61,9)	12	1139,0
48	12,8	122,8 (61,4)	11	1129,8
Mittelwerte	12,5°	122,9	37	1130,7
106	21°	120,2	5	1105,8
107	21	120,0	5	1104,0
108	21	119,6	5	1100,3
109	20	120,7	5	1110,4
110	20	121,4	4	1116,9
111	20	121,2	4	1115,0
Mittelwerte	20,5°	120,6	28	1109,5

Kochsalzlösungen

($n\%_0 = (100-n)$ g $H_2O + n$ g NaCl).

10 Proz.

Versuch Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
91	15°	136,4	5	1254,9
92	„	133,0	5	1223,6
93	„	138,0	5	1269,6
94	„	136,4	5	1254,9
Mittelw.	15°	136,0	20	1251,2

15 Proz.

Versuch Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
99	15°	139,5	6	1283,4
100	„	136,2	6	1253,0
101	„	137,2	6	1262,2
102	„	143,9	6	1323,9
Mittelw.	15°	139,2	24	1280,6

20 Proz.

Versuch Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
95	15°	149,3	6	1373,6
96	„	149,0	6	1370,8
97	„	150,0	6	1380,0
98	„	148,0	5	1361,6
Mittelw.	15°	149,1	23	1371,7

Ammoniak

(konzentriert).

Versuch Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
85	16°	152,2	6	1400,2
86	„	152,8	4	1405,8
87	„	153,0	5	1407,6
88	„	152,9	5	1406,7
89	„	152,9	5	1406,7
90	„	152,8	4	1405,8
Mittelw.	16°	152,8	29	1405,8

Rauchende Salzsäure

(konzentriert).

Versuch Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
103	15°	137,0	7	1260,4
104	„	136,2	6	1253,0
105	„	137,7	6	1266,8
126	16°	137,9	5	1268,7
127	„	135,7	6	1248,4
128	„	136,2	6	1253,0
Mittelw.	15,5°	136,7	36	1257,6

Äther.

Versuch Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
49	15°	105,0	8	966,0
50	„	105,6	6	971,5
51	„	106,8	6	982,6
52	„	105,7	7	972,4
53	„	106,3	7	978,0
54	„	105,5	5	970,6
Mittelw.	15°	105,8	39	973,4

Chloroform (Pharm. Germ. IV).

Versuch Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
79	15°	96,1	7	884,1
80	„	97,1	5	893,3
81	„	96,8	7	890,6
82	„	96,6	7	888,7
83	„	95,3	7	876,8
84	„	95,0	7	874,0
Mittelw.	15°	96,1	40	884,1

Terpentinöl.

Versuch Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
61	15°	128,5	5	1182,2
62	„	128,5	5	1182,2
63	„	128,7	5	1184,0
64	„	128,0	5	1177,6
65	„	129,1	5	1187,7
66	„	130,0	5	1196,0
Mittelw.	15°	128,8	30	1185,0

Schwefelkohlenstoff.

Versuch Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
73	15°	110,6	5	1017,5
74	„	111,7	6	1027,6
75	„	111,6	6	1026,7
76	„	112,0	6	1030,4
77	„	111,1	6	1022,1
78	„	112,0	6	1030,4
Mittelw.	15°	111,5	35	1025,8

Benzin.

Versuch Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
55	17°	118,0	7	1085,6
56	„	117,9	7	1084,7
57	„	117,4	7	1080,0
58	„	118,5	5	1090,2
59	„	117,8	5	1083,8
60	„	117,7	6	1082,8
Mittelw.	17°	117,9	37	1084,7

B. Verschiedene Röhren mit je derselben Flüssigkeit.

(n, wo nicht anders angegeben, = 4600.)

1. Alkohol, 95 Proz.

Rohr Nr. 1. d = 2,0 mm, $2r$ = 20,7 mm					Rohr Nr. 2. d = 2,0 mm, $2r$ = 39,1 mm				
Vers. Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v	Vers. Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
168	18°	119,9	4	1103,0	162	17°	110,1	8	1012,9
169	„	114,2 (57,1)	14	1050,6	163	„	110,4	6	1015,7
170	„	120,2	4	1105,8	164	„	109,8 (54,9)	13	1010,2
171	„	130,0	4	1196,0	165	„	110,0 (55,0)	15	1012,0
172	„	119,5	5	1099,4	166	„	110,8 (55,4)	9	1019,4
173	„	127,2 (63,6)	14	1170,2	167	„	111,2 (55,6)	9	1023,0
Mittelw.	18°	121,8	45	1120,6		17°	110,4	60	1015,7

Rohr Nr. 3. d = 2,2 mm, $2r$ = 60,1 mm					Rohr Nr. 4. d = 1,4 mm, $2r$ = 29,8 mm				
135	16,5°	103,4	5	951,3	141	17,5°	105,3	6	968,8
136	„	104,9	5	965,1	142	„	104,3	5	959,6
137	„	105,4	8	969,7	143	„	106,6 (53,3)	10	980,7
138	„	105,4	5	969,7	144	„	107,0 (53,5)	9	984,4
139	„	105,4	8	969,7	145	„	104,8	4	964,2
140	„	104,4	9	960,5	146	„	106,9	5	983,5
Mittelw.	16,5°	104,8	40	964,2		17,5°	106,0	39	975,2

Rohr Nr. 5. d = 2,7 mm, $2r$ = 29,3 mm					Rohr Nr. 6. d = 4,9 mm, $2r$ = 27,0 mm				
147	18°	119,8	7	1097,6	150	17°	124,4 (62,2)	14	1144,5
148	„	119,2	6	1096,7	151	„	124,4 (62,2)	15	1144,5
149	„	120,5	6	1108,6	152	„	124,8 (62,4)	12	1148,2
174	„	119,7	8	1101,2	153	„	124,6 (62,3)	13	1146,3
175	„	119,5	6	1099,4	154	„	124,2 (62,1)	12	1142,6
176	„	120,8	6	1111,4	155	„	124,2 (62,1)	12	1142,6
Mittelw.	18°	119,8	39	1102,2		17°	124,5	78	1145,4

Rohr Nr. 7. $d = 5{,}1$ mm, $2r = 31{,}8$ mm					Rohr Nr. 1. (Zur größeren Genauigkeit wiederholt.) $d = 2{,}0$ mm, $2r = 20{,}7$ mm				
Vers. Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v	Vers. Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
156	16°	120,2 (60,1)	12	1105,8	177	18°	121,5	5	1117,8
157	„	121,0 (60,5)	10	1113,2	178	„	127,0	5	1168,4
158	„	120,0 (60,0)	14	1104,0	179	„	119,8	7	1097,6
159	„	119,5	5	1099,4	180	„	119,0	8	1094,8
160	„	120,2	4	1105,8	181	„	121,8	5	1120,6
161	„	119,8	5	1102,2	182	„	123,4	4	1135,8
Mittelw.	16°	120,1	50	1104,9		18°	122,0	34	1122,4

Rohr Nr. III, 110 cm lang.

$d = 2{,}8$ mm, $2r = 23{,}2$ mm. Glasstab Nr. III, $n = 4591$.

Versuch Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
27	14°	123,6	5	1137,5
28	„	125,4	6	1151,4
29	„	124,7	5	1145,0
30	„	124,1	5	1139,5
31	„	124,4	5	1142,2
Mittelw.	14°	124,4	26	1142,2

2. Äther.[1])

Rohr Nr. 1. $d = 2{,}0$ mm, $2r = 20{,}7$ mm					Rohr Nr. 2. $d = 2{,}0$ mm, $2r = 89{,}1$ mm				
Vers. Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v	Vers. Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
207	16°	105,0	5	966,0	195	16°	99,8 (49,9)	16	918,2
208	„	104,8	9	964,2	196	„	99,8 (49,9)	16	918,2
209	„	105,8	8	973,4	197	„	100,0 (50,0)	16	920,0
210	„	105,2	9	967,8	198	„	99,2	7	912,6
211	„	105,2	8	967,8	199	„	98,9	7	909,9
212	„	106,0	8	975,2	200	„	99,0	7	910,8
Mittelw.	16°	105,3	47	968,8		16°	99,5	69	915,4

1) In dem 6 cm weiten Rohre 3 gelang es trotz häufiger Wiederholung des Versuchs nicht, Staubfiguren in Äther zu erzielen.

Rohr Nr. 4. $d = 1{,}4$ mm, $2r = 29{,}8$ mm					Rohr Nr. 5. $d = 2{,}7$ mm, $2r = 29{,}8$ mm				
Vers. Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v	Vers. Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
183	17°	97,0 (48,5)	10	892,4	201	18°	104,7	5	963,2
184	„	96,2	8	885,0	202	„	104,4	5	960,5
185	„	96,2	9	885,0	203	„	104,9	5	965,1
186	„	97,0	7	892,4	204	„	104,3	6	959,6
187	„	96,7	9	889,6	205	„	103,5	8	952,2
188	„	97,3	9	895,2	206	„	103,8	7	955,0
Mittelw.	17°	96,7	52	889,6		18°	104,3	36	959,6

Rohr Nr. 6. $d = 4{,}9$ mm, $2r = 27{,}0$ mm					Rohr Nr. 7. $d = 5{,}1$ mm, $2r = 31{,}8$ mm				
213	16,5°	111,6 (55,8)	18	1026,7	189	16°	106,8	5	982,6
214	„	111,2 (55,6)	14	1023,0	190	„	107,8	5	991,8
215	„	111,5 (55,7)	9	1025,8	191	„	108,2	7	995,4
216	„	111,0 (37,0)	18	1021,2	192	„	107,3	7	987,2
217	„	111,8 (37,3)	19	1028,6	193	„	106,7	8	981,6
218	„	111,3 (37,1)	19	1024,0	194	„	106,9	8	983,5
Mittelw.	16,5°	111,4	92	1024,9		16°	107,3	40	987,2

Rohr Nr. III.

$d = 2{,}8$ mm, $2r = 23{,}2$ mm.

Glasstab Nr. III, $n = 4591$.

Versuch Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
32	14°	107,4	5	986,2
33	„	106,0	5	973,3
34	„	106,5	4	977,9
35	„	106,3	8	976,1
Mittelwerte	14°	106,6	22	978,8

3. Destilliertes Wasser.

Rohr Nr. I, 64 cm lang. $d = 3$ mm, $2r = 22{,}0$ mm. Glasstab Nr. I: $n = 7914$.					Rohr Nr. II, 128 cm lang. $d = 3{,}2$ mm, $2r = 23{,}5$ mm. Glasstab Nr. I, $n = 7914$				
Vers. Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v	Vers. Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
7	19°	83,0	4	1313,7	10	18°	82,1	5	1299,5
8	„	82,6	5	1307,4	11	„	81,2	6	1285,2
9	„	83,0	4	1313,7	—	—	—	—	—
Mittelw.	19°	82,9	13	1312,1		18°	81,7	11	1293,1

Rohr Nr. II, auf 110 cm verkürzt.
$d = 3{,}2$ mm, $2r = 23{,}5$ mm.
Glasstab Nr. II, $n = 4674$.

Versuch Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
18	14°	136,0	5	1271,3
19	„	135,3	6	1264,8
20	13,4	135,5	4	1266,7
Mittelwerte	14°	135,6	15	1267,6

Rohr Nr. 6, 110 cm lang.
$d = 4{,}9$ mm, $2r = 27{,}0$ mm.
Glasstab Nr. IV, $n = 4600$.

Versuch Nr.	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v
120	19°	145,3	5	1336,8
121	„	143,6	5	1321,1
122	„	144,6	4	1330,3
123	„	143,7	5	1322,0
124	„	145,0	5	1334,0
125	„	144,2	5	1333,1
Mittelwerte	19°	144,5	29	1329,4

§ 5. Hauptresultate.

Die in § 4 mitgeteilten Zahlen sind infolge des Einflusses der die Flüssigkeiten umgebenden Rohrwand nur relative Werte der Schallgeschwindigkeit. Die falsche Deutung, die Wert-

heim (Übers. Nr. 6) der Verzögerung der Schallgeschwindigkeit in Röhren gab, nach der schwingende Flüssigkeitssäulen sich verhalten sollen wie schwingende starre Stäbe, ist allgemein bekannt. Bei der Besprechung der Wertheimschen Arbeit gibt Helmholtz[1]) die erste richtige Erklärung der Verzögerung als bedingt durch den Einfluß der Rohrwand, und sagt voraus, daß dieser verzögernde Einfluß direkt proportional sei ihrem Radius, umgekehrt proportional ihrer Wanddicke und ihrem Elastizitätskoeffizienten, eine Angabe, die sich durch die Tabellen II. B des vorigen Paragraphen vollständig bestätigt findet. Diese Tatsache, daß also bei Flüssigkeiten die Schallgeschwindigkeit in engen Röhren größer ist, als in weiten, ist insofern verwunderlich, als sie dem Verhalten der Gase widerspricht.

Die erste brauchbare ausführliche Theorie gab 1878 D. J. Korteweg (vgl. p. 229). Aus seinen Schlußresultaten folgt für unseren Fall durch eine einfache Rechnung (vgl. Dissert.) die Formel:

$$u = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{2\varrho r v^2}{dE\left(1 - \frac{5d}{6r}\right)}}}$$

(u = Schallgeschwindigkeit in der unbegrenzten Masse; v = Schallgeschwindigkeit im Rohr; r = Radius; d = Wanddicke; E = Elastizitätskoeffizient des Rohres; ϱ = Dichte der Flüssigkeit.)

Die zweite p. 229 erwähnte Theorie von H. Lamb läßt sich auf unseren Fall nicht anwenden.

Der in der Rechnung benötigte Elastizitätskoeffizient der Glasröhren wurde aus ihrer Schallgeschwindigkeit bestimmt. Die Röhren waren aus zwei Glassorten hergestellt, die der einen sind römisch (I—IV), die der anderen arabisch (1—7) numeriert. Es fand sich für

I—IV: $E = 64367 \times 10^7$ C.G.S.

1—7: $E = 68194 \times 10^7$ C.G.S.

1) H. v. Helmholtz, Fortschritte der Physik 1848. p. 110—114; Ges. Abh. 1. p. 242—246.

Die Rechnung ergibt folgende Tabellen:

Abkürzungen: d, $2r$, n, t, λ, A, v dieselben wie in § 4, II (p. 238); ϱ Dichte der Flüssigkeiten; u Schallgeschwindigkeit in der unbegrenzten Masse; k adiabatische Kompressibilität (berechnet aus u).

A. Dasselbe Glasrohr, verschiedene Flüssigkeiten.

Rohr IV. $2r = 27{,}1$ mm, $d = 3{,}2$ mm, $n = 4600$.

	t	ϱ	$\frac{\lambda}{2}$	A	v	u	k
Luftfr. dest. Wasser	18	0,9994	135,3	19	1245	1441	0,0000482
„ „ „	19	0,9984	136,7	46	1258	1461	469
„ „ „	31	0,9954	139,8	18	1286	1505	444
Alkohol, 95% . . .	12,5	0,8101	122,9	37	1131	1241	801
„ „ . . .	20,5	0,8039	120,6	28	1110	1213	846
Äther	15	0,720	105,8	39	973	1032	1303
Ammoniak (konz.) .	16	0,880	152,8	29	1406	1663	411
Rauchende Salzsäure (konz.)	15,5	1,207	136,7	36	1258	1518	360
Kochsalzlösung, 10%	15	1,073	136,0	20	1251	1470	431
„ 15	15	1,111	139,2	24	1281	1530	385
„ 20	15	1,150	149,1	23	1372	1650	319
Chloroform (Pharm. Germ. IV) . . .	15	1,498	96,1	40	884	983	690
Schwefelkohlenstoff .	15	1,270	111,5	35	1026	1161	584
Terpentinöl . . .	15	0,876	128,8	30	1185	1326	649
Benzin	17	0,695	117,9	37	1085	1166	1058

B. Verschiedene Glasrohre, dieselbe Flüssigkeit.

1. Alkohol, 95 Proz.

1—7: $n = 4600$, $\varrho = 0{,}8069$ (17°); III: $n = 4591$, $\varrho = 0{,}8095$.

Rohr Nr.	d	$2r$	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v	u
1	2,0	20,7	18	121,9	79	1122	1242
2	2,0	39,1	17	110,4	60	1016	1182
3	2,2	60,1	16,5	104,8	40	964	1170
4	1,4	29,8	17,5	106,0	39	975	1133
5	2,7	29,3	18	119,8	39	1102	1220
6	4,9	27,0	17	124,5	78	1145	1220
7	5,1	31,8	16	120,1	50	1105	1180
III	2,8	23,2	14	124,4	26	1142	1254

2. Äther.

1—7: $n = 4600$, $\varrho = 0{,}718$ (17°); III: $n = 4591$, $\varrho = 0{,}721$.

Rohr Nr.	d	$2r$	t	$\frac{\lambda}{2}$	A	v	u
1	2,0	20,7	16	105,3	47	969	1034
2	2,0	39,1	16	99,5	69	915	1015
4	1,4	29,8	17	96,7	52	890	991
5	2,7	29,3	18	104,3	36	960	1026
6	4,9	27,0	16,5	111,4	92	1025	1073
7	5,1	31,8	16	107,3	40	987	1033
III	2,8	23,2	14	106,6	22	979	1038

3. Destilliertes Wasser.

Rohr Nr.	n	t	ϱ	d	$2r$	$\frac{\lambda}{2}$	A	v	u
I	7914	19	0,9984	3,0	22,0	82,9	13	1312	1518
II (128 cm l.)	7914	18	0,9986	3,2	23,5	81,7	11	1293	1489
II (110 cm l.)	4674	14	0,9993	3,2	23,5	135,6	15	1268	1452
IV	4600	19	0,9984	3,2	27,1	136,7	46	1258	1461
6	4600	19	0,9984	4,9	27,0	144,5	29	1329	1489

Bei der Ableitung der Kortewegschen Formel sind Wärmeleitung und Reibung nicht berücksichtigt. Trotzdem liefert sie gute Resultate, wie die Übereinstimmung der Werte u in den Tabellen B zeigt. Man muß daraus schließen, daß an der Verzögerung der Schallgeschwindigkeit von Flüssigkeiten in Röhren fast ausschließlich die Elastizitätskräfte des Rohres und der Flüssigkeit beteiligt sind. Temperaturunterschiede können infolge der geringen Kompressibilität, Reibung infolge der langen Wellenlängen und kleinen Amplituden auch nur in geringem Grade vorhanden sein.

Die in den Tabellen B noch vorhandenen Abweichungen der Werte u haben für die Werte der Tabelle A nichts zu bedeuten; denn der Wert u des Wassers stimmt mit dem Werte Colladons (Übers. Nr. 3) 1435 m/sec bei 8,1° C., und

der Wert k des Wassers mit den Werten Paglianis[1]): 0,0000489 (10°); 0,0000463 (20°); 0,0000442 (30°) vorzüglich überein. Die noch vorhandenen kleinen Abweichungen sind durch die verschiedenen Temperaturen notwendig gemacht. Wenn aber die Werte des Wassers, die sich mit unseren heutigen Zahlen am besten prüfen lassen, einwandfrei sind, so sind es auch die der anderen Flüssigkeiten, weil sämtliche Werte der Tabelle A in derselben Röhre gewonnen sind.

Auch die longitudinalen Schwingungen der Rohrwand können nach den Versuchen keinen wesentlichen Einfluß auf die Schwingungen der Flüssigkeit ausüben. Da sie am stärksten in der Mitte des Rohres, an den Klemmstellen gleich 0 sind, müßte sich ihr Einfluß in Längenunterschieden der an diesen Stellen gelegenen Staubfiguren geltend machen. Solche Unterschiede waren jedoch bei den mitgeteilten Messungen nicht vorhanden.

In der Tabelle A sind die Zahlen für Kochsalzlösungen und Salzsäure etwas geringer zu bewerten als die übrigen, weil die in diesen Flüssigkeiten auftretenden Staubfiguren meist weniger scharf ausgeprägt waren. Ebenso zu bewerten sind in Tabelle B die in dem dünnsten Rohre 1 gewonnenen Resultate. Man sieht dies auch an der Übereinstimmung der einzelnen Messungen in § 4. Überhaupt sind in engen Röhren die Versuche sehr schwierig und die aus ihnen folgenden Resultate wenig zuverlässig. Es wird deshalb schon aus diesem Grunde bei Flüssigkeiten nicht wie bei Gasen möglich sein, direkt durch das Experiment zuverlässige absolute Werte der Schallgeschwindigkeit zu erhalten. Die besten Resultate liefert ein Rohr von etwa 2,7 cm innerer Weite (Rohr IV und 6).

Der adiabatische Kompressibilitätskoeffizient des Äthers ist nach der Tabelle

$$k = 0{,}0001303 \text{ bei } 15^\circ \text{ C.},$$

ein Wert, der mit dem von W. Schmidt (Übers. Nr. 14) gewonnenen gut übereinstimmt.

---

1) St. Pagliani, Linc. Rend. (4) 5 [1]. p. 777. 1889.

Der isotherme Koeffizient des Äthers bei derselben Temperatur ist nach Avenarius[1]) und Grimaldi[2])

$$k' = 0{,}0001790.$$

Aus diesen beiden Zahlen ergibt sich für das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen des Äthers der Wert

$$\frac{c_p}{c_v} = 1{,}376.$$

Resultate.

1. Die Schallgeschwindigkeit des Wassers nimmt mit steigender Temperatur zu.

2. Die Schallgeschwindigkeit anderer Flüssigkeiten nimmt mit steigender Temperatur ab.

3. In Flüssigkeiten, welche Gase absorbiert enthalten, wächst die Schallgeschwindigkeit mit der Menge des absorbierten Gases.

4. In Flüssigkeiten, welche feste Substanzen (Salze) gelöst enthalten, wächst die Schallgeschwindigkeit mit der Menge des gelösten Salzes.

5. In Röhren wächst die Schallgeschwindigkeit von Flüssigkeiten entgegen der von Gasen bei gleicher Wandstärke mit abnehmendem Radius, ferner bei gleichem Radius mit zunehmender Wandstärke.

6. An der Verzögerung der Schallgeschwindigkeit von Flüssigkeiten in Röhren sind fast ausschließlich die Elastizitätskräfte des Rohres und der Flüssigkeit beteiligt. Wärmeleitung und Reibung sind von ganz untergeordnetem Einfluß.

7. Schwingende Flüssigkeitssäulen regen die sie umgebenden Rohrwände zu longitudinalen Mitschwingungen an. Zur Erzeugung Kundtscher Staubfiguren in Flüssigkeiten ist es deshalb erforderlich, die Schwingungszahl der Flüssigkeit der des Rohres möglichst gleich zu machen.

8. In schwingenden Flüssigkeiten prägen sich, entgegen dem Verhalten schwingender Gase, die harmonischen Ober-

1) M. Avenarius, Bull. de l'Acad. de St. Pétersb. **10.** 1877.
2) G. P. Grimaldi, Cimento (3) **19.** p. 7. 1886.

töne in solcher Intensität aus, daß sie bis zum dritten harmonischen Oberton in den Staubfiguren deutlich zum Ausdruck kommen. Häufig ist hierbei der Grundton in den Staubfiguren stärker markiert (vgl. Taf. II und Fig. 5).

9. Das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen des Äthers ist $c_p/c_v = 1{,}376$.

Es sei mir zum Schluß gestattet, Hrn. Prof. Dr. H. Kayser, auf dessen Anregung hin diese Arbeit entstand, für die vielen Förderungen, die er ihr zuteil werden ließ, auch an dieser Stelle aufrichtig zu danken.

(Eingegangen 24. Dezember 1907.)

4. *Bemerkungen zu der Arbeit von Max von Wogau: Die Diffusion von Metallen in Quecksilber; von George McPhail Smith.*

In einer vortrefflichen diesbezüglichen Arbeit[1]) nimmt Hr. von Wogau mit G. Meyer[2]) an, daß die Metalle in Quecksilberlösung einatomig sind, trotzdem Haber[3]) schon darauf aufmerksam gemacht hatte, daß die Meyerschen Messungen nur zeigen, daß *entweder* Einatomigkeit *oder* Metallquecksilberverbindungen der Form $MeHg_n$ in der Quecksilberlösung vorliegen.

In einer Figur trägt Hr. von Wogau die Diffusionskonstante (k cm²/Stunde) als Ordinaten einer Kurve auf, deren Abszissen die Atomgewichte sind; er schreibt: „Die Kurve, welche die Diffusionskonstante als Funktion des Atomgewichtes darstellt, scheint das Spiegelbild derjenigen zu sein, welche sich aus der Abhängigkeit des Atomvolumens vom Atomgewicht ergibt. Doch ist diese Beziehung in dem einzeln stehenden Teile der Kurve, welche den höchsten Atomgewichten entspricht, nicht erkennbar. — Es ist zu beachten, daß die Kenntnis der Diffusionskonstanten des Berylliums und des Aluminiums den periodischen Charakter im Beginn der Kurve schärfer hervortreten lassen würde.“[4]) Beide Kurven sind in der Figur wiedergegeben; Kurve 1 stellt das Atomvolumen als Funktion des Atomgewichtes, Kurve 2 die Diffusionskonstanten ($10^3 . k$ cm²/Stunde) dar. Zudem stellt Kurve 3 die (tausendfachen) reziproken Atomvolumina (d. h. das wahre Spiegelbild der Atomvolumenkurve) dar. Wie man sieht, gleichen einzelne Teile der Diffusionskonstantenkurve der dritten Kurve,

1) M. v. Wogau, Ann. d. Phys. **23.** p. 345. 1907.

2) G. Meyer, Zeitschr. physik. Chem. **7.** p. 477. 1891.

3) F. Haber, Zeitschr. physik. Chem. **41.** p. 399. 1902; vgl. G. McPhail Smith, Am. Chem. Journ. **36.** p. 124. 1906; **37.** p. 506. 1907.

4) Das ist aber sehr zweifelhaft.

während ihr aber andere Teile verschieden sind. Diejenigen Ähnlichkeiten, welche vorhanden sind, sind wahrscheinlich zufällig; denn die *Atomvolumina* sind den *Diffusionskonstanten in Grammgewichten* eigentlich nicht vergleichbar. Man sollte viel eher eine Kurve auftragen, indem man als Abszissen die Atomgewichte, als Ordinaten die Größen k/Atomgew. benutzt.

Berechnet man aus den durch von Wogau erhaltenen Größen für k cm²/Tag die *relative Anzahl Atomgewichte*, die in einem Tage durch 1 cm² hindurchdiffundieren, so erhält man folgende Tabelle:

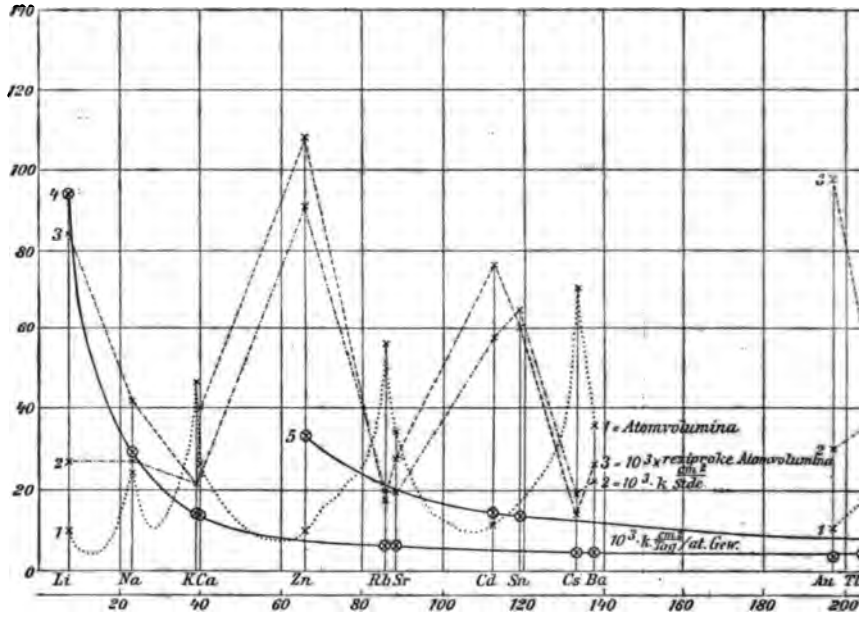
Metall	$t°$ C.	$k \frac{cm^2}{Tag}$ (v. Wogau)	Atomgewicht	$k \frac{cm^2}{Tag}$ / Atomgewicht
Li	8,2	0,66	7,03	93,88 × 10^{-3}
Na	9,6	0,64	23,05	27,76 „
K	10,5	0,53	39,15	13,54 „
Rb	7,3	0,46	85,5	5,38 „
Cs	7,3	0,45	132,9	3,39 „
Ca	10,2	0,54	40,1	13,47 „
Sr	9,4	0,47	87,6	5,37 „
Ba	7,8	0,52	137,4	3,78 „
Zn	11,5	2,18	65,4	33,33 „
Cd	8,7	1,45	112,4	12,90 „
Tl	11,5	0,87	204,1	4,26 „
Sn	10,7	1,53	119,0	12,85 „
Pb	9,4	1,50	206,9	7,25 „
Au	11,0	0,72	197,2	3,65 „

Die Beziehungen, die zwischen den Größen von k/Atomgew. für K, Rb und Cs auf der einen Hand, und für die Mitglieder der entsprechenden Triad Ca, Sr und Ba auf der anderen existieren, sind höchst auffällig. Die einzigen anderen Metalle, welche entsprechende Stellen in verschiedenen Gruppen des periodischen Systems einnehmen, sind Cd und Sn bzw. Au, Tl und Pb. Für Cd und Sn sind die Werte für k/Atomgew. wieder praktisch identisch, während für Au bzw. Tl und Pb die Werte verschieden sind; das Tl aber ist imstande, mit Hg eine Verbindung einzugehen.[1]) In dieser Richtung ist das Au

1) N. S. Kurnakow u. N. Puschin, Zeitschr. f. anorg. Chem. 30. p. 86. 1902.

nicht genügend untersucht worden; vielleicht geht es auch mit Hg eine Verbindung ein.

Trägt man nun die Größen von $k \frac{cm^2}{Tag} / $Atomgew. als Ordinaten einer Kurve auf, deren Abszissen die Atomgewichte sind, so erhält man eigentlich nicht eine einzige, sondern zwei Kurven, die in der Figur mit 4 bzw. 5 bezeichnet sind. Auf



Kurve 4 liegen die Metalle Li, Na, K, Ca, Rb, Sr, Cs, Ba und Tl, die sämtlich mit Quecksilber Verbindungen liefern.[1]) Auf Kurve 5 aber liegen die Metalle Zn, Cd, Sn und Pb, die

1) M. Berthelot, Ann. chim. phys. **18.** p. 433. 1879; N. S. Kurnakow, Zeitschr. f. anorg. Chem. **23.** p. 439. 1900; W. Kerp u. W. Böttger, Ibid. **25.** p. 1. 1900; J. Schürger, Ibid. **25.** p. 425. 1900; A. N. Guntz u. J. Ferée, Compt. rend. **131.** p. 182. 1900; E. Maey, Zeitschr. f. physik. Chem. **29.** p. 119. 1899; **38.** p. 292. 1901; N. S. Kurnakow u. N. Puschin, Zeitschr. f. anorg. Chem. **30.** p. 86. 1902; A. Schüller, Ibid. **40.** p. 385. 1904; A. N. Guntz u. G. Roederer, Bull. soc. chim. **35.** p. 494. 1906; N. S. Kurnakow u. J. G. Żukowsky, Zeitschr. f. anorg. Chem. **52.** p. 416. 1907.

nicht imstande sind, mit Quecksilber Verbindungen zu bilden.[1]) Das Gold liegt ein klein wenig unter Kurve 4. Für dieses Metall aber ist die Diffusionskonstante nicht durch v. Wogau, sondern durch Roberts-Austen[2]) beobachtet, welcher Au in einem Hg-Zylinder gegen die Schwere aufwärts diffundieren ließ und den Au-Gehalt in verschiedenen Stücken des Zylinders ermittelte. „Stellt man," wie G. Meyer[3]) bemerkt, „den Anfangszustand dadurch her, daß man eine feste Platte eines in Hg löslichen Metalles je nach dem spezifischen Gewicht mit der oberen oder unteren Fläche eines vertikal stehenden Zylinders von Quecksilber in Berührung bringt, so wird der Metallgehalt des Quecksilbers an einer beliebigen Stelle nicht allein von der Diffusionskonstanten des Metalles abhängen, sondern auch von der Geschwindigkeit, mit welcher das Metall gelöst wird. Auch spielen die bei der Verbindung der Metalle mit Hg auftretenden Wärmetönungen bei der Diffusion eine Rolle, wenn man ein reines Metall oder ein sehr konzentriertes Amalgam mit Hg in Berührung bringt. ... Die Mitteilung von Roberts-Austen ist nicht so ausführlich, daß man entscheiden könnte, ob die hervorgehobenen Einwände diese Beobachtungsmethode treffen und den Wert der Diffusionskonstanten zu klein erscheinen ließen."

Die Diffusionskonstanten der verschiedenen Stoffe sind meist nicht sehr voneinander verschieden; im allgemeinen sind sie um so kleiner, je größer das Molekulargewicht der Stoffe wird. Bezieht man wie gewöhnlich die Konstante auf Konzentrationen, die durch Gewichtsprozente gemessen werden, so liegt ein doppelter Grund für diese Abnahme vor. Einmal wird der Unterschied der osmotischen Drucke für den gleichen Unterschied des Gewichtsgehaltes um so kleiner, je größer das Molekulargewicht ist; andererseits wandern auch die hoch-

---

1) H. C. Bijl, Ztschr. f. physik. Chem. 41. p. 641. 1902; N. Puschin, Zeitschr. f. anorg. Chem. 36. p. 201—254. 1903. Van Heterin (Zeitschr. f. anorg. Chem. 42. p. 129. 1904) glaubt aber Zeichen gefunden zu haben, daß sich unter Umständen Sn mit Hg verbindet; eine Formel zu ermitteln gelang ihm aber nicht.

2) W. Roberts-Austen, Proc. Roy. Soc. Lond. 59. p. 283. 1896; Nature 54. p. 55. 1896.

3) G. Meyer, Wied. Ann. 61. p. 225 u. 233 (1897).

molekularen Stoffe bei gleichen Unterschieden des osmotischen Druckes viel langsamer, denn sie erfahren eine größere Reibung, was auf einen größeren Querschnitt der wandernden Molekeln beruht. Wie aus der Figur ersichtlich, verhalten sich nun die Metalle, welche mit Hg Verbindungen liefern, denjenigen, welche mit Hg eine Verbindung nicht eingehen, verschieden; falls die Atomgewichte ungefähr gleich sind, diffundieren jene unseren Erwartungen entsprechend langsamer in Quecksilber als Zn, Cd, Sn und Pb. Daraus erklärt sich, daß wir zwei Kurven erhalten haben. In dem Falle, daß die Kurve 2 von v. Wogau überhaupt etwas als periodische Funktion des Atomgewichtes zeigt, so zeigt sie nur die Fähigkeit der Metalle mit Hg eine Verbindung einzugehen; für diejenigen Metalle, welche Verbindungen liefern, besitzen die k(cm²/Stunde)-Ordinaten eine Länge von 19—36, während für Zn, Cd, Sn und Pb die Ordinaten alle zwischen 59 und 91 liegen.

Merkwürdigerweise fand v. Wogau, daß *die unter der Hypothese der Einatomigkeit der im Hg gelösten Metalle berechneten Diffusionskonstanten* der Alkalien und der Erdalkalien, sowie die des Thalliums (und des Goldes) in Quecksilber — d. h. gerade *derjenigen Metalle, welche mit Hg Verbindungen zu liefern imstande sind,* und welche auf Kurve 4 liegen — *mit den beobachteten verhältnismäßig gut übereinstimmen, während bei den Metallen Zn, Cd, Sn, Pb sowohl die Diffusionskonstanten wie auch deren Temperaturkoeffizienten durch die theoretischen Betrachtungen nicht dargestellt werden.*

The University of Illinois, Urbana, 15. Nov. 1907.

(Eingegangen 28. November 1907.)

5. *Über die Ionisation flüssiger Dielektrika durch Radiumstrahlen; von G. Jaffé.*

In einer früheren Arbeit[1]) wurde vom Verfasser der Charakter der Leitfähigkeit, die ein flüssiges Dielektrikum unter dem Einfluß von Radiumstrahlen annimmt, für einen bestimmten Fall, nämlich am Petroläther, untersucht. Es wurde der Strom, der zwischen zwei parallelen Platten übergeht, in seiner Abhängigkeit von der Strahlungsintensität, vom Elektrodenabstand und insbesondere vom Potential gemessen. Dabei ergab sich ein Verhalten, das dem ionisierter Gase ähnlich ist, ohne völlig mit ihm übereinzustimmen. Es zeigte sich nämlich für hinreichend hohe Werte der Feldstärke das charakteristische langsame Ansteigen des Stromes mit der Potentialdifferenz und eine Zunahme der Leitfähigkeit mit wachsendem Plattenabstand, aber eine vollständige Sättigung des Stromes ließ sich in keinem Falle erreichen. Dagegen ließ sich die Abhängigkeit des Stromes vom Potential für ein weites Gebiet, von etwa 900 Volt/cm bis etwa 6600 Volt/cm, mit großer Genauigkeit durch eine lineare Beziehung wiedergeben. Bedeutet also i den Strom, und e den Wert der Feldstärke, so war

$$i = f(e) + c \cdot e, \tag{1}$$

wo $f(e)$ von einem bestimmten Werte von e an konstant bleibt. Man kann also den Strom aus zwei Komponenten zusammengesetzt denken, von denen die eine sich vollständig verhält wie ein Strom durch ein ionisiertes Gas, und die andere dem Ohmschen Gesetz gehorcht. Bedeutet α den Maximalbetrag, zu dem $f(e)$ ansteigt, so ergaben sich weiter die Konstanten a und c in erster Annäherung der Strahlungsintensität und dem Plattenabstand proportional. — Es schien nun wünschenswert, zu untersuchen, ob sich das eben charakterisierte Ver-

1) G. Jaffé, Journal de Physique 4. 5. p. 262. 1906.

halten auch bei anderen flüssigen Isolatoren wiederfindet; auch schien es von Interesse, die Beträge der Ionisation in verschiedenen Medien zu vergleichen, weil bei Flüssigkeiten die Möglichkeit gegeben ist, die Absorption von Radiumstrahlen und die dabei erzeugte Ionisation getrennt zu beobachten. Im Hinblick auf diese beiden Gesichtspunkte wurde die gegenwärtige Arbeit unternommen.

Die Untersuchung geschah im wesentlichen nach derselben Methode, die in der oben zitierten Arbeit beschrieben ist. Da jedoch die Versuchsanordnung zur Erzielung größerer Genauigkeit in einigen Punkten verbessert wurde, sei es gestattet, dieselbe nochmals hier kurz zu skizzieren. Als Leitfähigkeitsgefäß diente ein Plattenkondensator aus Messing mit Schutzring und verstellbarem Plattenabstand (vgl. Fig. 1). Die iso-

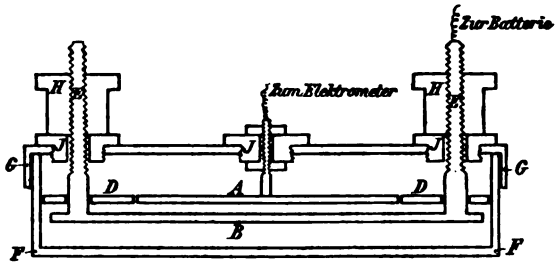


Fig. 1.

lierte Elektrode A (von 7 cm Durchmesser) und der Schutzring D waren fest in dem abnehmbaren Deckel G angebracht; die zweite Elektrode B trug drei mit Gewinde (von 1 mm Ganghöhe) versehene Stäbe E und ruhte mittels der Schraubenmuttern H auf den ebenen isolierenden Unterlagen J. Durch Verstellung der Schrauben kann die Platte B parallel mit sich selbst verschoben werden. Die Wahl eines geeigneten Isolationsmateriales bot einige Schwierigkeit; da die meisten Isolatoren von Petroleum, Benzol usw. angegriffen werden. Bernstein erwies sich als recht beständig und wird nur von Schwefelkohlenstoff sehr schnell zerstört. Bei den Versuchen mit dieser Flüssigkeit wurden darum die Isolationen durch Platten aus Spiegelglas ersetzt; dieses ist zwar kein vollkommener Isolator, genügt aber bei Anwendung einer Kom-

pensationsmethode. Die Hülle *F*, der Deckel *G* und der Schutzring *D* waren beständig zur Erde abgeleitet; die Elektrode *B* stand mit einer Hochspannungsbatterie[1]) in Verbindung, deren anderer Pol ebenfalls geerdet war, und die Elektrode *A* mit der Meßvorrichtung. Der Schutzring *D* war nur 24 mm breit; dieses genügte aber, weil der größte benutzte Plattenabstand 3 mm betrug. Die Verwendung eines Schutzringes ist unbedingt notwendig (wie Nebenversuche erwiesen), weil sonst ein Teil der Stromlinien um den Rand der Elektrode herum verläuft und der Mittelwert der Feldstärke beträchtlich herabgesetzt wird. Der Streifen zwischen Elektrode und Schutzring war nur 0,3 mm breit.

Die zu messenden Ströme wurden mit Hilfe eines Curieschen Piezoquartzapparates kompensiert[2]); als Indikator diente ein empfindliches Dolezalekelektrometer mit isolierter Aufhängung und Ladevorrichtung nach Prof. Wien. Diese Methode der Strommessung, welche Ströme von etwa 1.10^{-13} Amp. bis etwa 1.10^{-10} Amp. bequem zu messen gestattet, ist von besonderer Annehmlichkeit, weil sie auch bei variabler Kapazität des Systems unmittelbar Werte in absoluten Einheiten zu bestimmen gestattet und weil bei ihr das Elektrometer nur als Nullinstrument benutzt wird. Die Anwendung einer O-Methode bei Anwesenheit durchdringender Strahlen ist geradezu Erfordernis. Sämtliche Teile der Anordnung waren natürlich aufs sorgfältigste elektrostatisch geschirmt; die Zuleitungen befanden sich in Messingrohren, die mit Paraffin ausgegossen waren, so daß die Isolation auch bei Anwesenheit des Radiums sehr gut war.

Es sei übrigens nebenbei erwähnt, daß die Brauchbarkeit eines Elektrometers mit isolierendem Faden wesentlich erhöht wird, wenn man die Nadel mit einem engen, zur Erde abgeleiteten, metallischen Käfig versieht, der nur an der Stelle des Spiegels ein kleines Loch offen läßt. Die Hauptladungsverluste finden nicht von der Nadel zu den Quadranten statt, sondern durch das viel größere Luftvolum von dem metallischen Teil der Aufhängung zu der Schutzglocke; dieses Luftvolum

1) Für die bereitwillige Überlassung der Hochspannungsbatterie möchte ich Hrn. Prof. Wiener auch an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

2) Vgl. z. B. die Doktorthese von Mme Curie.

kann nun auf die angegebene Weise in wirksamer Weise verkleinert werden.

Bei den Versuchen befand sich das Radium, 20 mg reinen Chlorids, in einer Bleibüchse von 15 mm Wandstärke; die Strahlen traten im wesentlichen nur durch eine Bohrung von 1,5 mm Durchmesser, die mit einem dünnen Glimmerblättchen luftdicht verschlossen war, ins Freie. Die Bleibüchse mit dem Radium wurde unmittelbar unter den Kondensator gelegt; die Strahlen mußten etwa 4 mm Messing und 10 mm Flüssigkeit durchdringen, ehe sie in die Ionisationskammer gelangten, es kamen für die Wirkung also fast ausschließlich γ-Strahlen in Betracht. Demgemäß war auch die negative Ladung, welche die Strahlen bei Abwesenheit eines Feldes der isolierten Elektrode A mitteilten, nur eben wahrnehmbar und jedenfalls gegenüber den gemessenen Strömen zu vernachlässigen. Diese ergaben sich daher auch stets unabhängig von dem Vorzeichen des Potentials, das an B gelegt wurde.

Die beschriebene Anordnung hat den Nachteil, daß die Radiumstrahlen bei verschiedenem Elektrodenabstand nicht mit genau derselben Intensität in die Ionisationskammer gelangen, indem sie bei größerem Plattenabstand nur eine dünnere Flüssigkeitsschicht zu durchsetzen haben; aber die größte Variation des Plattenabstandes betrug 2 mm, und es wird sich aus den weiter unten mitgeteilten Absorptionsmessungen ergeben, daß die wirksamen Strahlen durch 2 mm der benutzten Flüssigkeiten keine nennenswerte Schwächung erleiden.

Was nun die Ausführung der Versuche selbst betrifft, so bestand die Hauptschwierigkeit in der Herstellung hinreichend reiner Untersuchungssubstanzen. Es ist zwar ohne weiteres möglich, bei allen Flüssigkeiten, deren Leitfähigkeit nicht größer ist als etwa $10^{-11}\,\Omega^{-1}$, die Zunahme der Leitfähigkeit bei Bestrahlung qualitativ nachzuweisen; aber bei der vorliegenden Untersuchung liegen die Verhältnisse ungünstiger. Es sollte nämlich die Abhängigkeit des Stroms vom Potential für hohe Potentialwerte gemessen werden; nun wächst der durch Strahlung erzeugte Strom sehr langsam mit dem Potential, der Leitungsstrom dagegen proportional oder noch stärker mit dem Feld, er überwiegt also für hohe Potentialwerte stark und macht so die Messung der gesuchten Größe

ungenau, wenn es nicht gelingt, seinen Betrag von vornherein stark herunterzusetzen. Dieses gelang nun nur in wenigen Fällen, und so mußte die Untersuchung auf vier Substanzen: Petroläther, Tetrachlorkohlenstoff, Schwefelkohlenstoff und Benzol beschränkt bleiben; bei diesen vier Isolatoren ließ sich die Leitfähigkeit durch sorgfältige Reinigung unter den Betrag von $10^{-16}\,\Omega$ herabdrücken, so daß in diesen Fällen die Eigenleitfähigkeit nur als Korrektur zu den gesuchten Größen hinzutrat und das Bild nicht verfälschen konnte. Nur beim Benzol betrug die Eigenleitfähigkeit, wenigstens für den kleinsten Elektrodenabstand von 1 mm, etwa die Hälfte des Gesamtbetrages, und daher sind die Messungen beim Benzol nicht genz so zuverlässig, wie die bei den anderen Substanzen.

Die Reinigung der Flüssigkeiten geschah durch mehrfache Destillation und dann durch den Strom selbst. Petroläther bietet am wenigsten Schwierigkeiten; schon nach 1 bis 2 Destillationen ist seine Eigenleitfähigkeit, wenigstens für den gegenwärtigen Zweck, zu vernachlässigen. Die anderen drei Flüssigkeiten halten, wie es scheint, ihre Verunreinigungen mit viel größerer Hartnäckigkeit fest. Tetrachlorkohlenstoff mußte dreimaliger Destillation in einem durch Chlorcalcium gegen die Feuchtigkeit der Luft geschützten Apparat unterworfen werden. Benzol und Schwefelkohlenstoff wurden erst tagelang am Rückflußkühler über metallischem Calcium bzw. Quecksilber erhitzt und dann wiederholt destilliert. Welcher Art die störenden Verunreinigungen sind, und ob Feuchtigkeit eine wesentliche Rolle dabei spielt, ist leider nicht möglich anzugeben; Benzol ist sicherlich sehr empfindlich gegen Feuchtigkeit, Petroleum ganz unempfindlich. Die letzte Reinigung erfolgte, wie schon erwähnt, durch den elektrischen Strom selbst, indem die destillierte Flüssigkeit in dem sorgfältigst gereinigten und vorgespülten Kondensator mindestens 24 Stunden lang einem starken Felde ausgesetzt wurde. Dieses schon von Hertz und Warburg empfohlene Verfahren pflegte die Leitfähigkeit beträchtlich herabzusetzen. Auch abgesehen von dieser anfänglichen Widerstandszunahme zeigen flüssige Dielektrika, wie schon lange bekannt, die Erscheinung der „Aufladung", d. h. einer Leitfähigkeitsabnahme mit der Zeit unmittelbar nach Anlegen oder Verstärken des Feldes; überhaupt weist

die Leitfähigkeit der sogenannten flüssigen Nichtleiter verschiedene Eigentümlichkeiten auf; auf diese, wie auf die Frage, ob flüssigen Isolatoren überhaupt eine „Eigenleitfähigkeit" zukommt, und welchen Ursprungs sie ist, soll hier nicht weiter eingegangen werden, weil sie den Gegenstand einer besonderen, demnächst erscheinenden Arbeit bilden. Für die gegenwärtigen Zwecke genügt die Feststellung, daß die Flüssigkeiten nach hinreichend langer Zeit, die bei kleinem Plattenabstand und großen Potentialwerten nur nach Minuten zählt, einen wohldefinierten (allerdings bei verschiedenen Proben verschiedenen!) Wert der Leitfähigkeit zeigen; außerdem gehorcht ihre Leitfähigkeit innerhalb der Fehlergrenzen des Experiments bei den hier untersuchten Flüssigkeiten dem Ohmschen Gesetz. Inwieweit dieses der Fall ist, mag in der folgenden Tabelle I an einem charakteristischen Beispiel, nämlich Tetrachlorkohlenstoff, illustriert werden.

Tabelle I.

Eigenleitfähigkeit von Tetrachlorkohlenstoff.

Probe I.

Elektrodenabstand d	Potential v	Strom × cm^{-2} i	Leitfähigkeit $\varkappa = \frac{i \cdot d}{v}$
0,1 cm	100 Volt	1,45 Amp. 10^{-13}	1,45 $\Omega^{-1} \cdot 10^{-16}$
0,1	200	2,88	1,44
0,1	300	4,34	1,45
0,2	200	1,48	1,48
0,2	400	2,88	1,44
0,2	600	4,36	1,45
0,3	300	1,45	1,45
0,3	600	2,89	1,45
0,3	900	4,38	1,46

Mittelwert: $\varkappa = 1{,}45\ \Omega^{-1} \cdot 10^{-16}$.

Es muß noch erwähnt werden, daß die hier angeführten Zahlen galten, wenn das an die Elektrode B gelegte Potential negativ war; wurden die Potentiale positiv gewählt, so ergab sich zwar wieder eine Ohmsche Leitfähigkeit, deren Betrag aber etwa 13 mal so klein war. In den anderen untersuchten Fällen war die Unipolarität bei weitem nicht so ausgeprägt;

immer aber, auch beim Tetrachlorkohlenstoff, ergab sich die Differenz der Leitfähigkeit mit und ohne Bestrahlung unabhängig vom Vorzeichen des angelegten Potentials. Der Einfluß der Radiumstrahlen auf die Leitfähigkeit wurde nun in der Weise untersucht, daß erst die Leitfähigkeit ohne Radium, dann mit Radium, dann wieder ohne Radium gemessen wurde; in einigen Fällen hatte sich die Eigenleitfähigkeit um ein weniges verringert, dann wurde eine Korrektion für die zwischenliegende Zeit angebracht, meistens war der Wert unverändert geblieben. In den folgenden Tabb. II—V sind die Resultate für die vier untersuchten Flüssigkeiten *nach Abzug* der Eigenleitfähigkeit zusammengestellt. Der Einfluß der letzteren wurde in der Weise in Rechnung gebracht, daß der Widerstand der Flüssigkeit, wie aus Tab. I ersichtlich, als Mittel aller Beobachtungen bestimmt und der Strom dann für die einzelnen Potential- und Elektrodenabstandswerte nach dem Ohmschen Gesetz berechnet wurde. Die Widerstandswerte sind über den Tabellen vermerkt. Die in der Tabelle angeführten Zahlen sind in Amp. 10^{-13} gegeben und bedeuten die zwischen den Platten übergehenden Ströme, bezogen auf 1 qcm Querschnitt (also den 38,5ten Teil der gemessenen Ströme). Die Potentiale sind in Volt/cm gegeben, um eine bequeme Vergleichung für die Ströme bei variablem Plattenabstand zu ermöglichen; natürlich bedeuten die Werte der Feldstärke nur Mittelwerte, weil ja das Feld nicht homogen sein kann.

Jede Versuchsreihe ist das Mittel zweier unabhängiger Messungsreihen an verschiedenen Materialproben; nur beim Petroläther liegt eine einzige Messungsreihe zugrunde, weil gerade am Petroläther die Konstanz der Erscheinung schon in der früheren Arbeit dargetan ist. Jeder Punkt der einzelnen Messungsreihe ist wieder das Mittel von drei Einzelbeobachtungen, und zwar wurden immer gleich viel Punkte mit steigenden, wie mit fallenden Potentialwerten bestimmt. Beobachtungen an derselben Substanzmenge stimmten auf 2—3 Proz. überein, und auch Messungen an verschiedenen Proben wichen nicht mehr als 5—6 Proz. voneinander ab. Dieses betrifft nur die Absolutwerte, die Abweichungen von der gleich zu erwähnenden linearen Beziehung, auch innerhalb einer Versuchsreihe, sind wesentlich geringer, etwa 2—3 Proz.

Tabelle II. Petroläther.

Eigenleitfähigkeit: $\varkappa < 10^{-18}\ \Omega^{-1}$.

Elektrodenabstand 1 mm.

Feld in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$		100	500	1000	1500	2000	2500	3000	a	$c \cdot 10^4$	$r \cdot 10^4 = \frac{c}{a} \cdot 10^4$
Strom in Amp. 10^{-13}	beob.	2,09	2,84	2,45	2,56	2,68	2,85	2,97	2,24	2,32	1,04
	ber.	—	2,85	2,47	2,59	2,70	2,82	2,94			

Elektrodenabstand 2 mm.

Feld in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$		250	500	1000	1500	2000	2500	3000	a	$c \cdot 10^4$	$r \cdot 10^4 = \frac{c}{a} \cdot 10^4$
Strom in Amp. 10^{-13}	beob.	4,12	4,31	4,51	4,73	4,93	5,18	5,43	4,12	4,26	1,03
	ber.	—	4,33	4,55	4,76	4,97	5,18	5,40			

Elektrodenabstand 3 mm.

Feld in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$		167	500	1000	1500	2000	2500	3000	a	$c \cdot 10^4$	$r \cdot 10^4 = \frac{c}{a} \cdot 10^4$
Strom in Amp. 10^{-1}	beob.	5,91	6,88	6,65	6,92	7,24	7,50	7,82	6,08	5,90	0,970
	ber.	—	6,87	6,67	6,97	7,26	7,55	7,85			

Tabelle III.

Tetrachlorkohlenstoff.

Eigenleitfähigkeit { Probe I: $\varkappa = 1{,}45\ \Omega^{-1} 10^{-16}$ / Probe II: $\varkappa = 1{,}28\ \Omega^{-1} 10^{-17}$.

Elektrodenabstand 1 mm.

Feld in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$		100	300	500	1000	1500	2000	2500	3000	a	$c \cdot 10^4$	$r \cdot 10^4 = \frac{c}{a} \cdot 10^4$
Strom in Amp. 10^{-13}	beob.	3,03	3,36	3,44	3,56	3,70	3,78	3,91	4,16	3,30	2,73	0,828
	ber.	—	3,38	3,44	3,57	3,71	3,85	3,98	4,12			

Elektrodenabstand 2 mm.

Feld in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$			250	500	1000	1500	2000	2500	3000	a	$c \cdot 10^4$	$r \cdot 10^4 = \frac{c}{a} \cdot 10^4$
Strom in Amp. 10^{-13}	beob.	—	6,14	6,63	6,99	7,29	7,58	7,78	8,06	6,47	5,43	0,839
	ber.	—	—	6,74	7,01	7,28	7,56	7,83	8,10			

Elektrodenabstand 3 mm.

Feld in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$			333	500	1000	1500	2000	2500	3000	a	$c \cdot 10^4$	$r \cdot 10^4 = \frac{c}{a} \cdot 10^4$
Strom in Amp. 10^{-13}	beob.	—	9,40	9,96	10,6	10,9	11,3	11,6	12,1	9,69	0,800	0,825
	ber.	—	—	10,1	10,5	10,9	11,3	11,7	12,1			

Tabelle IV.

Schwefelkohlenstoff.

Eigenleitfähigkeit { Probe I: $\varkappa = 8{,}30\,\Omega^{-1}\,10^{-16}$ / Probe II: $\varkappa = 8{,}00\,\Omega^{-1}\,10^{-17}$.

Elektrodenabstand 1 mm.

Feld in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$		100	500	1000	1500	2000	2500	3000	a	$c \cdot 10^4$	$r \cdot 10^4 = \frac{c}{a} \cdot 10^4$
Strom in Amp. 10^{-13}	beob.	8,00	9,47	9,95	10,4	10,7	11,2	11,6	9,05	8,65	0,955
	ber.	—	9,48	9,92	10,4	10,8	11,2	11,6			

Elektrodenabstand 2 mm.

Feld in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$		250	500	1000	1500	2000	2500	3000	a	$c \cdot 10^4$	$r \cdot 10^4 = \frac{c}{a} \cdot 10^4$
Strom in Amp. 10^{-13}	beob.	17,4	18,1	18,9	19,8	20,7	21,3	22,2	17,3	16,7	0,965
	ber.	—	18,1	19,0	19,8	20,6	21,5	22,3			

Elektrodenabstand 3 mm.

Feld in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$		233	500	1000	1500	2000	2500	3000	a	$c \cdot 10^4$	$r \cdot 10^4 = \frac{c}{a} \cdot 10^4$
Strom in Amp. 10^{-13}	beob.	23,8	26,8	28,4	29,8	31,1	32,4	33,7	26,0	25,8	0,974
	ber.	—	27,3	28,5	29,8	31,1	32,3	33,6			

Tabelle V.

Benzol.

Eigenleitfähigkeit { Probe I: $\varkappa = 5{,}32\ \Omega^{-1}\ 10^{-17}$ / Probe II: $\varkappa = 4{,}48\ \Omega^{-1}\ 10^{-17}$.

Elektrodenabstand 1 mm.

Feld in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$		100	500	1000	1500	2000	2500	3000	a	$c.10^4$	$r.10^4 = \frac{c}{a} \cdot 10^4$
Strom in Amp. 10^{-13}	beob.	1,16	1,25	1,30	1,36	1,39	1,39	1,50	1,215	0,883	0,728
	ber.	—	1,26	1,30	1,35	1,39	1,44	1,48			

Elektrodenabstand 2 mm.

Feld in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$		250	500	1000	1500	2000	2500	3000	a	$c.10^4$	$r.10^4 = \frac{c}{a} \cdot 10^4$
Strom in Amp. 10^{-13}	beob.	2,18	2,24	2,34	2,40	2,45	2,55	2,62	2,16	1,57	0,727
	ber.	—	2,24	2,32	2,40	2,47	2,55	2,63			

Elektrodenabstand 3 mm.

Feld in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$		333	500	1000	1500	2000	2500	3000	a	$c.10^4$	$r.10^4 = \frac{c}{a} \cdot 10^4$
Strom in Amp. 10^{-13}	beob.	3,28	3,42	3,56	3,63	3,76	3,86	3,99	3,28	2,40	0,732
	ber.	—	3,40	3,52	3,64	3,76	3,88	4,00			

Aus den Tabellen, wie aus der Fig. 2, welche die Versuche mit Tetrachlorkohlenstoff zur Anschauung bringt, erhellt ohne weiteres die Analogie mit dem Verhalten der Gase und

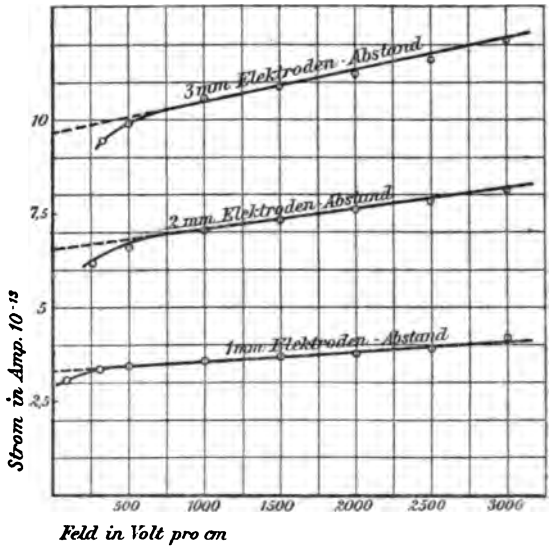


Fig. 2.

die vollständige Übereinstimmung mit den früher am Petroläther gewonnenen Resultaten. In allen Fällen wird die Beziehung zwischen Potential und Strom durch eine Gleichung von der Form:

(1) $$i = f(e) + c \cdot e$$

dargestellt. Das erste Glied $f(e)$ bleibt oberhalb eines gewissen Wertes der Feldstärke, der zwischen 500 Volt/cm und 1000 Volt/cm liegt, konstant; oberhalb dieses Wertes steht also der Strom in linearer Abhängigkeit vom Feld:

(1') $$i = a + c \cdot e.$$

Die Konstanten a und c sind aus den Versuchsergebnissen durch graphische Interpolation abgeleitet, und der aus ihnen berechnete Stromwert jedesmal unter dem experimentell bestimmten vermerkt.

Der Quotient $c/a = r$ findet sich in den Tabellen vermerkt, er bedeutet ein Maß für den Mangel an Sättigung, nämlich

die Stromzunahme, wenn das Feld um 1 Volt/cm wächst, gemessen in Einheiten des Sättigungskoeffizienten a. Diese Größen r ergeben sich bei derselben Flüssigkeit für verschiedene Plattenabstände (und, wie man wohl aus den früheren Versuchen am Petroläther schließen darf, auch für verschiedene Strahlungsintensitäten) konstant, und auch von einer Flüssigkeit zur anderen nicht sehr verschieden.

Weiter ergibt sich, daß die Koeffizienten a ihrerseits in linearer Abhängigkeit vom Plattenabstand d stehen,

(2) $$a = q \cdot d + q'$$

wie Tab. VI lehrt.

Tabelle VI.

Elektrodenabstand d		1 mm	2 mm	3 mm	q	q'	δ	$k = \frac{q}{\delta}$	$s = \frac{q'}{k}$
Petroläther	a	2,24	4,12	6,08	1,93	0,29	0,681	2,84	0,102
	$qd+q'$	2,22	4,15	6,08					
Tetrachlorkohlenstoff	a	3,30	6,47	9,69	3,14	0,21	1,587	1,97	0,106
	$qd+q'$	3,35	6,49	9,63					
Schwefelkohlenstoff	a	9,05	17,3	26,0	8,37	0,68	1,265	6,61	0,103
	$qd+q'$	9,05	17,4	25,8					
Benzol	a	1,22	2,16	3,28	1,05	0,18	0,881	1,19	0,109
	$qd+q'$	1,18	2,23	3,28					

Diese lineare Abhängigkeit erklärt sich in der Weise, daß die beobachtete Ionisation einer äußerst durchdringenden Strahlung q und einer sehr leicht absorbierbaren Sekundärstrahlung q' zugeschrieben werden kann. Letztere wird schon von einer Flüssigkeitsschicht von 1 mm Dicke vollständig absorbiert; erstere erleidet, wenigstens beim Durchdringen von nur 3 mm Schichtdicke, keine merkbare Einbuße an Intensität; für größere Schichtdicken ist allerdings eine exponentielle Abhängigkeit mit kleinem Absorptionskoeffizienten zu erwarten.

Die Größen q messen die Ionisation in einem Zylinder von 1 cm² Basis und 0,1 cm Höhe. Es empfiehlt sich aus Gründen, die sich später ergeben werden, die Ionisationen nicht auf gleiche Volumina, sondern auf gleiche Massen zu beziehen, also die Konstanten q noch durch die Dichten δ zu dividieren.

Die auf diesem Wege gewonnenen Größen sind in Tab. VI unter der Bezeichnung k vermerkt, und es ergibt sich weiter aus dieser Tabelle, daß die Größen k und q' einander proportional sind; man kann also schreiben:

$$a = q \cdot d + q' = k(\delta \cdot d + s). \tag{3}$$

Nach alledem lassen sich nun die sämtlichen Versuchsergebnisse für verschiedene Substanzen, Plattenabstände und Potentialwerte durch eine einzige Formel wiedergeben. Bezeichnet man mit J die Intensität der erregenden Radiumstrahlen, und mit k_0 den Wert von k für die Einheit der Intensität, so ergibt sich folgender Ausdruck für den Strom i pro Strahlungseinheit und Quadratzentimeter Querschnitt:

$$\frac{i}{J} = k_0 [d \cdot \delta + (d \cdot \delta + s) \cdot r \cdot e + s]. \tag{4}$$

Aus (1') und (3) folgt nämlich

$$\begin{aligned} i = a + c \cdot e &= a(1 + r \cdot e) = k(\delta \cdot d + s)(1 + r \cdot e) \\ &= k[d \cdot \delta + (d\,\delta + s) \cdot r \cdot e + s]; \end{aligned}$$

setzt man nun

$$k = k_0 J,$$

so ergibt sich Formel (4). Diese Formel gilt, wenn die Potentialdifferenz hinreichend hohe Werte angenommen hat, um Sättigung des ersten Gliedes in (1) bewirken zu können; für niedrigere Feldstärken tritt als variabler Faktor eine Funktion der Feldstärke auf, welche (wie bei Gasen) nicht notwendig für alle Substanzen und Plattenabstände die gleiche zu sein braucht. Auch ist die Gültigkeit von Formel (4) auf solche Schichtdicken beschränkt, welche hinreichen, um die gesamte Sekundärstrahlung zu absorbieren, ohne andererseits so groß zu sein, daß eine merkliche Schwächung der Primärstrahlung eintritt, anderenfalls sind die konstanten Faktoren durch Exponentialfunktionen zu ersetzen.

In der aufgestellten Formel ist nun k eine Materialkonstante, die für verschiedene Substanzen beträchtlich verschiedene Werte annimmt, der Koeffizient s dagegen ist für alle untersuchten Substanzen gleich, und der Faktor r von einer Substanz zur anderen jedenfalls nicht sehr verschieden. (Er variiert von 0,729 bei Benzol bis zu 1,01 bei Petroläther.)

Die bei flüssigen Isolatoren unter dem Einfluß von Radiumstrahlen, und zwar vorwiegend γ-Strahlen, beobachtete Leitfähigkeit läßt sich demnach als aus drei Komponenten gebildet auffassen: aus den von der Primär- und Sekundärstrahlung herrührenden beiden Ionisationsströmen, welche durch hinreichende Feldstärken gesättigt werden können, und aus einem „Leitungsstrom", welcher dem Ohmschen Gesetz gehorcht, aber dennoch der durch die Strahlung erzeugten Ionenzahl proportional ist, also mit dem Plattenabstande wächst. Ein Versuch zur Deutung dieses Verhaltens soll erst am Schluß der Arbeit gegeben und vorerst über eine Reihe anderer Versuche berichtet werden.

Zunächst wurde eine große Reihe von Experimenten angestellt, um den Einfluß eines etwa versteckten methodischen Fehlers zu eliminieren. Zu diesem Zwecke wurde die Form des Kondensators, die Größe der Elektroden variiert, es wurde ein Kondensator mit vertikalen Platten gebaut: aber immer ergab sich dasselbe Resultat, wenn nur, wie schon erwähnt, durch einen Schutzring der Gang der Stromlinien reguliert wurde. Alle Versuche ergaben dasselbe charakteristische lineare Ansteigen des Stromes mit dem Felde oberhalb etwa 800 Volt/cm, und auch der Mangel an Sättigung, d. h. der Betrag der Konstante $r = c/a$, ergab sich mit großer Annäherung konstant. Ferner wurde, mit demselben negativen Einfluß auf das Resultat, die Lage der Strahlungsquelle gegen den Kondensator verändert. Eine Reihe von Versuchen (mit dem Plattenabstand von 2 mm), bei denen die Strahlungsrichtnng senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien stand, mag in der nachstehenden Tab. VII angeführt werden.

Es ergibt sich ohne weiteres die Übereinstimmung mit den früheren Versuchen; natürlich ließ sich auch bei dieser Anordnung nicht vermeiden, daß ein Teil der Strahlen auf die Elektroden traf; dieser Umstand läßt sich wohl beim Arbeiten mit γ-Strahlen überhaupt nicht beseitigen.

Ferner schien es von Interesse, die Leitfähigkeit von Luft in demselben Kondensator und unter den gleichen Umständen zu messen. Dabei ergab sich nun das unerwartete Resultat, daß es auch bei Luft von Atmosphärendruck in keinem Falle, bei Feldwerten bis zu 5000 Volt/cm hinauf, gelang, vollständige

Tabelle VII. Petroläther.

Elektrodenabstand 2 mm.

Feld in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$		100	250	500	1000	1500	2000	2500	3000	a	$c \cdot 10^4$	$r \cdot 10^4 = \frac{c}{a} \cdot 10^4$
Strom in Amp. 10^{-13}	beob.	1,44	1,52	1,58	1,65	1,72	1,79	1,86	1,94	1,51	1,43	0,947
	ber.	—	—	1,58	1,65	1,72	1,80	1,87	1,94			

Tabelle VIII. Absorptionsmessungen.

Die erste Kolonne gibt den Inhalt des Absorptionstroges an.

Feld in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$			500	1000	1500	2000	2500	3000	a	$c \cdot 10^4$	$r \cdot 10^4 = \frac{c}{a} 10^4$
Luft	Strom in Amp. 10^{-13}	beob.	1,05	1,12	1,16	1,21	1,26	1,31	1,018	0,973	0,957
		ber.	1,07	1,12	1,17	1,22	1,26	1,31			
Petroläther	Strom in Amp. 10^{-13}	beob.	0,942	1,00	1,05	1,09	1,13	1,17	0,915	0,867	0,948
		ber.	0,958	1,00	1,05	1,09	1,13	1,17			
Tetrachlor-kohlenstoff	Strom in Amp. 10^{-13}	beob.	0,809	0,851	0,895	0,931	0,974	1,01	0,780	0,767	0,984
		ber.	0,818	0,857	0,895	0,933	0,972	1,01			
Schwefel-kohlenstoff	Strom in Amp. 10^{-13}	beob.	0,857	0,905	0,942	0,980	1,02	1,05	0,825	0,767	0,930
		ber.	0,863	0,902	0,940	0,978	1,02	1,06			
Benzol	Strom in Amp. 10^{-13}	beob.	0,910	0,958	1,00	1,04	1,07	1,11	0,880	0,783	0,890
		ber.	0,919	0,958	0,997	1,04	1,08	1,12			

Sättigung zu erzielen. Über die Ursache dieser Erscheinung und über die Frage, inwieweit sie mit der ähnlichen Beobachtung bei Flüssigkeiten vergleichbar ist, sind noch Versuche im Gange. Es mag hier nur erwähnt werden, daß bei einem Plattenabstand von 2 mm der in Luft von Atmosphärendruck beobachtete Ionisationsstrom 14 mal kleiner ist, als der im Petroläther bei gleicher Strahlungsintensität.

Im folgenden soll nun noch auf die Bedeutung der Konstanten k etwas näher eingegangen werden. Ohne an dieser Stelle eine Hypothese über den Mechanismus der Stromleitung machen zu müssen, kann man die Größe k als Maß für die Leitfähigkeit eines flüssigen Isolators bei Bestrahlung ansprechen, da ja der experimentelle Befund ergeben hat, daß der Strom für gegebenes J, d und e der Größe k proportional ist (vgl. Formel 4). Im Sinne der an Gasen gewonnenen Anschauungen würde man sagen: die Konstanten k sind der Zahl der Ionen proportional, welche in gleichen Massen verschiedener Substanzen durch die Strahlung erzeugt werden. — Man sieht aus Tab. VI ohne weiteres, daß die Konstanten k in keiner einfachen Beziehung zur Dichte stehen, und es erhebt sich die Frage, wie sich die Substanzen, deren Ionisation hier gemessen wurde, hinsichtlich ihrer Absorption für Radiumstrahlen verhalten.

Um diesen Punkt aufzuklären, wurde eine Reihe von Absorptionsmessungen ausgeführt, indem zwischen Strahlungsquelle und Ionisationskammer eine absorbierende Schicht von bekannter Dicke geschaltet wurde. Als Ionisationskammer diente derselbe Kondensator wie zu den bisherigen Versuchen, und zwar wurde er mit Petroläther, nicht mit Luft, beschickt, um bequemere Meßbarkeit der Ionisation zu erzielen. Zwischen den Kondensator und das Radium wurde ein Absorptionstrog aus Messing gebracht, der gerade eine Schicht von 40 mm Dicke faßte. Es wurde nun der Strom im Kondensator gemessen, wenn das Absorptionsgefäß erst mit Luft und dann mit den zu messenden Flüssigkeiten gefüllt war. Die Mittel von zwei bis vier Messungsreihen für jede Substanz sind in der vorstehenden Tab. VIII vermerkt.

Aus der Tabelle ergibt sich zunächst wieder das lineare Ansteigen des Stromes mit dem Potential oberhalb 500 Volt/cm;

die Quotienten $c/a = r$ sind wohl als konstant anzusprechen, und es bestätigt sich so ihre Unabhängigkeit von der Strahlungsintensität. Bildet man nun die Differenz der Konstanten a für Luft und für eine beliebige Substanz, so ist diese Differenz ein Maß für die von 40 mm der betreffenden Substanz absorbierte Strahlungsmenge. Man findet diese Differenzen unter der Bezeichnung L in der folgenden Tab. IX vermerkt; aus diesen Größen ließen sich auf Grund eines Exponentialgesetzes die Absorptionskoeffizienten für die verschiedenen Substanzen berechnen, aber da die Schwächung der Strahlung im Höchstfalle nur 23 Proz. beträgt, kann man die Größen L selbst als Maß für die Absorption der Flüssigkeiten ansehen, und dieses mit um so besserem Rechte, als das exponentielle Absorptionsgesetz für γ-Strahlen nicht erwiesen ist. In der Tabelle findet man außer den Größen L die Dichten δ und die Quotienten L/δ vermerkt. Die letzteren sind konstant, und man kann also folgern, daß die Absorption proportional der Dichte erfolgt.

Tabelle IX.

Substanz	L	δ	L/δ
Petroläther	0,103	0,681	1,51
Tetrachlorkohlenstoff .	0,238	1,587	1,50
Schwefelkohlenstoff .	0,193	1,265	1,53
Benzol	0,138	0,881	1,57

Aus dieser Proportionalität folgt nun, daß die Konstanten k nicht nur auf gleiche Massen bezogen sind, sondern damit zugleich auf gleiche absorbierte Beträge der Strahlungsenergie; man kann die Konstanten k demnach als „spezifische Ionisationen“ der betreffenden Flüssigkeiten für durchdringende Strahlung ansprechen. Die spezifische Ionisation ist der Ionenzahl proportional, welche von gleichen absorbierten Mengen in verschiedenen Substanzen erzeugt wird. Würde also eine bestimmte Strahlung vollständig absorbiert, so müßten die resultierenden Ionisationen den k proportional sein. Dieses bestätigt sich an der Sekundärstrahlung q', denn diese hatte sich oben proportional k ergeben.

Es findet sich also hier ein Verhalten wieder, wie es neuerdings Bragg[1]) für die Ionisation von Gasen und Dämpfen durch α-Strahlen gefunden hat. Nach Bragg ist nämlich der Quotient von absorbierter Strahlungsenergie zu erzeugter Ionisation eine Konstante, welche für verschiedene Substanzen merkbar verschiedene Werte annimmt. Während aber Braggs „spezifische Ionisationen" für Gase nur im Verhältnis 0,96:1,37 variieren, zeigen sich bei den hier untersuchten flüssigen Isolatoren viel größere Verschiedenheiten. Bragg hat auch die hier studierten Substanzen als Dämpfe in ihrem Verhalten gegen α-Strahlen untersucht, aber nur unbeträchtliche Differenzen der Konstanten k gefunden (l. c.). Berücksichtigt man aber, daß die Ionisation von Luft durch γ-Strahlen (und Sekundärstrahlen) nur 14 mal kleiner ist als die von Petroläther, obgleich doch die Absorption gegen die in der Flüssigkeit völlig zu vernachlässigen ist, so ergibt sich, daß man aus dem Verhalten von Gasen nicht ohne weiteres auf das von Flüssigkeiten schließen darf.

Aus der Verschiedenheit der Konstanten k wird man nun entweder schließen müssen, daß die Erzeugung eines Ions in verschiedenen Flüssigkeiten einen verschiedenen Aufwand von Energie kostet; oder, wenn man sich der wahrscheinlicheren Hypothese anschließt, daß die Primärstrahlen nur auslösend wirken, wird man annehmen können, daß verschiedene Substanzen in verschiedenem Maße die Eigenschaft haben, Sekundärstrahlen zu emittieren und so indirekt Ionisation hervorzurufen.

Bragg hat in der zitierten Arbeit eine Beziehung zwischen der spezifischen Ionisation k und molekularen Eigenschaften, so dem Molekularvolum und der Molekularrefraktion, statuiert, was um so auffallender ist, als die genannten physikalischen Größen Eigenschaften des flüssigen Moleküls wiedergeben. Ähnliche Beziehungen lassen sich für die hier gefundenen Größen k nicht aufstellen; doch sind die untersuchten Substanzen wohl nicht zahlreich genug, um aus den gefundenen Werten gesetzmäßige Beziehungen mit anderen physikalischen Eigenschaften abzuleiten oder zu widerlegen.

1) W. H. Bragg, Phil. Mag. 13. p. 333. 1907.

Zur Geschichte der hier untersuchten Eigenschaft flüssiger Isolatoren, muß bemerkt werden, daß Curie, der die Eigenschaft entdeckte, gleich in der ersten Veröffentlichung Messungen an verschiedenen Substanzen mitteilte.[1]) Curies Zahlen beziehen sich auf gleiche Schichtdicken und ergeben im wesentlichen dieselbe Reihenfolge (es verhalten sich die Ionisationen in Petroläther, Tetrachlorkohlenstoff, Schwefelkohlenstoff, Benzol wie 15:8:20:4); nur die Ordnung von Petroläther und Tetrachlorkohlenstoff ist vertauscht; aber Curies Zahlen sind mit den hier erhaltenen nicht direkt vergleichbar, weil Curies Zahlen für solche Potentialwerte gelten, bei denen der Strom noch proportional dem Felde wächst.

Auch Righi[2]) hat vergleichende Messungen an verschiedenen Flüssigkeiten ausgeführt, und glaubt einen Widerspruch seiner Versuche mit denen Curies darin zu sehen, daß nach seinen eigenen Versuchen die fragliche Einwirkung bei Vaselinöl viel stärker ist als bei Schwefelkohlenstoff, während bei Curie die Sache umgekehrt liegt. Dieser Widerspruch klärt sich jedoch leicht auf; denn Curie mißt, wie das hier auch geschehen ist, die absolute Zunahme des Stromes bei Bestrahlung, während Righi die relative Widerstandsänderung mißt. In Righis Experimenten sind also die Eigenleitfähigkeiten implizite enthalten, und diese können um viele Zehnerpotenzen schwanken. Daß Righi nicht sehr reine Präparate benutzt hat, folgt schon aus seiner Angabe, daß bei einer Probe Petroläther der Widerstand der Flüssigkeit um ein Sechstel seines Wertes verringert wurde.

Zum Schluß soll nun noch der Versuch unternommen werden, eine Hypothese aufzustellen, welche geeignet scheint, den Mechanismus der Stromleitung in bestrahlten flüssigen Isolatoren zu veranschaulichen und insbesondere die hier beobachtete Beziehung zwischen Strom und Potential zu erklären. Es wurde schon in der früheren Arbeit darauf hingewiesen, daß man genötigt ist, die Existenz von Elektrizitätsträgern entweder von zweierlei Art oder von zweierlei Herkunft anzunehmen. Man kann erstens die Hypothese aufstellen, daß

1) P. Curie, Compt. rend. **134.** p. 420. 1902.
2) A. Righi, Physik. Zeitschr. **6.** p. 377. 1905.

der bei Potentialgefällen von mehr als 1000 Volt/cm zur Beobachtung gelangende Strom tatsächlich schon gesättigt ist; d. h., daß für einen gegebenen Feldwert alle pro Zeiteinheit gebildeten Ionen zu den Elektroden gelangen, bevor sie sich neutralisieren können. Dann muß man natürlich weiter annehmen, daß durch das Feld entweder an sich oder unter Mitwirkung der primär gebildeten Ionen weitere Elektrizitätsträger entstehen, weil sonst ein Ansteigen des Stromes mit dem Potential oberhalb der genannten Grenze unmöglich wäre. Man käme also zu einer Hypothese, welche der Annahme einer „Ionisation durch Stoß" ähnlich wäre; nun ist ein solcher Vorgang in Flüssigkeiten an sich unwahrscheinlich, noch dazu in Feldern, bei denen die Ionisation durch Stoß selbst in Gasen von Atmosphärendruck sich der Beobachtung entzieht. Ferner würde eine solche Hypothese ein stärkeres als lineares Anwachsen des Stromes, sowohl mit dem Potential wie mit dem Plattenabstand, verlangen.

Läßt man also diese Hypothese als unwahrscheinlich beiseite, so bleibt die zweite Möglichkeit, daß der zur Beobachtung gelangende Strom auch bei den höchsten erreichten Feldwerten ungesättigt ist, d. h., daß im Inneren der Flüssigkeit mehr Ionen vorhanden sind, als zum Elektrizitätstransport herangezogen werden. In diesem Falle wird man zu der weiteren Annahme geführt, daß es in der Flüssigkeit Elektrizitätsträger von zweierlei Art (abgesehen vom Vorzeichen!) geben muß, erstens leichtbewegliche, welche schon von einem Feld von etwa 1000 Volt/cm vollständig aus dem Ionisationsraume entfernt werden, und zweitens träge Ionen, die auch bei den höchsten Feldern (bis etwa 7000 Volt/cm) keine Annäherung an Sättigung zeigen; und zwar müssen die Ionen der zweiten Art so zahlreich vorhanden sein, oder so schnell nachgebildet werden, daß der von ihnen getragene Strom proportinal mit dem Felde wächst. Die Ionen der ersten Art nähern sich also in ihrem Verhalten den aus der Elektrizitätsleitung in Gasen bekannten Elektrizitätsträgern, während diejenigen der zweiten Art mehr elektrolytischen Ionen ähneln. Erstere wird man ohne weiteres als durch die Strahlung erzeugt ansehen dürfen, während man über die Herkunft der letzteren wieder zwei Hypothesen aufstellen kann. Man kann entweder an-

nehmen, daß auch sie erst von der Strahlung erzeugt werden, oder daß sie von der Flüssigkeit ohne Mitwirkung der Strahlen geliefert werden. Erstere Annahme, nach welcher die Strahlung außer der Abspaltung verhältnismäßig leicht beweglicher Ionen eine schwache elektrolytische Dissoziation im Medium hervorrufen würde, ist ungeeignet, die Zunahme auch des „Leitungsstromes" mit dem Plattenabstand zu erklären. Es bleibt also die Hypothese, welche hier angenommen werden soll, daß die Träger des „Leitungsstromes" von der Flüssigkeit an sich, ohne Mitwirkung der Strahlen gebildet werden, mögen sie nun von gelösten Verunreinigungen oder von einer geringen Eigendissoziation des Isolators herrühren.

Nun ist bei den oben beschriebenen Versuchen allerdings die Eigenleitfähigkeit der Flüssigkeiten berücksichtigt worden, aber auf Grund der stillschweigenden Voraussetzung, daß Ionisations- und Leitungsstrom sich gegenseitig nicht beeinflussen. Daß nun diese Voraussetzung keineswegs erfüllt zu sein braucht, geht vielleicht am deutlichsten aus der Erscheinung der „Aufladung" hervor. Es wurde schon oben erwähnt, daß auch die reinsten flüssigen Isolatoren unabhängig von der anfänglichen Widerstandszunahme durch die „elektrolytische Reinigung" beim Anlegen oder Verändern des Potentials sehr beträchtliche Leitfähigkeitsänderungen zeigen; und zwar sind es Leitfähigkeitsabnahmen beim Anlegen oder Erhöhen des Potentials und Zunahmen beim Erniedrigen des Potentials. Schon Warburg[1]) hat diese Erscheinung, allerdings an wesentlich besser leitenden Flüssigkeiten, eingehend studiert und auf Grund von Polarisationsvorgängen gedeutet.[2]) Man wird allgemein sagen können, daß die „Aufladung" durch die Ausbildung freier Ladungen im Dielektrikum bedingt ist. Durch die Stromleitung bilden sich an den Elektroden Schichten freier Ladungen aus, welche dem Nachrücken weiterer Ionen entgegenwirken und so den Widerstand heraufsetzen. Im stationären Zustand ist die Verteilung des Potentialgefälles nicht mehr homogen, sondern dieses ist in der Nachbarschaft

1) E. Warburg, Wied. Ann. 54. p. 396. 1895.

2) Man vgl. auch die eingehende Darstellung in der gerade erschienenen Arbeit von E. v. Schweidler, Ann. d. Phys. 24. p. 711. 1907. Daselbst auch die Literatur.

der Elektroden sehr steil und nur im mittleren Teile konstant; für die Leitfähigkeit kommt, wenn die Schichten freier Ladung schmal sind, wesentlich der Wert im mittleren, homogenen Teile in Betracht.

Wird nun über einen solchen Zustand eine konstante Volumionisation gedeckt, so hat diese zur Folge, daß die bestehenden Differenzen der Feldstärke zum Teil ausgeglichen werden: es bildet sich ein neuer stationärer Zustand mit ganz anderer Feldverteilung aus. Ist insbesondere, wie es bei Auftreten einer Sekundärstrahlung immer der Fall ist, die Intensität der übergelagerten Ionisation in der Nähe der Elektrode stärker als im Innern der Flüssigkeit, so wird der Potentialfall an den Elektroden auch relativ stärker herabgesetzt. Die Bestrahlung hat also nicht nur das Auftreten einer ganz neuen Art von Elektrizitätsträgern in ganz bestimmter Zahl zur Folge, sondern sie stellt auch die Eigenleitfähigkeit der Flüssigkeit in einem größeren Betrage wieder her, indem sie gewissermaßen als Depolarisator wirkt. Der Endzustand hängt dann in komplizierter Weise von Zahl und Beweglichkeit der beiden Ionengattungen ab.

Durch das hier charakterisierte Verhalten ist es nun möglich, die beobachteten Gesetzmäßigkeiten in ihren wesentlichen Zügen zu erklären. Nimmt man zur ersten, orientierenden Übersicht an, die Feldverteilung im stationären Zustande des nicht bestrahlten Isolators sei gegeben durch Doppelschichten von dem Moment σ an den Elektroden und durch einen homogenen Teil zwischen den beiden Doppelschichten, so wird man folgern müssen, daß σ sowohl der Potentialdifferenz an den beiden Elektroden, wie dem Elektrodenabstand proportional ist, weil sonst nicht der experimentelle Befund zu erklären wäre, daß die Eigenleitfähigkeit des Isolators dem Ohmschen Gesetz gehorcht. (σ braucht übrigens nicht an beiden Elektroden gleich zu sein, und ist es sicher nicht in den Fällen, in denen unipolare Leitfähigkeit beobachtet wurde.) Macht man nun weiter die plausible Annahme, daß die Strahlung das Moment der Doppelschichten um einen Betrag heruntersetzt, welcher sowohl der Intensität der Strahlung, wie dem Moment der Doppelschicht proportional ist, so ergibt sich die experimentell gefundene Beziehung, daß der hinzukommende

„Leitungsstrom" dem Potential, dem Plattenabstand und der Intensität der Strahlung proportional ist. — Diese Überlegung will natürlich nicht mehr sein, als eine erste rohe Annäherung.

Wichtiger ist, daß sich aus der hier aufgestellten Hypothese über den Mechanismus der Stromleitung Folgerungen ziehen lassen, welche experimentell geprüft werden können. Da nämlich die hier zur Erklärung herangezogene „Aufladung" endliche Zeit erfordert, so wird man schließen müssen, daß auch die Ausbildung des stationären Zustandes vom Moment der Bestrahlung an endliche, und zwar meßbare Zeit erfordert; in den ersten Momenten nach der Bestrahlung wird ein Teil der neu hinzukommenden Ionisation zur teilweisen Zerstörung der freien Ladungen an den Elektroden aufgebraucht werden, und der maximale Betrag kann erst zur Geltung kommen, wenn der neue stationäre Zustand erreicht ist. Man wird also ein Ansteigen der Leitfähigkeit unmittelbar nach Beginn der Bestrahlung erwarten. Umgekehrt befindet sich das Dielektrikum nach Aufhören der Bestrahlung nicht mehr im Zustande vollständiger Aufladung, seine Leitfähigkeit wird zunächst zu groß sein, und erst langsam den Minimalwert wieder annehmen.

Beide Erscheinungen ließen sich nun in der Tat nachweisen. Bei den oben beschriebenen Messungen hatten sie sich allerdings niemals störend bemerkbar gemacht; aber es ließ sich vermuten, daß bei den großen Werten der Feldstärke und den kleinen Plattenabständen, welche zur Anwendung kamen, die fragliche Wirkung in so kurzen Zeiten vorüber ist, daß sie sich der Wahrnehmung entzieht. Bei einem Plattenabstand von 9 mm war der Effekt jedoch schon deutlich wahrnehmbar, und zwar auch bei Feldstärken von über 1000 Volt/cm und auch bei solchen Proben von Petroläther, die im Zustande gesättigter Aufladung keine merkliche Leitfähigkeit besaßen. Besonders deutlich war die Erscheinung bei einem Zylinderkondensator, bei dem der innere Zylinder ein Draht von 1 mm Durchmesser und der äußere 40 mm weit war; in diesem Kondensator dauerte auch die anfängliche Aufladung der Dielektrika entsprechend länger als in dem Plattenkondensator. Je ein Versuch bei 400 Volt Potentialdifferenz mit jeder der vier

untersuchten Flüssigkeiten ist in folgendem Diagramm wiedergegeben. (Fig. 3.)

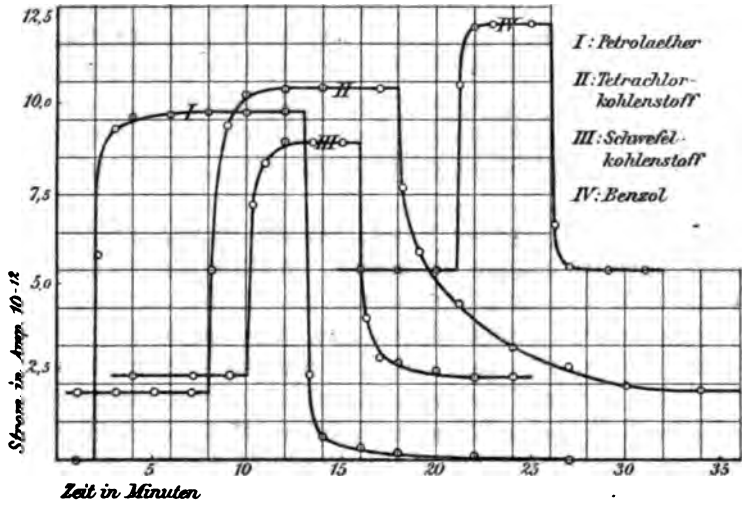


Fig. 3.

Man sieht, daß in allen Fällen der Gleichgewichtszustand nach Hinzubringen der Strahlungsquelle schneller erreicht wird, als nach Entfernen derselben. Das ist auch vorauszusehen, weil im ersteren Falle hauptsächlich die schneller beweglichen „Strahlungsionen", im letzteren Falle nur die langsameren „Leitungsionen" in Betracht kommen. Außerdem sind die Zeiten, die bis zur Erreichung des stationären Zustandes vergehen, bei den verschiedenen Substanzen beträchtlich verschieden, z. B. beim Tetrachlorkohlenstoff viel größer als beim Benzol. Beim Benzol sind sie am kürzesten; vielleicht läßt sich das so deuten, daß die Feldverteilung im nicht bestrahlten Benzol der Homogenität am nächsten kommt; in Übereinstimmung mit dieser Auffassung ist die relative Sättigung beim Benzol am größten. Eine der hier beschriebenen analoge Erscheinung ist von Becker[1]) und Becquerel[2]) bei der Einwirkung von Radium auf feste Dielektrika, insbesondere Paraffin,

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 12. p. 124. 1903.
2) H. Becquerel, Compt. rend. 136. p. 1173. 1903.

beobachtet worden. Beide Autoren sehen als den Grund d Erscheinung die langsame Beweglichkeit der vom Radium e zeugten Ionen an; inwieweit diese Erklärung für feste Diele trika zutrifft, kann hier nicht untersucht werden; für d Fall der Flüssigkeiten dürfte sie nicht genügen, weil hier das Andauern der zu großen Leitfähigkeit nach der B strahlung, auch für solche Potentialwerte noch beobacht werden kann, welche hinreichen, um den „Ionisationsstrom zu sättigen.

Es gibt ein zweites Mittel, um die Richtigkeit der hi aufgestellten Hypothese zu prüfen: nämlich den Einfluß d Temperatur. Handelt es sich um ein reines Strahlungsphänome so ist dieselbe Unabhängigkeit von der Temperatur zu e warten, welche für Gase zutrifft. Spielen dagegen, wie d hier behauptet wird, elektrolytische Ionen eine nicht nebe sächliche Rolle beim Stromtransport, so dürfte auch ein Ei fluß der Temperatur auf die beobachtete Leitfähigkeit kor statierbar sein.

Die Ergebnisse einiger Temperaturversuche sind in d folgenden Tab. X zusammengestellt.

Tabelle X.

Petroläther.

Elektrodenabstand: 2 mm.

Temperatur	a	$c \times 10^4$	$r.10^4 = \frac{c}{a} 10^4$
0°	1,69	1,54	0,912
20°	2,06	1:48	0,712
30°	2,28	1,22	0,548
40°	2,45	1,11	0,453

Zu diesen Versuchen wurde ein Kondensator mit vertik gestellten Platten von 2 mm Abstand benutzt; die isolierte mit Schutzring versehene Elektrode hatte 40 mm Durchmesse und der Kondensator war in einen Thermostaten eingebau Die Eigenleitfähigkeit des zur Verwendung gelangenden Petrol äthers war bei allen Temperaturen zu vernachlässigen. Di

Konstanten a, c und r sind in derselben Weise aus den Versuchen abgeleitet und in denselben Einheiten gegeben, wie bei den früher mitgeteilten Versuchen. Es ergibt sich nun eine beträchtliche Veränderlichkeit sämtlicher Konstanten mit der Temperatur.

Aus der Veränderlichkeit von a folgt zunächst, daß es sich hier nicht um einen Sättigungsstrom handeln kann, wie er von der Elektrizitätsleitung in Gasen her bekannt ist. Dieses Resultat erscheint nicht verwunderlich, wenn man von der oben gemachten Annahme ausgeht, daß zweierlei Träger für den Elektrizitätstransport in Betracht kommen. Danach ist a der maximale Betrag der durch Strahlung erzeugten Ionen, welcher *auf Grund einer anderweitig bestehenden Feldverteilung* zu den Elektroden gelangen kann, a hängt also nicht nur von der Zahl der durch Strahlung erzeugten Ionen ab, sondern auch von Zahl und Beweglichkeit der anderweitig bestehenden Ionen, also von der Temperatur, wenn letztere elektrolytischer Art sind. Man kann das auch so ausdrücken: der von den „Strahlungsionen" herrührende Stromanteil ist oberhalb eines gewissen Feldwertes insofern gesättigt, als kein Verlust von Strahlungsionen durch Wiedervereinigung untereinander stattfindet, aber eine Vereinigung der Strahlungsionen mit den Ionen zweiter Art läßt sich durch keinen Feldwert verhindern.

Aus der Tab. X ergibt sich ferner, daß sich die Konstanten a und c in entgegengesetztem Sinne verändern. Auch dieses Resultat war auf Grund der skizzierten Hypothese vorauszusehen. Je mehr von den Strahlungsionen dazu verbraucht werden, die von den elektrolytischen Ionen gebildeten freien Ladungen zu neutralisieren („den Elektrolyten zu depolarisieren"), desto größer ist der scheinbar erzeugte Leitungsstrom c und desto kleiner die Konstante a. Je homogener also die Feldverteilung im nicht bestrahlten Isolator für eine bestimmte Temperatur ist, desto größer wird a, und desto kleiner wird c ausfallen.

Nach allem scheint die aufgestellte Hypothese geeignet, die beobachteten Erscheinungen zu erklären, doch wäre es verfrüht, dieselbe rechnerisch in Einzelheiten zu verfolgen (so weit die Kompliziertheit des Problems das überhaupt zuläßt),

bevor nicht durch Messung des Potentialabfalles zwischen den Elektroden und womöglich der Ionenbeweglichkeiten eine zuverlässige Grundlage gewonnen ist.

Die beschriebenen Versuche wurden im theoretisch-physikalischen Institut der Universität Leipzig ausgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Des Coudres für die Förderung zu danken, die er der Untersuchung in jeder Beziehung zuteil werden ließ.

Leipzig, Dezember 1907.

(Eingegangen 24. Dezember 1907).

6. *Über den Austritt negativer Ionen aus einigen glühenden Metallen und aus glühendem Calciumoxyd*[1]; *von Fritz Deininger.*

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Erlangen.)

Einleitung.

Auf die Eigenschaft *glühender Metalle*, die Luft ihrer Umgebung zum Leiter der Elektrizität zu machen, ist man schon vor etwa zweihundert Jahren aufmerksam geworden.[2]) Die damals beobachteten Erscheinungen waren jedoch viel zu kompliziert, als daß ihre Ursachen ohne weiteres hätten erkannt werden können. Bei den in neuerer Zeit angestellten Untersuchungen ist der komplizierende Einfluß des umgebenden Gases beseitigt. Der (galvanisch) geglühte Draht und das elektrische Feld befinden sich im Vakuum. Die unter diesen Umständen eintretenden Vorgänge lassen sich an der Hand der Elektronentheorie erklären. Man macht die grundlegende Annahme, daß die hohe Temperatur des Drahtes irgendwie Anlaß gibt zur Entstehung von negativen Elektronen.[3]) Ein Teil derselben wird durch das elektrische Feld vom Drahte fort zur positiven Elektrode hin bewegt und vermittelt so die Strömung durch das Vakuum. Bei gesteigerter Feldstärke wächst auch die Anzahl der in der Sekunde fortgeführten

1) Auszug aus einer Erlanger Inaugural-Dissertation. *Die Ausführung der folgenden Versuche wurde wesentlich dadurch erleichtert, daß Hrn. Prof. Dr. E. Wiedemann zur Untersuchung der Erscheinungen in heißen Gasen in dankenswerter Weise von dem Elisabeth Thompson Fund Mittel zur Verfügung gestellt wurden; aus ihnen wurden einige der benutzten Apparate angeschafft.*

2) Historische Übersicht in G. Wiedemann, Lehre von der Elektrizität 4. p. 864 ff. 1885 und in J. J. Thomson, Conduction of Electricity through Gases p. 155.

3) Bestimmung von e/μ für negative Ionen aus glühender Kohle. J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) 48. p. 547. 1899.

Elektronen und wird schließlich so groß wie die Anzahl der in der gleichen Zeit entstehenden negativen Ionen. In diesem Falle ist das Stadium des Sättigungsstromes erreicht. Den Zusammenhang zwischen Sättigungsstrom und Temperatur leitet O. W. Richardson[1]) aus zwei weiteren Annahmen ab: 1. Im Metall sind negative Elektronen vorhanden, welche sich darin wie Molekule eines idealen Gases verhalten. 2. An der Oberfläche des Metalles herrscht ein Potentialsprung, welcher die Elektronen am Entweichen aus dem Metall hindert. Bei der absoluten Temperatur Θ mögen pro Sekunde N_Θ Elektronen durch die Oberflächeneinheit des Drahtes treten. Die Dichte des Sättigungsstromes ist dann bei der genannten Temperatur in elektrostatischem Maße

$$C_\Theta = \varepsilon . N_\Theta . \tag{1}$$

Dabei bedeutet ε die Ladung eines Elektrons in elektrostatischen Einheiten. Um den Zusammenhang zwischen Drahttemperatur und Sättigungsstrom zu erhalten, stellt man N_Θ als Funktion von Θ mittels des Maxwell-Boltzmannschen Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes dar. Die Gesamtzahl der im Einheitsvolumen des Metalles vorhandenen Elektronen sei gleich n, die Geschwindigkeitskomponenten seien u, v und w, von denen u zur Metalloberfläche senkrecht sei. Dann ist die Anzahl $N_{(u,v,w)}$ derjenigen Elektronen im Einheitsvolumen, deren Geschwindigkeitskomponenten zwischen u und $u + du$, v und $v + dv$, w und $w + dw$ liegen,

$$N_{(u,v,w)} = n \left(\frac{m}{2\pi R \Theta}\right)^{3/2} . e^{-\frac{m}{2R\Theta}(u^2+v^2+w^2)} . du . dv . dw .$$

R bedeutet hierin die Gaskonstante für ein Elektron und m dessen Masse. Von diesen Elektronen treffen in der Sekunde $u . N_{(u,v,w)}$ auf die Oberflächeneinheit des Metalles; jedoch können nach der zweiten Annahme nur diejenigen Elektronen durch die Metalloberfläche treten, deren Bewegungsenergie in der Richtung von u größer ist als ein bestimmter Wert Φ; d. h. es muß

$$\frac{m u^2}{2} > \Phi \quad \text{oder} \quad u > \sqrt{\frac{2\Phi}{m}}$$

1) O. W. Richardson, Proc. Cambr. Phil. Soc. 11. p. 286. 1901.

sein. Somit ergibt die Summation für N_Θ den Ausdruck:

$$(2)\quad N_\Theta = \int_{\sqrt{\frac{2\Phi}{m}}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot n \left(\frac{m}{2\pi R\Theta}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m}{2R\Theta}(u^2+v^2+w^2)} \cdot du\,dv\,dw.$$

Aus (1) und (2) ergibt sich für den Zusammenhang zwischen C_Θ und Θ die Gleichung

$$(3)\quad C_\Theta = s \cdot n \sqrt{\frac{R\Theta}{2m\pi}} \cdot e^{-\Phi/R\Theta} = A \cdot \sqrt{\Theta} \cdot e^{-B/\Theta}.$$

A und B sind konstante Größen. Um zu prüfen, ob experimentell gefundene Werte von C_Θ und Θ die Gleichung (3) befriedigen, hat Richardson dieselbe logarithmiert und so eine Geichung von der Form

$$(4)\quad y = a - bx$$

erhalten, worin $y = \log C_\Theta - {}^1/_2 \log \Theta$; $x = 1/\Theta$; $a = \log A$ und $b = B \log e$ ist. Die aus C_Θ und Θ berechneten Werte von x und y müssen nach Richardsons Theorie im Diagramm auf einer Geraden liegen. Richardson fand die aus seinen Voraussetzungen erhaltenen Folgerungen zunächst durch Experimente an glühendem Platin bestätigt. Weiter beobachtete er bei der Untersuchung von glühender Kohle[1]) dieselben charakteristischen Erscheinungen wie bei glühendem Platin. Doch war die Emission aus Kohle bedeutend stärker als bei jenem Metall.

A. Wehnelt[2]) hat gezeigt, daß Platindraht, der auf seiner Oberfläche gewisse *Metalloxyde* trägt, in glühendem Zustand viel mehr Elektronen aussendet als reines Platin und als reine Kohle. Um den Einfluß verschiedener Metalloxyde auf die Ionenbildung qualitativ zu untersuchen, trug er sie auf Platinkathoden auf und beurteilte nach der Erniedrigung des Kathodenfalles, die beim Glühen der einzelnen Kathoden eintrat, die Wirksamkeit der Metalloxyde. Als besonders wirksam erwiesen sich die Oxyde der Erdalkalimetalle Barium, Strontium und Calcium. Die Richardsonsche Formel wurde durch Wehnelts Untersuchung auch für oxydbedecktes Platin be-

1) O. W. Richardson, Phil. Trans. 201. p. 518—532. 1903.
2) A. Wehnelt, Ann. d. Phys. 14. p. 425. 1904.

stätigt. Diese Versuchsergebnisse haben Wehnelt veranlaßt, die Fähigkeit zur Aussendung negativer Ionen allein den wirksamen Metalloxyden zuzuschreiben. Die bei glühendem Platin und bei glühender Kohle auftretenden Erscheinungen würden nach Wehnelt auf noch vorhandene Verunreinigungen durch solche Oxyde zurückzuführen sein. Im Gegensatz hierzu ist nach Richardson die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß die negativen Ionen aus dem Metall selbst stammen, und daß auf dessen Oberfläche vorhandenes wirksames Metalloxyd lediglich modifizierend auf das Austreten der negativen Ionen wirkt, insofern als es die oben mit Φ bezeichnete Arbeit herabsetzt, welche ein Elektron beim Verlassen des Metalles leistet. Zur Entscheidung dieser Frage habe ich verschiedene Metalle, die in reinem Zustand bezüglich ihrer Emissionsfähigkeit sich beträchtlich unterscheiden, mit ein und demselben wirksamen Oxyd bedeckt und untersucht und zwar Platin, Kohle, Tantal und Nickel sowohl bei fehlender als auch bei vorhandener Bedeckung mit Calciumoxyd.

Versuchsanordnung.

Die Anordnung des benutzten Rohres zeigt Fig. 1. Der Versuchsdraht *D* ist längs der Rohrachse angebracht und, um ihn leicht auswechseln zu können, durch Schrauben in den Klemmen *K*, *K* an den stromzuführenden Drähten *Z*, *Z* befestigt. Letztere bestehen aus je einer Anzahl von dünnen Kupferdrähten und werden durch je eine Glasröhre isoliert und versteift. Zur Messung der Temperatur des Drahtes sind in dessen Mitte die beiden (0,025 mm dicken) Drähte Pt und Pt-Rh eines Thermoelementes angelötet und führen, durch Glasröhren isoliert und gehalten, in der durch die Figur angegebenen Weise nach außen. Durch vier Doppellötungen und ebenso viele Einschmelzstellen ist das System, das Draht und Thermoelement enthält, im unteren Teil des Rohres befestigt. Im oberen Teil desselben ist koaxial zum Draht der Messingzylinder *C* (3 cm Durchmesser) an einem in ihn seitlich eingeschraubten starken Draht *M* angebracht. Ein großer Schliff *S* sowie ein Längsspalt *N* am Messingzylinder ermöglichen es den unteren Teil des Rohres aus dem oberen und aus dem Messingzylinder herauszunehmen, wenn das Answechseln der Drähte,

das Bestreichen derselben mit Calciumnitrat (vgl. unten) oder das Anlöten des Thermoelementes nötig ist. Mit der Zeit der Benutzung des Rohres verliert die dem Spalt *N* gegenüberliegende Rohrwand infolge der Metallzerstäubung des Drahtes an Durchsichtigkeit und erschwert die Beobachtung des letzteren. Da in weiterer Entfernung vom Draht das Glas von niedergeschlagenem Metall frei bleibt, ist an entsprechender Stelle ein Tubus angeblasen mit einem kleineren Rohr *T*, dessen Achse dem Draht parallel ist. Auf diese Weise ist das An-

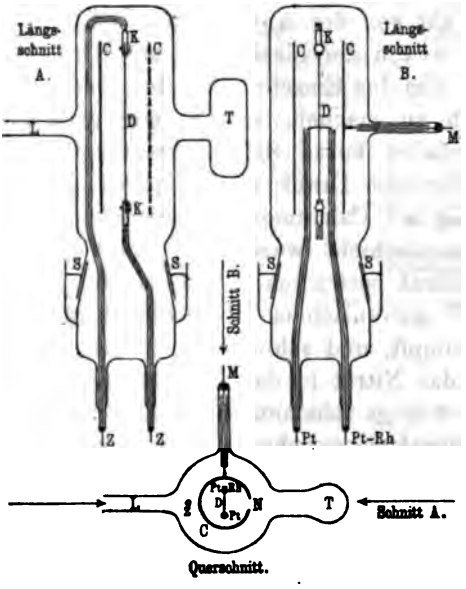


Fig. 1.

setzen eines Tubus mit aufgekitteter planparalleler Glasplatte umgangen. Überhaupt wurde das Kitten mit Siegellack oder Wasserglas völlig vermieden. Die Stromzuführung wurde durch eingeschmolzene Platindrähte vermittelt. Der Schliff *S* war durch Quecksilber gedichtet. Das Evakuieren des Rohres erfolgte durch eine ausschließlich mit Quecksilberabschlüssen versehene Sprengelsche *Falluftpumpe*. Alle Verbindungsröhren waren möglichst kurz und weit. Der Druck wurde durch ein Mac Leod-Manometer gemessen. Nach dem Aus-

pumpen wurde der Draht längere Zeit bei gleichzeitig arbeitender Pumpe geglüht; es wurde schließlich erreicht, daß während der Versuche der Druck im Rohre unterhalb 0,001 mm gehalten werden konnte.

Die Dimensionen der untersuchten Drähte waren nur wenig verschieden (Platin 0,23 mm, Kohle 0,27 mm, Tantal und Nickel 0,25 mm Drahtdurchmesser; Länge der Drähte 9,5 cm, bei Kohle nur 9 cm). Aus den beobachteten Stromstärken wurden diejenigen für 1 qcm berechnet. Den Platin- und Nickeldraht erhielt ich von der Firma Heraeus in Hanau, den Tantaldraht von der A.-G. Siemens & Halske in Berlin, die Kohlefäden von der hiesigen Firma Reiniger, Gebbert und Schall. Um das Einschrauben der Kohle in die Klemmen K, K möglich zu machen, wurden an den Enden von 9 cm langen Kohlefäden kurze Stücke Eisendraht hart angelötet. Je ein und derselbe Draht wurde zuerst ohne und darnach bei Bedeckung mit Calciumoxyd untersucht. Zur Herstellung der Calciumoxydschicht wurde der Draht mit einer Lösung von Calciumnitrat bestrichen, dann das Lösungswasser durch mäßiges, auf galvanischem Weg bewirktes Erwärmen des Drahtes verdampft, und schließlich im Vakuum durch Glühen des Drahtes das Nitrat in das Oxyd übergeführt.

Die Fig. 2 zeigt schematisch die Anordnung der Versuchsschaltung. Die Heizvorrichtung wird durch den mit I. bezeichneten Teil der Figur dargestellt. Das Glühen des Drahtes erfolgte, um störenden Zweigstrom durch das Thermoelement zu vermeiden, durch Wechselstrom. Die sekundäre Spule des benutzten Transformators war gut isoliert. Die Vorrichtung zur Herstellung des elektrischen Feldes gibt Teil II der Figur. Strom aus der Erlanger Zentrale (positiver Pol auf + 220 Volt) geht durch den Wasserwiderstand W zur Erde. Im Wasser des Widerstandes ist durch eine Zugvorrichtung die Sonde S_1 verschiebbar, wodurch das Potential des Messingzylinders C zwischen 0 und + 220 Volt variiert werden kann, ohne daß dabei sprungweise Änderungen erfolgen.[1]) Der Draht D ist geerdet. Ein Präzisionsvoltmeter V zeigt die Potentialdifferenz zwischen C und D an. Zur Messung der Strömung

1) A. Wehnelt, l. c. p. 441.

zwischen C und D dient der in Fig. 2 durch Teil III dargestellte Apparat. Derselbe ist gut isoliert aufgestellt. Der Meßbereich der Vorrichtung hat eine sehr große Ausdehnung infolge der in weiten Grenzen regulierbaren Wider-

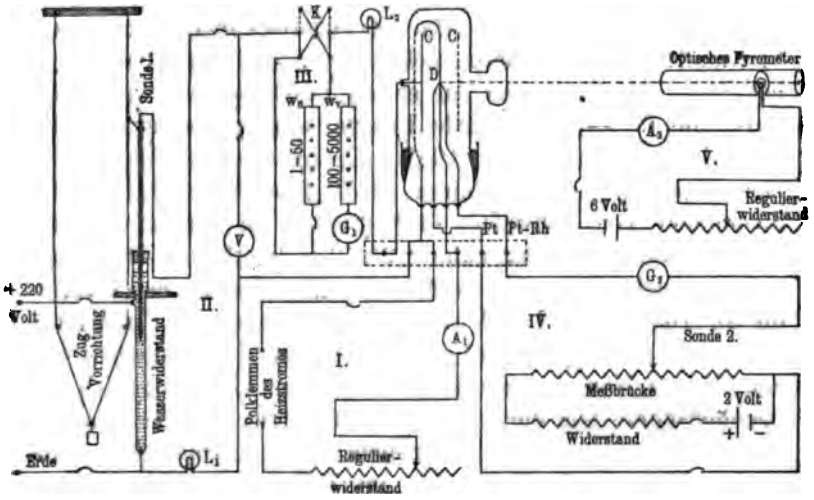


Fig. 2.

stände w_v und w_a, die dem Galvanometer G_1 (Empfindlichkeit rund $3{,}5 \cdot 10^{-8}$ Amp.) vor bzw. parallel geschaltet sind. Durch den Kommutator K kann zur Erzielung einer genauen Ablesung die Richtung des durch G_1 gehenden Stromes umgekehrt werden.

Die Temperaturmessung wurde bei den endgültigen Versuchen mit einem Thermoelement aus Platin und Platin-Rhodium (10 Proz.) von 0,025 mm Drahtdurchmesser ausgeführt. Es gelang die Drahttemperaturen in den (acht) definitiven Versuchen mit einem und demselben Thermoelement zu messen. Das Anlöten desselben an den Draht D geschah nicht im Knallgasgebläse (— die Methode hätte beim Anlöten an Nickel, Kohle und Tantal versagt —) sondern in folgender Weise: Die beiden Drähte des Thermoelementes wurden zunächst möglichst nahe aneinander in der Mitte des Versuchsdrahtes irgendwie befestigt. Dann wurde ein kleiner Tropfen Platinchloridlösung an die betreffende Stelle gebracht, durch

mäßiges Erwärmen mittels elektrischen Stromes das Lösungswasser verdampft und schließlich im evakuierten Rohr durch Glühen des Drahtes das Platinchlorid in Platin übergeführt. Es gelang dies schon bei einer Drahttemperatur von 1200°, so daß das Verfahren auch beim Löten an Nickeldraht angewendet werden konnte. Um das Thermoelement zu eichen, bestimmte ich seine thermoelektromotorische Kraft bei einigen bekannten Temperaturen der ersten Lötstelle (— zweite Lötstelle auf 0° —). Als feste Punkte wurden benutzt 1. der Schmelzpunkt von Gold, 1063° (Drahtstückmethode); 2. der Schmelzpunkt von Aluminium, 657° (Tiegelmethode); 3. der Siedepunkt von Schwefel, 444° (Sieden im Kolben); 4. der Schmelzpunkt von Zink, nahe 412° (Tiegelmethode). Die beobachteten elektromotorischen Kräfte verglich ich mit den Werten, die L. Holborn und S. Valentier[1]) bei denselben Fixpunkten für Pt und Pt-Rh (10 Proz.) gefunden haben. Die Abweichungen von diesem Normalelement waren so sehr klein, daß ich die Eichungskurve aus der zitierten Abhandlung für das von mir benutzte Thermoelement verwendete. Die thermoelektromotorische Kraft wurde durch den im Teil IV der Fig. 2 dargestellten Apparat kompensiert. Die Vorrichtung war gut isoliert aufgestellt. Die Temperaturangaben, die ich bei kontrollierenden Versuchen durch ein optisches Pyrometer[2]) (Teil V der Fig. 2) erhielt, stimmten gut mit den durch Vorrichtung IV sich ergebenden Werten überein.

Die Versuche.

Die Versuche geben den Zusammenhang zwischen Spannung V und Stromstärke J sowie die Abhängigkeit der Sättigungsstromdichte A von der Drahttemperatur t, und zwar für Platin, Kohle, Tantal und Nickel bei fehlender und bei vorhandener Bedeckung mit Calciumoxyd. Die Daten für die mit Calciumoxyd bedeckten Drähte dürften von wesentlichen Fehlern frei sein. Dadurch, daß in diesen Versuchen nicht sehr hohe

1) L. Holborn und S. Valentier, Ann. d. Phys. 22. p. 27. 1907.
2) L. Holborn und F. Kurlbaum, Ann. d. Phys. 11. p. 225. 1903.

Drahttemperaturen zur Anwendung kamen (nur bis 1200° C.), wurde der störende Einfluß der Metallzerstäubung ausgeschaltet. Die vier Versuche wurden unter fast gleichen Versuchsbedingungen durchgeführt. Die chemische Reduktion des glühenden Calciumoxydes durch Kohlenwasserstoffe wurde verhindert, indem Fettschliffe und Siegellackkittungen vermieden wurden. Für nicht mit Calciumoxyd bedecktes Platin sind die angegebenen Werte vielleicht etwas zu groß, da in diesem Fall bei den hohen Drahttemperaturen (bis 1520°) besonders starke Zerstäubung wahrgenommen wurde. Bei Tantal ohne Calciumoxyd wurde eine sehr starke Abnahme der Temperatur von der Mitte des Drahtes nach seinen Enden hin an der verschiedenen Helligkeit der betreffenden Stellen bemerkt. Die Daten für die Sättigungsströme dürften daher im genannten Fall etwas zu klein sein. Bei Nickel ohne Calciumoxyd erhielt ich bis zu der höchsten angewandten Drahttemperatur, 1310° C., keinen Strom durch das Galvanometer angezeigt, d. h. es war J kleiner als 10^{-8} Amp. Dabei betrug die Spannung zwischen C und D (Fig. 2) bis zu 220 Volt.[1]) In den folgenden Tabellen sind die Versuchsdaten enthalten.

Tabb. 1—7 geben den Zusammenhang zwischen Spannung V und Strom J.

Tabelle 1.

Platin ohne CaO. $t = 1483°$ C.

V (Volt)	J (10^{-8} Amp.)	V (Volt)	J (10^{-8} Amp.)
150	193,4	15	193,4
120	193,4	10	162,6
90	193,4	8	130,1
60	193,4	5	68,4
40	193,4	2	24,0
30	193,4	0	0,0
20	193,4		

1) In einigen Vorversuchen erhielt ich bei durchschmelzenden Nickeldrähten momentan beträchtlichere Ströme (nahe $5 \cdot 10^{-7}$ Amp.).

Tabelle 2.

Platin mit CaO. $t = 908°$ C.

V (Volt)	J (10^{-6} Amp.)	V (Volt)	J (10^{-6} Amp.)
120	87,8	30	87,8
110	89,0	25	85,6
100	89,0	20	84,5
90	89,0	15	82,9
80	87,8	10	73,6
70	87,3	8	70,0
60	89,0	5	40,1
50	89,0	2	5,1
40	90,7	0	0,0

Tabelle 3.

Kohle ohne CaO. $t = 1294°$ C.

V (Volt)	J (10^{-6} Amp.)	V (Volt)	J (10^{-6} Amp.)
180	208,1	40	209,0
140	208,1	30	208,1
130	208,1	25	206,2
120	208,1	20	202,6
110	208,1	15	186,2
100	204,4	12	167,9
90	204,4	10	122,8
80	208,1	5	54,7
70	211,7	3	23,7
60	209,0	0	0,0
50	209,0		

Tabelle 4.

Kohle mit CaO. $t = 912°$ C.

V (Volt)	J (10^{-6} Amp.)	V (Volt)	J (10^{-6} Amp.)
120	136,9	35	118,7
110	142,3	30	116,8
100	124,1	25	116,8
90	120,4	20	115,0
80	118,7	15	115,0
70	116,8	10	105,9
60	116,8	5	80,3
50	118,7	2	10,9
40	116,8	0	0,0

Tabelle 5.

Tantal ohne CaO. $t = 1422°$ C.

V (Volt)	J (10^{-8} Amp)	V (Volt)	J (10^{-8} Amp)
140	97,5	20	94,1
100	97,5	15	92,4
70	97,5	10	78,7
50	97,5	8	61,6
40	97,5	5	51,3
30	97,5	2	8,6
25	95,8	0	0,0

Tabelle 6.

Tantal mit CaO. $t = 907°$ C.

V (Volt)	J (10^{-8} Amp.)	V (Volt)	J (10^{-8} Amp.)
100	111,2	20	110,4
90	111,2	18	108,7
80	110,4	15	104,4
70	111,2	12	99,3
60	112,1	10	91,6
50	111,2	8	83,0
40	111,2	5	54,8
30	111,2	2	21,4
25	111,2	0	0,9

Tabelle 7.

Nickel mit CaO. $t = 908°$ C.

V (Volt)	J (10^{-8} Amp.)	V (Volt)	J (10^{-8} Amp.)
120	85,6	20	85,6
90	85,6	15	80,4
70	85,6	10	73,6
50	85,6	8	61,6
40	85,6	5	46,2
30	85,6	2	20,5
25	85,6	0	0,0

Die Tabb. 8—14 geben den Zusammenhang zwischen Drahttemperatur (t, absolut $= \Theta$) und Sättigungsstromdichte (Δ, elektrostatisch $= C$). Die beiden letzten Kolumnen dieser

Tabellen enthalten die Werte $x = 10^4/\Theta$ und $y = \log C - {}^1/_2 \log \Theta$, welche nach Richardson zur Prüfung der erwähnten Beziehung dienen.

Tabelle 8.

Platin ohne CaO.

t (C.)	Δ (10^{-8} Amp.)	x	y	t (C.)	Δ (10^{-8} Amp.)	x	y
1519	486,0	5,58	2,54	1406	42,4	5,95	1,49
1508	428,3	5,61	2,48	1396	32,4	5,99	1,38
1498	360,7	5,65	2,41	1386	24,9	6,03	1,26
1487	297,9	5,68	2,33	1376	18,7	6,06	1,14
1477	248,1	5,71	2,24	1366	15,0	6,10	1,04
1467	180,3	5,75	2,11	1356	12,5	6,14	0,97
1456	129,7	5,78	1,97	1345	9,2	6,18	0,84
1446	104,7	5,82	1,88	1335	8,0	6,22	0,78
1436	81,0	5,85	1,77	1325	6,5	6,26	0,69
1426	64,8	5,89	1,67	1314	5,2	6,30	0,60
1416	49,4	5,92	1,56	1304	4,2	6,34	0,50

Tabelle 9.

Platin mit CaO.

t (C.)	Δ (10^{-8} Amp.)	x	y	t (C.)	Δ (10^{-8} Amp.)	x	y
1198	192000,0	6,80	5,18	990	1320,0	7,92	3,05
1187	157000,0	6,85	5,09	979	941,0	7,99	2,90
1176	121000,0	6,90	4,98	968	674,0	8,06	2,76
1165	98700,0	6,95	4,89	957	502,0	8,13	2,63
1154	77200,0	7,01	4,79	946	345,0	8,20	2,47
1143	60700,0	7,06	4,68	935	259,0	8,28	2,35
1132	45500,0	7,12	4,56	924	189,0	8,35	2 22
1121	35400,0	7,17	4,45	912	135,0	8,44	2,07
1111	29100,0	7,23	4,37	901	94,7	8,52	1,92
1100	21900,0	7,28	4,25	890	69,8	8,60	1,79
1089	16800,0	7,34	4,14	879	44,9	8,68	1,60
1078	13300,0	7,40	4,03	867	29,9	8,77	1,42
1067	9690,0	7,46	3,90	855	19,9	8,86	1,25
1056	7400,0	7,52	3,78	844	12,5	8,95	1,05
1045	5610,0	7,59	3,67	832	9,0	9,05	0,91
1033	4200,0	7,66	3,54	821	5,0	9,14	0,66
1022	3230,0	7,72	3,43	809	3,5	9,24	0,50
1011	2260,0	7,79	3,28	798	2,5	9,34	0,36
1001	1820,0	7,85	3,18	785	1,5	9,45	0,14

Tabelle 10.

Kohle ohne CaO.

t (C.)	Δ (10^{-8} Amp.)	x	y	t (C.)	Δ (10^{-8} Amp.)	x	y
1467	9940,0	5,75	3,85	1336	674,0	6,21	2,70
1460	8930,0	5,77	3,81	1332	621,0	6,23	2,67
1454	7760,0	5,79	3,75	1326	550,0	6,25	2,62
1445	6570,0	5,82	3,68	1319	468,0	6,28	2,55
1433	5080,0	5,86	3,57	1312	398,0	6,31	2,48
1424	4120,0	5,89	3,48	1304	334,0	6,34	2,40
1406	2950,0	5,95	3,34	1291	246,0	6,39	2,27
1390	2130,0	6,01	3,19	1280	193,0	6,44	2,17
1349	922,0	6,16	2,84	1265	134,0	6,50	2,01
1338	710,0	6,21	2,72	1250	95,1	6,57	1,86
1323	507,0	6,27	2,58	1224	51,6	6,68	1,60
1302	328,0	6,35	2,39	1202	31,1	6,78	1,39
1274	173,0	6,46	2,12	1175	16,3	6,91	1,11
1338	707,0	6,21	2,72	1148	8,6	7,04	0,84

Tabelle 11.

Kohle mit CaO.

t (C.)	Δ (10^{-8} Amp.)	x	y	t (C.)	Δ (10^{-8} Amp.)	x	y
1184	239000,0	6,86	5,27	978	1070,0	7,99	2,96
1174	166000,0	6,91	5,12	967	790,0	8,06	2,83
1164	125000,0	6,96	4,99	956	537,0	8,14	2,66
1153	86100,0	7,01	4,83	945	402,0	8,21	2,54
1143	69100,0	7,06	4,74	934	283,0	8,29	2,39
1132	46100,0	7,12	4,57	923	209,0	8,36	2,26
1121	35200,0	7,17	4,45	912	151,0	8,44	2,12
1110	26800,0	7,23	4,33	901	109,0	8,52	1,98
1099	21100,0	7,29	4,23	890	78,9	8,60	1,84
1088	18400,0	7,35	4,16	878	51,6	8,69	1,66
1077	13700,0	7,41	4,05	866	34,9	8,78	1,49
1066	10500,0	7,47	3,94	856	22,9	8,86	1,31
1055	8190,0	7,53	3,83	844	15,8	8,95	1,15
1044	5990,0	7,59	3,69	832	9,6	9,05	0,94
1033	4510,0	7,66	3,57	820	5,7	9,15	0,72
1022	3580,0	7,72	3,48	809	3,3	9,24	0,48
1011	2760,0	7,79	3,36	798	1,9	9,34	0,24
1000	1940,0	7,86	3,21	787	1,2	9,43	0,04
989	1490,0	7,92	3,10				

Tabelle 12.

Tantal ohne CaO.

1 (C.)	Δ (10^{-6} Amp.)	x	y	1 (C.)	Δ (10^{-6} Amp.)	x	y
1573	1400,0	5,42	2,99	1379	58,8	6,05	1,63
1562	1210,0	5,45	2,93	1369	49,5	6,09	1,56
1552	1070,0	5,48	2,87	1358	42,7	6,13	1,50
1542	932,0	5,51	2,82	1348	38,5	6,17	1,46
1532	828,0	5,54	2,77	1338	33,5	6,21	1,40
1522	721,0	5,57	2,71	1328	29,4	6,25	1,34
1512	615,0	5,60	2,64	1318	26,1	6,28	1,29
1501	519,0	5,64	2,57	1307	20,6	6,33	1,19
1491	446,0	5,67	2,50	1297	17,0	6,37	1,11
1481	361,0	5,70	2,41	1287	14,7	6,41	1,05
1470	306,0	5,74	2,34	1276	11,9	6,45	0,96
1460	260,0	5,77	2,27	1265	9,2	6,50	0,85
1450	213,0	5,80	2,19	1254	7,8	6,55	0,78
1440	187,0	5,84	2,13	1243	6,0	6,60	0,66
1429	149,0	5,87	2,04	1232	4,6	6,64	0,55
1419	124,0	5,91	1,96	1221	3,7	6,69	0,45
1409	105,0	5,95	1,89	1210	3,2	6,74	0,40
1399	88,0	5,98	1,81	1200	2,8	6,79	0,25
1389	70,2	6,02	1,71				

Tabelle 13.

Tantal mit CaO.

1 (C.)	Δ (10^{-6} Amp.)	x	y	1 (C.)	Δ (10^{-6} Amp.)	x	y
1196	154000,0	6,81	5,08	988	1640,0	7,93	3,14
1186	129000,0	6,85	5,00	977	1180,0	8,00	3,00
1175	109000,0	6,91	4,93	966	887,0	8,07	2,88
1164	93700,0	6,96	4,87	955	642,0	8,14	2,74
1153	75700,0	7,01	4,78	944	433,0	8,22	2,57
1141	55900,0	7,07	4,65	932	288,0	8,30	2,40
1130	45400,0	7,13	4,56	921	200,0	8,37	2,24
1120	37800,0	7,18	4,48	910	158,0	8,45	2,14
1110	29700,0	7,23	4,38	900	119,0	8,52	2,02
1099	24600,0	7,29	4,30	888	78,0	8,61	1,84
1088	19000,0	7,35	4,19	876	47,0	8,70	1,62
1077	15400,0	7,41	4,10	864	31,0	8,79	1,44
1066	11600,0	7,47	3,98	853	19,5	8,88	1,24
1055	9030,0	7,53	3,87	842	13,8	8,97	1,09
1044	6690,0	7,59	3,74	831	8,0	9,06	0,86
1032	5510,0	7,66	3,66	820	5,7	9,15	0,72
1020	3970,0	7,73	3,52	808	3,7	9,25	0,52
1009	3000,0	7,80	3,40	796	2,3	9,35	0,32
999	2370,0	7,86	3,30	784	1,4	9,46	0,10

Tabelle 14.

Nickel mit CaO.

t (C.)	$\Delta(10^{-8}$ Amp.)	x	y	t (C.)	$\Delta(10^{-8}$ Amp.)	x	y
1198	157000,0	6,80	5,09	990	1260,0	7,92	3,03
1187	128000,0	6,85	5,00	979	831,0	7,99	2,85
1176	106000,0	6,90	4,92	968	577,0	8,06	2,69
1165	88500,0	6,95	4,84	957	539,0	8,13	2,66
1154	70300,0	7,01	4,75	946	356,0	8,20	2,49
1143	54500,0	7,06	4,64	935	215,0	8,28	2,27
1132	41400,0	7,12	4,52	924	183,0	8,35	2,20
1121	33800,0	7,17	4,43	912	132,0	8,44	2,06
1111	26400,0	7,23	4,33	901	83,5	8,52	1,86
1100	21000,0	7,28	4,23	890	58,7	8,60	1,71
1089	16300,0	7,34	4,12	879	43,6	8,68	1,59
1078	12300,0	7,40	4,00	867	30,3	8,77	1,43
1067	9150,0	7,46	3,87	855	22,9	8,86	1,31
1056	6940,0	7,52	3,76	844	15,1	8,95	1,18
1045	5340,0	7,59	3,64	832	10,1	9,05	0,96
1033	3980,0	7,66	3,52	821	7,3	9,14	0,82
1022	2940,0	7,72	3,39	809	5,0	9,24	0,66
1011	2240,0	7,79	3,27	798	3,2	9,34	0,47
1001	1660,0	7,85	3,14	785	2,3	9,45	0,33

Die folgenden Figg. 3—10 geben die Resultate der vorigen Tabellen graphisch wieder. Den Zusammenhang zwischen Spannung (Abszissen = Volt) und Stromstärke (Ordinaten =

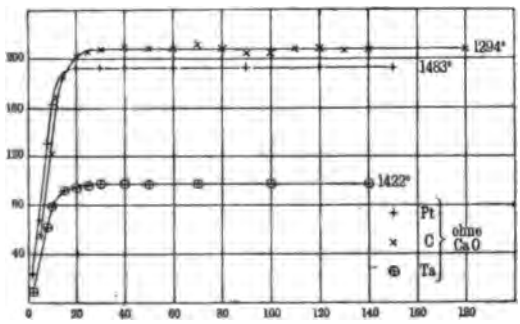


Fig. 3.

10^{-8} Amp.) stellt Fig. 3 für die nicht mit Calciumoxyd bedeckten und Fig. 4 für die mit Calciumoxyd bedeckten Drähte

dar. Die Drahttemperaturen sind in den Figuren bei d
einzelnen Kurven vermerkt. Man ersieht aus den Kurve
daß der Charakter der betrachteten Beziehung in den v

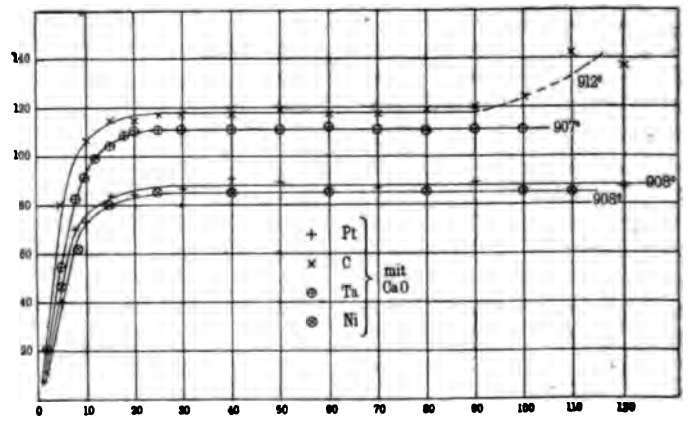


Fig. 4.

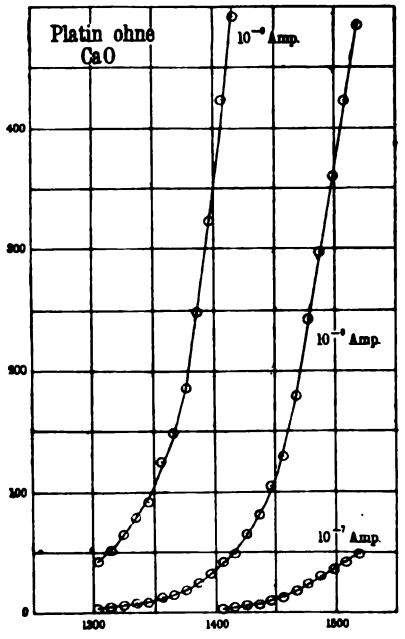


Fig. 5.

schiedenen Versuchen derselbe ist. Die Sättigung des Stromes wird überall zwischen 20 und 25 Volt erreicht.

Die Abhängigkeit des Sättigungsstromes (Ordinaten = Sättigungsstromdichte) von der Drahttemperatur (Abszissen = Temperatur in ° Celsius) wird für die nicht mit Calciumoxyd bedeckten Drähte durch die Figg. 5 (Platin), 6 (Kohle) und 7 (Tantal) dargestellt.

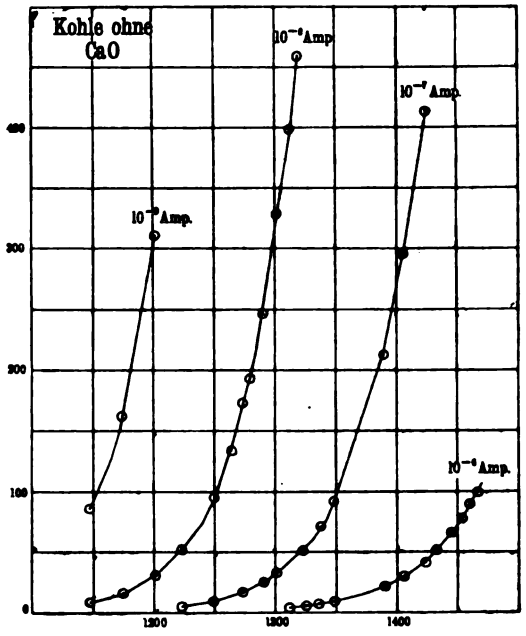


Fig. 6.

Einige diesen Kurven entnommene Werte sind zu besserer Übersicht in der Tab. 15 zusammengestellt. Die Zahlen in der Tabelle bedeuten die Dichte des Sättigungsstromes in 10^{-8} Amp.

Tabelle 15.

Draht-temperatur	Platin ohne CaO	Kohle ohne CaO	Tantal ohne CaO	Nickel ohne CaO
1300°	4	300	20	< 1
1350	11	950	40	?
1400	35	2500	85	?
1450	110	7000	200	50?

Man ersieht aus dieser Tabelle und aus den letzten drei Figg. 5, 6 und 7, daß die Drähte aus verschiedenem Material, auf gleiche Temperatur gebracht, Sättigungsströme von beträchtlich verschiedener Stärke vermitteln. Auch unterscheiden sich die genannten Kurven (in Figg. 5, 6 und 7 in gleichem Maßstabe dargestellt!) durch ihren verschiedenartigen Verlauf.

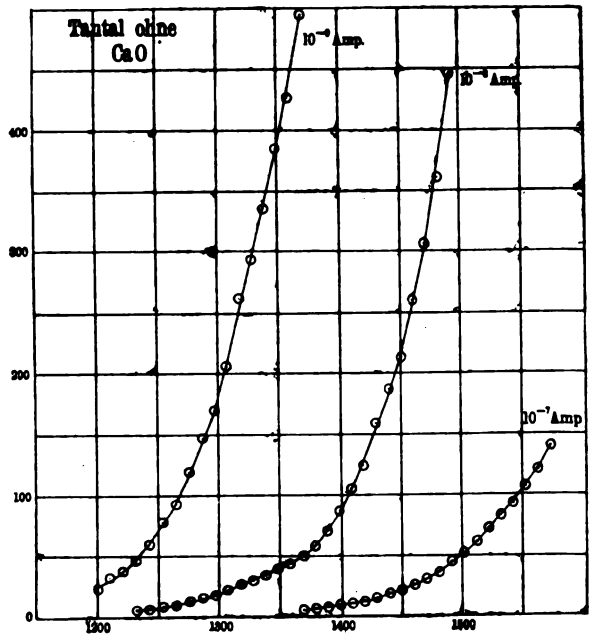


Fig. 7.

Die Fig. 8 gibt für die vier mit Calciumoxyd bedeckten Drähte den Zusammenhang zwischen Sättigungsstromdichte (Ordinaten) und Drahttemperatur (Abszissen = ° C.). Tab. 16 stellt einige der Fig. 8 entnommene Werte vergleichend zusammen.

Tabelle 16.

Drahttemperatur	Platin mit CaO	Kohle mit CaO	Tantal mit CaO	Nickel mit CaO
800°	2,6	2,2	2,7	3,6
850	16,0	20,0	18,0	19,3
900	93,0	106,0	118,0	86,0

Tabelle 16 (Fortsetzung).

Draht-temperatur	Platin mit CaO	Kohle mit CaO	Tantal mit CaO	Nickel mit CaO
950°	410,0	460,0	560,0	400,0
1000	1800,0	2000,0	2200,0	1600,0
1050	6400,0	7200,0	8000,0	6200,0
1100	21000,0	20000,0	25000,0	21000,0
1150	73000,0	81000,0	71000,0	75000,0

Die Zahlen in der Tabelle bedeuten die Dichte des Sättigungsstromes in 10^{-8} Amp.

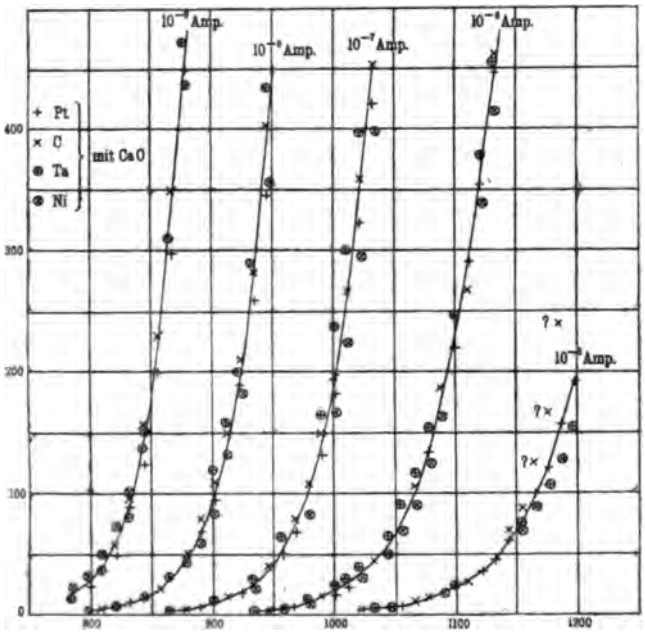


Fig. 8.

Aus den Tabb. 15 und 16 sowie aus den vier letzten Figuren (5—8) ist ersichtlich, daß zur Erreichung einer bestimmten Sättigungsstromdichte viel niedrigere Drahttemperaturen hinreichen, wenn die Drähte mit Calciumoxyd bedeckt

sind, als wenn letzteres fehlt. Fig. 8 und Tab. 16 zeig daß gleichen Temperaturen der mit Calciumoxyd bedeck Drähte gleiche Sättigungsstromdichten entsprechen, daß

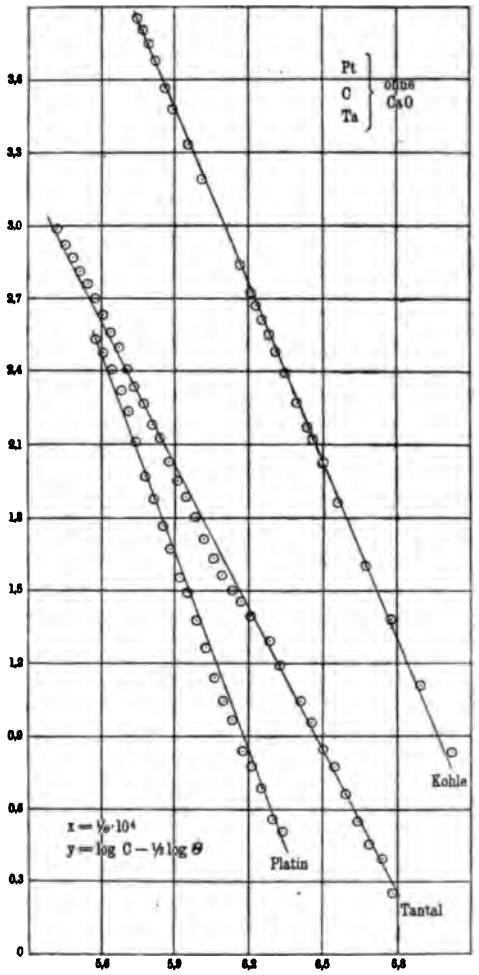


Fig. 9.

die vier Drähte trotz ihres verschiedenen Materiales bezügli der Zahl der ausgesandten negativen Ionen sich nicht unt scheiden, wenn sie eine Schicht Calciumoxyd tragen. D

Zusammenhang zwischen den Größen $x = 10^4 / \Theta$ (Abszissen) und $y = \log C - {}^1/_2 \log \Theta$ (Ordinaten) stellen für Platin, Kohle und Tantal ohne Calciumoxyd die Kurven der Fig. 9 graphisch dar. Für Calciumoxyd tragenden Platin-, Kohle-, Tantal- und Nickeldraht wird diese Beziehung durch Fig. 10 gegeben.

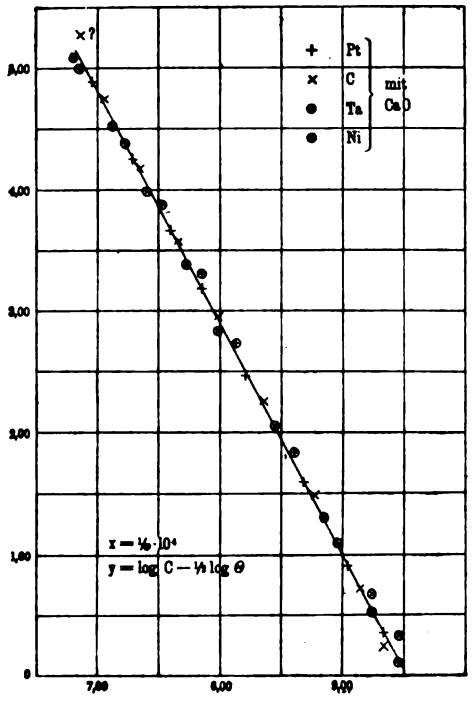


Fig. 10.

Die Kurven der Figg. 9 und 10 sind gerade Linien und bestätigen somit die Richardsonsche Formel (s. Einleitung) für sämtliche Versuche. Bei den mit Calciumoxyd bedeckten Drähten fallen die Geraden in eine einzige zusammen, während die Geraden für nicht mit Calciumoxyd bedeckten Platin-, Kohle- und Tantaldraht verschiedene Lage einnehmen. Aus den Konstanten der in den beiden letzten Figuren gezeichneten Geraden lassen sich die Werte von n d. i. der Zahl der negativen Ionen im Einheitsvolumen des Metalles, Φ d. i. die Arbeit, die ein Ion beim Verlassen des Metalles leistet, und

$\delta\varphi$ d. i. der Potentialsprung an der Metalloberfläche, berechnen. Tabelle 17[1]) stellt diese Werte zusammen.

Tabelle 17.

	Platin	Kohle	Tantal	CaO (Mittel)
n	$5{,}1 \cdot 10^{21}$	$7{,}8 \cdot 10^{21}$	$4{,}5 \cdot 10^{17}$	$1{,}8 \cdot 10^{22}$
Φ (erg)	$10{,}3 \cdot 10^{-12}$	$9{,}2 \cdot 10^{-12}$	$7{,}5 \cdot 10^{-12}$	$7{,}3 \cdot 10^{-12}$
$\delta\varphi$ (Volt)	5,1	4,6	3,7	3,6

n sowie Φ und $\delta\varphi$ haben einen für jedes Metall charakteristischen Wert. Die Unterschiede verschwinden jedoch, wenn die Metalle eine Schicht von Calciumoxyd tragen. Die in diesem Fall erhaltenen Werte sind daher als dem Calciumoxyd eigentümliche Größen zu betrachten. n ist bei Calciumoxyd nur rund zweimal so groß als bei reiner Kohle, dagegen rund 10000 mal so groß als bei reinem Tantal. Φ und ebenso $\delta\varphi$ ist zwar in allen Fällen von derselben Größenordnung, jedoch haben, wie die Richardsonsche Formel zeigt, kleine Größenunterschiede von Φ oder $\delta\varphi$ bezüglich der Zahl der emittierten Ionen beträchtliche Unterschiede zufolge. Am kleinsten ist Φ für Calciumoxyd, am größten für Platin. n ist am größten für Calciumoxyd, am kleinsten für Tantal.

Versuchsresultate.

1. Platin, Kohle, Tantal und Nickel senden in glühendem Zustand bei fehlender und bei vorhandener Bedeckung mit Calciumoxyd negative Ionen aus. Die Beziehung zwischen Spannung und Strom trägt in allen diesen Fällen denselben Charakter. Es wurden überall ausgeprägte Sättigungsströme erhalten. Die geringste hierzu erforderliche Spannung lag stets zwischen 20 und 25 Volt. Die Richardsonsche Formel

1) In der Tabelle 17 ist der Wert von n für Platin bei vorhandener Calciumoxydschicht (letzte Kolumne) rund 3,5 mal größer als bei fehlendem Calciumoxyd. Nach Wehnelt (l. c.) ist n im ersten Fall rund 1000 mal größer als im zweiten. Hr. Prof. Dr. Wehnelt machte mich jedoch darauf aufmerksam, daß bei seiner Berechnung ein Irrtum vorgekommen sei.

für die Beziehung zwischen Drahttemperatur und Sättigungsstrom findet sich bei allen Versuchen bestätigt.

2. Glühende, nicht mit Calciumoxyd bedeckte Platin-, Kohle-, Tantal- und Nickeldrähte unterscheiden sich beträchtlich bezüglich der Anzahl der von ihnen ausgesandten negativen Ionen, d. h. der Stärke der Sättigungsströme. Desgleichen hat n, d. i. die Zahl der in 1 ccm des Metalles enthaltenen negativen Ionen, sowie Φ, d. i. die von einem Ion beim Verlassen des Metalles geleistete Arbeit, je einen für das betreffende Metall charakteristischen Wert.

3. Glühende, mit Calciumoxyd bedeckte Platin-, Kohle-, Tantal- und Nickeldrähte zeigen bezüglich der Anzahl der emittierten negativen Ionen keine Verschiedenheit. Die Werte von n und Φ sind in den vier Fällen die gleichen.

4. Die Zahl der ausgesandten negativen Ionen, d. h. der Sättigungsstrom ist für ein und dasselbe Metall viel größer bei vorhandener als bei fehlender Bedeckung mit Calciumoxyd.

5. Die erhöhte Emissionsfähigkeit von Calciumoxyd tragenden Drähten ist nicht verursacht durch einen modifizierenden Einfluß, den das Calciumoxyd auf das Austreten der negativen Ionen aus dem Metalle ausübt, sondern das Calciumoxyd selbst sendet die negativen Ionen aus.

6. Auf die Aussendung negativer Ionen aus glühendem Calciumoxyd hat das Metall, auf dem das Calciumoxyd sich befindet, auch dann keinen Einfluß, wenn die theoretisch gefundene Zahl der im Einheitsvolumen des Metalles enthaltenen negativen Ionen eine sehr beträchtliche ist. Es ist möglich, daß die negativen Ionen sich nicht ungehindert durch die Grenzfläche zwischen dem Metall und dem Calciumoxyd bewegen können, so daß die Zahl der hindurchpassierenden Ionen gegenüber den im Calciumoxyd vorhandenen für die Emission nicht in Betracht kommt.

7. Die Aussendung negativer Ionen aus glühenden Metallen hängt hiernach bedeutend von der Natur der Metalloberfläche (Verunreinigungen durch Metalloxyde usw.) ab. Unregelmäßige Abgabe negativer Elektrizität aus glühenden Metallen, wie solche häufig beobachtet wird[1]), ist auf Veränderung der Metallober-

1) O. W. Richardson, Phil. Trans. **201**. p. 518ff. 1903; H. A. Wilson, Phil. Trans. **202**. p. 272/3. 1904.

fläche durch chemische Reaktion, Zerstäuben des Metalles und Freiwerden absorbierter Gase[1]) zurückzuführen.

Die vorliegende Arbeit wurde in den Jahren 1906 und 1907 im physikalischen Institut der k. Universität Erlangen ausgeführt. Hrn. Prof. Dr. E. Wiedemann, sowie Hrn. Prof. Dr. A. Wehnelt und Hrn. Prof. Dr. R. Reiger spreche ich auch an dieser Stelle für die Anregung und gütige Unterstützung bei der Arbeit meinen ergebensten Dank aus.

1) H. A. Wilson, Proc. Roy. Soc. 72. p. 272. 1903; O. W. Richardson, Proc. Roy. Soc. 78. p. 192. 1906.

(Eingegangen 7. Januar 1908.)

7. *Über die Zerlegung der Spektrallinien von Barium, Yttrium, Zirkon und Osmium im magnetischen Felde;* von *Burton Evans Moore.*

(Auszug aus der Göttinger Inaugural-Dissertation.)

I. Einleitung.

Die Untersuchungen von Runge[1]) und Paschen haben das Prestonsche Gesetz in mehrfacher Hinsicht bestätigt. In diesem Gesetze wurde eine enge Verwandtschaft zwischen den magnetischen Zerlegungen jener Spektrallinien, von denen man wußte, daß sie Serien bilden, und ein verschiedener Charakter der Zerlegungen für verschiedene Serien behauptet; aber zugleich auch ein Grad von Ähnlichkeit zwischen den verschiedenen Serien. Für Barium sind bisher keine Tripletserien gefunden, die den Tripletserien in chemisch verwandten Substanzen Mg, Ca, Sr entsprechen. Statt nun zu versuchen, Prestons Gesetz durch Serien zu bestätigen, kann man nach der umgekehrten Methode verfahren und das Gesetz benutzen, um Serien zu bilden von den Linien gleicher magnetischer Zerlegung (diese selbst ausgedrückt durch das betreffende $\Delta\lambda/\lambda^2$, wo λ die Wellenlänge, $1/\lambda$ also die Wellenzahl pro Zentimeter und $\Delta\lambda$ die Entfernung einer Komponente von der normalen Lage ist). Bei der Anwendung dieses Verfahrens auf Barium wurden allerdings Vertreter der verschiedenen Arten Zerlegung gefunden, aber nicht genug Glieder, um Serien zu bilden. Die folgende Untersuchung versucht die letztere Methode zuerst für ein vollständigeres Studium des Bariums zu verwenden und dann auf andere Substanzen, für die bisher keine Serien gefunden sind, um schließlich zu sehen, ob eine Verwandtschaft zwischen den verschiedenen Zerlegungscharakteren oder -typen nachgewiesen werden kann.

1) C. Runge, Sitzungsber. der Berliner Akad. d. Wissensch. am 6. Febr. 1902; **19.** p. 380. 1902; **19.** p. 720. 1902; **20.** p. 417. 1904; Astrophys. Journ. **15.** p. 235, 333. 1902; **16.** p. 128. 1902.

II. Experimentelle Methode.

Die experimentelle Methode ist im wesentlichen dieselbe, die Runge[1]) benutzt hat. Beim Versuche, das Zirkonspektrum zu photographieren, erhielt ich zuerst nur das Linienspektrum der Zinkelektroden und ein kontinuierliches Spektrum von Zirkon. Erst durch weitere Trennung der Pole und durch Verwendung von Gaskohlenplatten von 1 mm Dicke und 4 mm Breite als Elektroden erhielt ich einen Funken, der heiß genug war, um das Zirkon zu reduzieren. Dies neue Verfahren verdoppelte die Poldistanz und verringerte die Feldstärke wesentlich. Als Ersatz für diesen Verlust erzielte ich einen vielfach stärkeren Funken, der es mir ermöglichte, die Spaltbreite um die Hälfte zu reduzieren und viel stärkere und schärfere Linien bei weit kürzerer Expositionsdauer zu bekommen.

Die Länge der Expositionszeit variierte von 15 Min. bis zu 2 Stunden und bei Barium im rot bis zu 6 Stunden. Die längeren Expositionen wurden vorgenommen, um die schwachen Linien deutlich zu machen. Die Substanzen haften so sehr an den Kohlenelektroden, daß es möglich war, sehr kleine Mengen des Salzes zu verwenden. Dieser Umstand wird es möglich machen, einige der vielversprechenden selteneren Metalle zu studieren.

Die Photographien wurden alle bei gleicher Entfernung der Polschuhe gemacht; dabei konnte man durch Regulierung des Stromes im Elektromagneten nach Belieben jede Feldstärke unter dem Maximum erzielen. Die hauptsächlich gebrauchte Feldstärke war 24400 C.G.S.-Einh. Dies wurde aus wiederholten Messungen der Calciumlinie von der Wellenlänge $\lambda = 3968{,}6$ Å.E. ermittelt, die als eine Unreinheit in der Kohlenstoffelektrode vorkommt und aus einigen speziellen Photographien der Zinklinie 4680; dabei wurde vorausgesetzt, daß Runges und Paschens Messungen dieser Linien sich auf eine Feldstärke von 31000 Einh. beziehen. Alle Resultate sind für die Feldstärke 24400 angegeben.

Andere Feldstärken wurden verwandt, um die wahren Komponenten sehr nahe beieinander befindlicher Linien zu bestimmen oder um Ablesungen zu bekommen für sonst sich

1) C. Runge, l. c.

überdeckende Komponenten. Häufig wurden die Verschiebungen solcher Linien auch aus der Entfernung der *einen* wahrnehmbaren freien Komponente von der ungestörten Lage bestimmt.

Es wurden die Photographien von den Schwingungen, die parallel (p) und von denen, die senkrecht (s) zu den Kraftlinien stattfinden, je auf einer besonderen Reihe von Platten genommen. Dies wurde in der üblichen Weise vermittelst eines Calcitprismas bewirkt. Photographien ohne Calcit, d. h. sowohl mit den p- als auch mit den s-Komponenten auf denselben Platten wurden nur verwendet, um die relative Intensität der p- und s-Komponenten zu bestimmen. So weit die letzte Klasse von Platten in Frage kommt, sind die p- und und s-Komponenten oft so nahe beieinander, daß dies ihre Zerlegung und die Kenntnis ihrer bezüglichen Intensitäten verhindert. Bei Tripletten von großer Zerlegung bot sie indessen keine Schwierigkeit.

Durch einen doppelten Vergleich solcher Linien mit entsprechenden Komponenten auf den p- und den s-Platten ließ sich auch das Verhältnis der Intensitäten auf den p- und den s-Platten feststellen. Die Linien konnten dann in der Tat auf den s- und den p-Platten verglichen werden, obwohl die Expositions- und Entwickelungsbedingungen ganz verschiedene gewesen sein mögen.[1])

Immerhin ist ein recht großer Fehler in der Bestimmung der Intensitäten möglich, einerseits, da ein großer Abstand in der Weite und Tiefe der Schwärzung besteht, andererseits, weil keine experimentelle Methode benutzt worden ist, um die Intensitäten zu vergleichen, wie dieses bei der Photometrie oder der Spektrophotometrie der Fall ist.

Die Verschiedenheit in der aktinischen Empfindlichkeit der Platten im ganzen Spektrum ist sehr groß, so daß man, um das ganze Spektrum zu beherrschen, zu verschieden präparierten Platten greifen muß. Auch waren die für rot empfindlichen Platten, selbstpräpariert mit Diacyamin, bei weitem nicht gleichförmig. Daher konnte ein Vergleich der Intensitäten von verschiedenen Linien, was bei der Aufsuchung von

1) Derartige Vergleichungen haben allerdings nach den neuesten Untersuchungen von Zeeman (Arch. Néerl. 1907, 28. Nov.) wenig allgemeine Bedeutung.

Serien sehr wichtig ist, selbst innerhalb eines kurzen Spektralbereiches nur annähernd genau sein. Dies ist meist ausreichend, um zu zeigen, daß zwei oder mehr einander nahe Linien gleicher magnetischer Zerlegung, aber von großer Ungleichheit in der Intensität, nicht zur selben Serie gehören. Dies ist aber alles, was man von den Intensitäten erwarten darf, die in den folgenden Tabellen angegeben werden. Wie groß die Veränderungen in der Stärke unter den verschiedenen Experimentalbedingungen sein können, kann man ersehen, wenn man die hier verzeichneten Intensitäten mit denen vergleicht, die in Exners und Hascheks Tabellen gegeben sind, welch letztere eingehend benutzt wurden. Es ist aber genug Ähnlichkeit vorhanden, um Exners und Hascheks Tabellen für die Identifizierung der Linien nutzbar zu machen.

Die Intensitäten, die unten mitgeteilt sind, beziehen sich auf die Linien erster Ordnung, ob nun die Linien in erster oder in zweiter Ordnung gemessen wurden. Die niedrigste Intensität, 1, ist nur eben bemerkbar. Die betreffende Linie ist nicht meßbar, ausgenommen, wenn sie sich günstig in einer Gruppe von Komponenten befindet und dann auch nicht besonders genau. Eine Linie von der nächsten Intensität, 2, kann gut gemessen werden in Gruppen von verschiedenen Komponenten, aber nicht in befriedigender Weise in einem Paare von breiter Zerlegung. Die folgende Intensität, 3, ist die niedrigste Intensität, die unter den letzten Bedingungen befriedigende Resultate liefert. Zerflossene Linien von höheren Intensitäten können gleichfalls unbefriedigend werden. Ein Paar Komponenten, die nach außen oder innen abgeschattet sind, weist auf das Vorhandensein äußerer oder innerer schwacher Komponenten hin, die zur Darstellung gebracht werden können, wenn Selbstinduktion, Kapazität, Spaltbreite und Exposition der Platten gehörig ausgeglichen sind. Breite einfache Linien deuten auf eine ähnliche Zerlegung hin. Daher mag eine Feststellung dieser Tatsachen von Nutzen sein, sogar wenn die Zerteilung oder Zerlegung nicht bewirkt worden ist.

Die Genauigkeit der Ablesungen hängt natürlich auch von der Schärfe der Linien ab. Wo Schwäche, Zerflossenheit oder das Vorhandensein sich überdeckender Komponenten eine Ab-

lesung weniger genau gemacht hat, ist das Resultat in Klammern eingeschlossen. Die eingeklammerten Werte sind immerhin noch genau genug, um eine ziemlich richtige Idee von der Größe der Zerlegung zu geben.

Bezüglich der Verschiedenheiten der Meßgenauigkeit bei den verschiedenen untersuchten Spektren sowie einzelner Schwierigkeiten bei der Identifizierung von Linien nach den Exner-Haschekschen Tabellen muß auf die Dissertation verwiesen werden.

III. Erklärung der Tabellen.

Die Abkürzungen in den Tabellen haben die folgende Bedeutung: λ Wellenlänge in A.E., $\Delta\lambda/\lambda^2$ die Änderung der Wellenzahl pro Zentimeter (die negativen und positiven Werte derselben liegen natürlich auf der roten bzw. blauen Seite der Ruhelagen). *s* senkrecht, *p* parallel zu den Kraftlinien stattfindende Schwingung. *H* Hauptserie, *i* Intensität, *g* größere Wellenlänge, *k* kleinere Wellenlänge, *N* Nebenserie, *S* Satellit, *h* Hauptlinie, *R.* Beobachtung nach Runge und Paschen, *M.* Beobachtung nach Moore.

Die mit *A* überschriebene Spalte gibt den ungefähren Wert der Abstände der Komponenten, ausgedrückt durch einen kleinen konstanten Abstand, genannt das „Intervall", letzteres je multipliziert mit kleinen ganzen Zahlen, genannt „Faktoren". Die Faktoren stellen das Verhältnis der Entfernungen der sukzessiven Komponenten von der Lage der ungestörten Linie aus dar.[1]) Die mit *B* überschriebene Spalte enthält die Bemerkungen. Insofern gleichlautende Bemerkungen häufig vorkommen, sind sie durch die folgenden Abkürzungen bezeichnet worden: *D* zerstreut, D_r zerstreut nach rot, D_b zerstreut nach blau, D_i und D_a zerstreut nach innen und außen, was im allgemeinen auf das Vorhandensein von schwachen inneren bez. äußeren Komponenten hinweist; *w* wenig, *b* stark verbreitet; b_0 und r_0 blaue bzw. rote Komponente überdeckt von der Komponente einer benachbarten oder fremden Linie; *n. i.* nicht identifiziert, d. h. die Linie kann nicht mit denen in Exners

1) Auf den Zusammenhang dieser Darstellung mit der von C. Runge (Physik. Zeitschr. 8. 15. April 1907) gegebenen komme ich weiter unten (auf p. 339) zurück.

und Hascheks Tabellen verglichen werden. Spezielle Bemerkungen sind durch Zahlen angegeben, die am Schlusse der bezüglichen Tabellen erklärt werden.

In den Quadruplettabellen sind die zur Hauptlinie symmetrischen zu den Kraftlinien senkrechten und parallelen Komponenten jede durch ein doppeltes Zeichen ($\pm$) bezeichnet, um Wiederholungen zu vermeiden. Die s-Komponente ist stets zuerst aufgeführt. Das doppelte Zeichen bedeutet daher zwei Ablesungen. Die tripletten s-Komponenten sind in ähnlicher Weise bezeichnet und die p-Nullkomponente ist außer Betracht gelassen. Bei den Tripletten werden häufig zwei Intensitäten angegeben. Der zuerst verzeichnete Wert bezieht sich dann auf die s- und der zweite auf die p-Komponente. Wenn drei Intensitäten für Tripletten angegeben sind, so sind die äußeren p-Komponenten ungleich intensiv. Die erste Ablesung gibt dann die rote, die dritte die blaue Komponente. Wo nur eine Intensität unter Tripletten angegeben ist, bezieht sie sich auf die s-Komponente und die p-Komponente hat die doppelte Intensität.

IV. Barium.

Die Bariumlinien für Wellenlängen, die kürzer als 5854 waren, wurden auf Platten gemessen, die von Runge und Paschen aufgenommen waren. Es wurde viel Zeit auf Versuche verwandt, stärkere Photographien von Barium zu erlangen, um die schwächeren Linien zur Darstellung zu bringen. Diese Linien waren entweder überhaupt nicht auf den neuen Platten oder zu verschwommen, um befriedigende Messungen zu liefern. Einige der schärfsten Linien der neuen Platten wurden gemessen und mit den Messungen nach Runge und Paschens Platten in Übereinstimmung befunden. Es wurde daher für zwecklos erachtet, andere Linien nochmals zu messen. Diese Beobachtungen und die von Runge und Paschen bei Barium habe ich auf die Feldstärke von 24 400 C.G.S.-Einh. reduziert, die (wie vorher gesagt) bei allen folgenden Messungen benutzt wurde. Die Photographie des roten Spektrums ergab alle Linien außer zweien in Kaisers und Runges Bogenspektrum und verschiedene neue Linien, von denen die meisten schwach sind. Die Wellenlängen dieser Linien wurden bestimmt aus ihren Entfernungen von bereits bekannten Linien. Die fort-

während Verwendung dieser selben Graduierung bei Zirkon- und Yttriumlinien, zugleich mit Exners und Hascheks Tabellen, läßt vermuten, daß die Wellenlängen zuverlässig sind bis innerhalb der 0,1 Å.-Einh. Die Intensitäten für das rote Spektrum sind angegeben und zeigen die verhältnismäßigen Intensitäten für jenen Teil des Spektrums.

Die Tabelle Ba_1 gibt die Werte $\Delta\lambda/\lambda^2$ für Linien, die schon von Runge und Paschen beobachtet sind und vom Verfasser nochmals gemessen wurden zur Vergleichung der erreichbaren Genauigkeit; Barium stellte sich dabei als die für die Messungen ungünstigste Substanz heraus von den vier Substanzen, die auf einen solchen Vergleich hin studiert wurden.

In Tabelle Ba_2 hat die Linie 6675,3 Abstände ihrer Komponenten im Verhältnis von 0,635 (0, 1, 3), die Komponenten der Linie 5997,4 können durch 0,55 (1, 2, 3) dargestellt werden, die der Linie 5971,9 durch 0,30 (2, 5) und die der Linie 4580 möglicherweise durch 0,10 (4, 8, 15).

Tabelle Ba_3 enthält eine Liste von Tripletten, die in Gruppen mit gleicher Zerlegung angeordnet sind. Die ausgelassene p-Komponente hat die Stellung der Linie ohne Feld, d. h. mit Nullzerlegung. Die Abstände der Gruppen I, III und IV stehen in dem einfachen Verhältnis von 3—2—1.

Die Abstände in Gruppe II unterscheiden sich von denen in Gruppe III um 1/11. Die Zerlegung in Gruppe III bezeichnet Runge als normales Triplett (siehe später unter VIII, Vergleichung der Substanzen), den bezüglichen Abstand mit a, die Abstände in diesen Gruppen sind daher $3a/2$, a und $a/2$. Die Zerlegungen der Gruppen I, III, IV sind bei der Linie 5997,4 gleichzeitig vorhanden, ausgenommen die Nullkomponente, diejenige von Gruppe I kommt auch bei 4166, die von Gruppe II bei 5854 und von Gruppe III bei 4554 in Tabelle Ba_1 vor.

In Tabelle Ba_4 befinden sich die übrigen Bariumlinien und unter „Bemerkungen" sind die Linien mehrerer Komponenten angegeben, in denen Abstände aus den Tripletten vorkommen.

Aus diesen Tabellen ist zu ersehen, daß die Tripletten aussehen wie Systeme von mehreren Komponenten, in denen einige Komponenten fehlen, oder, was noch bedeutungsvoller ist: die Größen der Zerlegungen reduzieren sich auf wenige Abstände und diese kommen in verschiedenen Zerlegungstypen

wieder. Die Triplettenlinien in Gruppe II haben dieselbe Zerlegung wie die mittlere Linie der ersten Nebenserie.

Tabelle Ba_1.

H. G. $\lambda = 4934$		2 N. K. $\lambda = 4525$		2 N. G. $\lambda = 4900$	
R.	M.	R.	M.	R.	M.
−1,44	−1,45	−1,42	−1,44	−1,75	−1,83
− ,74	− ,72	− ,76	− ,72	−1,09	−1,11
+ ,73	+ ,71	+ ,75	,74	− ,86	− ,85
+1,45	+1,46	1,45	1,44	+ ,35	+ ,37
				+1,07	+1,11
				+1,75	+1,80

H. K. $\lambda = 4554$		1 N. K. $\lambda = 5854$		1 N. S. $\lambda = 4166$	
R.	M.	R.	M.	R.	M.
−1,75	−1,83	−1,76	−1,76	−1,63	—
−1,08	−1,11	−1,19	−1,19	−1,16	—
− ,86	− ,85	− ,92	—	− ,88	−,87
+ ,85	+ ,37	+ ,58	− ,58	− ,62	—
+1,06	+1,10	+ ,58	+ ,57	+ ,55	—
+1,79	+1,82	+ ,91	—	+ ,90	+,87
		+1,19	+1,16	+1,14	—
		+1,76	+1,74	+1,70	—

Tabelle Ba_2.

$\lambda = 6675{,}8$ [1]		$\lambda = 5997{,}4$		$\lambda = 5971{,}9$ [2]		$\lambda = 4580$	
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$
5	−1,90 *s*	3	−1,64 *s*	8	1,49 *s*		−1,54 *s*
1	− [,64]*p*	6	−1,10 *p*	10	,61 *p*		− ,81 *p*
1+	0 *p*	3	− ,56 *s*	10	,60 *p*		− ,38 *s*
1	+ [,63]*p*	3	+ ,54 *s*	8	1,49 *s*		+ ,39 *s*
5	+1,90 *s*	6	+1,10 *p*				+ ,81 *p*
		3	+1,66 *s*				+1,46 *s*

1) Die *s*-Komponente von 6451 stimmt hiermit überein und möglicherweise auch die Parallelkomponente, da letztere als ein breites, schwaches Band erscheint eher denn als eine einfache Linie.

2) Die *s*-Komponenten sind breit und können sich vielleicht in je zwei Linien auflösen. Sie sind allerdings am stärksten in der Mitte und dies ist gewöhnlich nicht der Fall bei Linien, die sich mit besserer Definition auflösen.

Tabelle Ba_3.

Gruppe I			Gruppe II			Gruppe III			Gruppe IV		
λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$
3694,4 [1]	5	∓1,66	6527,6 [2]	12	∓1,24	6483,1	8	1,14	6653,7	4	,55
3341,9	8	1,59	6148,6	3	1,17	6182,6	2	1,08	6611,8	8	,56
4692,		1,65	6141,9	30	1,20	6165,4 [3]	2	1,06	6433,5	6	,57
4574,		1,64	5778,		1,22	6063,3	12	1,10	6019,7	10	,555
4506,		1,67	4416,		1,18	5988,1		1,09	4132,6		,56
4432,		1,64	4131,		1,18 *R*	5826,		1,12			
4414,		1,62	—		1,18 *M*	5536,		1,11			
3889,4		1,68	3993, [3]		1,24	4727,		1,11			
			3071,7		1,17	4283,		1,07			
						3935,		1,09			
						3501,		1,11			

Tabelle Ba_4.

λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	Bemerkung	λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	Bemerkung
6687,5			Zu schwache Triplette	6409,3	6	—	Breit, nicht sichtbar zerlegt
6630,5			„ „ „				
5595,55 [3]	10	∓,635	Vgl. 5854	6403,1	4	∓,84	
5548,3	2	,63	„ „	6398,84			Breit, sieht wie mehrere Komponenten aus
			(Nicht Cu 3274,1, die eine Zerlegung von 1,50 hat.)	6200,3			Zu schwach. Triplett
4498,9	8	1,48		6192,1	3	,89	Vgl. 5854
4497,1	20	,93		6132,2	3	,88	„ „
4495,3	2	,68	(Nicht Cu 3247,66, die eine Zerlegung von 1,10 hat.)	6111,0	10	1,28	8 *a*/7?
				5519,		1,02	
4484,7 [3]	6	,93	(Nicht Yt 3242,43, die eine Zerlegung von 1,33 hat.)	4600,		1,53	Vgl. 4580
				4403,		1,28	
				4350,		1,83	Vgl. 4554
4451,0 [4]	3	1,89		3996,		1,38	
4435,2	4	1,29	8 *a*/7?	3910,		,84	
				3892,		,87	

1) Die *s*-Komponenten sind jede ungefähr doppelt so stark wie die *p*-Komponente. In den anderen Linien sind die parallelen Komponenten die stärkeren Linien.

2) Gehört möglicherweise nicht zu dieser Gruppe.

3) Die *s*-Komponente ist ungefähr doppelt so intensiv wie die *p*-Komponente.

4) Vgl. die Anmerkung 1, Tabelle Ba_2.

V. Yttrium.

Die beiden folgenden Linien haben zwölf bez. zehn Komponenten.

$\lambda = 3818{,}49$			$\lambda = 4285{,}89$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
2	$-1{,}74\ s$	$4\times{,}433$	2	$-[1{,}26]\ s$	$7\times{,}18$
4	$-1{,}29\ s$	3	2	$-[\ {,}89]\ s$	5
10	$-\ {,}88\ p$	2	6	$-\ {,}71\ p$	4
3	$-\ {,}85\ s$	2	2	$-[\ {,}54]\ s$	3
2	$-\ {,}44\ p$	1	2	$-\ {,}36\ p$	2
2	$-\ {,}42\ s$	1	2	$+\ {,}36\ p$	
2	$+\ {,}42\ s$		—	—	
2	$+\ {,}43\ p$		6	$+\ {,}71\ p$	
3	$+\ {,}84\ s$		—	—	
10	$+\ {,}88\ p$		—	—	b_0
3	$+1{,}33\ s$				
2	$+1{,}74\ s$				

Die folgenden fünf Linien haben jede neun Komponenten.

$\lambda = 4898{,}21$			$\lambda = 4199{,}46$			$\lambda = 3950{,}51$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
1+	$-[1{,}72]\ s$	$9\times{,}19$	6	$-2{,}73\ s$	$5\times{,}54$	8	$-1{,}51\ s$	$3\times{,}50$
2	$-\ 1{,}33\ s$	7	3	$-1{,}58\ s$	3	4	$-\ {,}98\ s$	2
6	$-\ {,}95\ s$	5	6	$-1{,}02\ p$	2	20	$-\ {,}51\ p$	1
4	$-\ {,}38\ p$	2	1+	$-\ {,}54\ s$	1	2	$-\ {,}49\ s$	1
6	$0\ p$	0	10	$0\ p$	0	15	0	0
4	$+\ {,}38\ p$		1+	$+\ {,}58\ s$		2	$+\ {,}49\ s$	
6	$+\ {,}95\ s$		6	$+1{,}02\ p$		20	$+\ {,}49\ p$	
2	$+\ 1{,}34\ s$		3	$+1{,}61\ s$		4	$+1{,}02\ s$	
1 (?)	— s		6	$+2{,}73\ s$		8	$+1{,}51\ s$	

$\lambda = 3628{,}89$			$\lambda = 3584{,}71$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
10	$-1{,}92\ s$	$3\times{,}63$	12	$-2{,}07\ s$	$8\times{,}265$
5	$-1{,}27\ s$	2	6	$-1{,}32\ s$	5
8	$-\ {,}66\ p$	1	10	$-\ {,}76\ p$	3
2	$-\ {,}64\ s$	1	3	$-\ {,}55\ s$	2
10	$0\ p$	0	15	$0\ p$	0
2	$+\ {,}62\ s$		3	$+\ {,}53\ s$	
8	$+\ {,}66\ p$		10	$+\ {,}74\ p$	
5	$+1{,}28\ s$		6	$+1{,}31\ s$	
10	$+1{,}92\ s$		12	$+2{,}07\ s$	

In der Linie 4398,2 kommt eine gemeinsame Differenz zwischen Komponenten des Wertes ,38 sechsmal vor. Das Intervall bei 4199,46 erscheint als das doppelte des Intervalls bei 3584,71, oder die beiden Linien können beide das kleinere Intervall in verschiedenen Proportionen haben. Bei jeder der Linien 3950,5 und 3628,89 kommt der Fall vor, daß die *s*- und die *p*-Komponenten die gleiche Lage haben.

Die beiden folgenden Linien haben je acht Komponenten.

$\lambda = 4236{,}10$			$\lambda = 4083{,}89$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
6	$-1{,}96\,s$	$9\times{,}22$	2	$[-1{,}79]\,s$	$9\times{,}20$
2	$-1{,}53\,s$	7	3	$-1{,}19\,s$	6
3	$-\ {,}65\,p$	3	6	$-\ {,}83\,p$	4
3	$-\ {,}22\,p$	1	1+	$-\ {,}64\,s$	3
3	$+\ ,-\,p$		2	$+\ {,}62\,s$	
3	$+\ ,-\,p$		6	$+\ {,}83\,p$	
2	$-1{,}53\,s$		3	$+1{,}19\,s$	
6	$-1{,}96\,s$		1+	$[+1{,}75]\,s$	

Die drei folgenden Linien sind Sextette.

$\lambda = 4358{,}91$			$\lambda = 3747{,}70$			$\lambda = 3195{,}80$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
12	$-1{,}65\,s$	$3\times{,}553$	6	$-1{,}04\,s$		8	$-1{,}69\,s$	$3\times{,}553$
15	$-1{,}10\,p$	2	6	$-\ {,}52\,s$		12	$-1{,}11\,p$	2
12	$-\ {,}54\,s$	1	12	$-\ {,}46\,p$		8	$-\ {,}55\,s$	1
12	$+\ {,}54\,s$		12	$+\ {,}46\,p$		8	$+\ {,}55\,s$	
15	$+1{,}10\,p$		6	$+\ {,}52\,s$		12	$+1{,}11\,p$	
12	$+1{,}65\,s$		6	$+1{,}04\,s$		8	$+1{,}69\,p$	

Hier sind zwei Linien, 4358,91 und 3195,80 genaue Duplikate voneinander. Eine solche Übereinstimmung gilt im allgemeinen als die Andeutung des Vorhandenseins einer Serie. Leider sind in den Grenzen dieser Beobachtungen andere Glieder nicht vorhanden. Die *s*-Komponenten sind von gleicher Intensität und symmetrischer Lage. Sie sind von der Null-

position um das ein- und dreifache des Wertes ∓,55 entfernt. Die *p*-Komponenten entsprechen dem zweifachen desselben Wertes.

Bei 3747,70 haben die Abstände der *s*-Komponenten den einfachen und den doppelten Wert ∓,52. Ein direkter Vergleich der *s*- und der *p*-Platten zeigt, daß die gemessene Differenz der *p*-Komponenten und der inneren *s*-Komponenten tatsächlich vorhanden ist und nicht auf einem Beobachtungsfehler beruht. Das p. 313 erörterte Gesetz für die Abstände würde auch hier gelten, wenn man so weit gehen wollte, die kleine Differenz zwischen diesen parallelen und inneren senkrechten Komponenten als Einheit zu nehmen. Die Abstände des Sextettes 4747,70 wären dann der 7,8- und 16fache Wert von ∓,065.

Die folgenden zwei Quintette waren zu genauen Messungen nicht geeignet.

	$\lambda = 4477{,}1$			$\lambda = 3941{,}76$	
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	B	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	B
2	$-1{,}89\ s$	5×,38	6	$-1{,}47\ s$	4×,38
—	$-\ p$		1+	$-[0{,}38]p$	1
—	$-\ p$		2	$0\ p$	0
—	$-\ p$		1+	$+[0{,}38]p$	
2	$-1{,}89\ s$		6	$+\ 1{,}47\ s$	

Die *p*-Komponenten sind in dem Spektrum erster Ordnung nicht getrennt. So weit man in zweiter Ordnung sehen konnte, sind sie dieselben für beide Linien und können durch Null und den einfachen Wert ∓,38 dargestellt werden. Die *s*-Komponenten von 4477,10 entsprechen dem Fünffachen dieses Wertes, bei 3951,76 dem Vierfachen. Die *s*-Komponenten von 3951,76 sind nach innen diffus und lassen ein Linienpaar von dem Werte $\Delta\lambda/\lambda^2 = \mp\ 1{,}30$ vermuten, was dem Siebenfachen von ,19 entsprechen würde. Dieses bedeutet nur eine Verdoppelung der oben angegebenen multiplen Faktoren.

Die folgenden vierzehn Linien sind Quadrupletts. 4477,59 ist anscheinend gleichfalls ein Quadruplett, aber zu schwach und zu diffus zum Messen.

λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	B	λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	B
5510,1	2+	∓ ,85 *s*	7× ±,12		4106,60	5	—		b_0
	3	∓ ,48 *p*	4			3	,40		
4682,5	12	1,40 *s*	7× ±,20		3982,75	60	1,17	11×,105	D_r [2])
	10	1,19 *p*	6			60	,53	5	
4475,90	2	[1,44]	3× ±,50		3930,84	5	1,21	4×,30	
	3	,52	1			6—44	,34	1	
4375,11	100	1,07	5× ±,20		3833,10	30	1,34	2×,67	
	100	,20	1			25	,70	1	
4177,68	100	1,00	5× ±,20	D_r *b*	3552,87	—	—		r_0
	100	,44	2	D_r *b*		5	,895		
4167,65	20	1,20	6× ±,20	[1])	3448,98	6	1,42	3×,50	[1])
	20	,59	3			8	,55	1	
4128,49	30	∓1,26 *s*	4× ,30	D_r *w*	3200,44	20	1,53	4×,37	
	30	∓ ,29 *p*		D_r *w*		20	,69	2	

Die Linien 4475,90 und 3448,98 sind in ihrem Verhalten einander sehr ähnlich, aber sie gehören nicht zur selben Serie, insofern als die blaue Linie die viel stärkere ist. Der Charakter der Zerlegung ist ferner ziemlich gleich bei 4128,49 und 3930,84. Die Intensitäten stehen jedoch außer allem Verhältnis zu dem auf Grund der Seriengesetze zu erwartenden. Sie sind so, wie man sie bei zwei parallelen Serien erwarten könnte.

Die folgenden 74 Linien sind Tripletten. Die Intensitäten der ungestörten *p*-Komponenten sind nicht angegeben. Das Verhältnis der Intensität der *s*- zur *p*-Komponente ist gewöhnlich eins zu zwei, obwohl in vielen Fällen das Verhältnis zwei zu fünf näher kommt.

---

1) Die Breite der *s*-Komponenten läßt zwei oder mehr Komponenten vermuten.

2) Wenn die *p*- und die *s*-Komponenten dieser starken Linie unter dem Mikroskope in Juxtaposition gebracht werden, stehen die Komponenten offenbar nicht in dem Verhältnis von zwei zu eins. Das Verhältnis zwölf zu fünf mal $a/11$ (siehe später) scheint wahrscheinlicher, aber das hier gegebene Verhältnis elf zu fünf paßt besser sowohl bei den alten wie den neuen Ablesungen.

λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$
5663,1	12	∓1,10	4840,1	3	∓1,50
30,3	2	[,74]	4675,01	20	1,20
5582,1	4	,97	43,88	25	1,02
27,8	4—6	1,11	4527,98	6	1,32
5497,6	6	1,65	27,43	8	1,37
66,7	8	1,03	06,12	15	,92
03,0	6	,79	4465,50	35	1,06
5205,9	10	1,18	46,85	3	1,42
00,6	6	,74	43,33	1+	—
5087,6	10	1,34	22,80	25	,54
4956,7	2+	,48	4348,91	8	1,27
4900,3	20	1,10	30,85	2	,84
4883,9	20	1,24	09,81	50	1,33
4855,1	15	,92			

λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	B	λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	B
4302,45	8	∓1,13		3645,67	8	∓1,50	ni
4251,39	6	1,09		35,60	5	1,16	
11,85	10	1,21		33,28	50	1,02	D_r
04,84	20	1,61		21,12	15	1,14	
4174,27	30	1,25		14,81	1+	[1,24]	
43,01	30	,91	$D_r w$	11,19	60	1,30	
25,10	20	1,35		02,12	40	,62	
02,60	50	1,23		00,90	75	1,48	
4077,54	50	1,21		3593,11	8	,91	
47,81	20	,86		87,86	5	1,12	
40,00	15	1,57	D_i	85,90	3	—	r_0
3967,74	6	1,12		49,21	50	1,67	
44,90	7	1,34	ni	31,85	5	1,21	
06,57	5	1,48		3496,25	12	,62	
3878,80[1])	15	2,34	ni	68,05	3	,62	
42,00	5	1,22	ni	3372,93	6	1,25	
3788,88	50	1,02	$D_r w$	62,20	10	1,28	
82,50	15	1,38		28,11	30	1,08	
76,73	15	1,49		20,10	1+	[1,26]	D
74,51	100	1,15	$D_r w$	3242,49	30	1,33	D
10,41	60	1,25		16,87	15	1,12	D_a
3696,90	4	85	D	03,51	12	,53	
68,67	6	1,38		3173,40	5	1,28	
64,76	30	1,74	$D_r w$	30,20	3—2	1,25	

1) Y 3878,47 ist nicht vorhanden, falls es nicht diese Linie sein sollte, was kaum glaublich erscheint.

Jeder Abstand in der Triplettenklasse ist ein kleines Vielfaches eines der Intervalle, die bei Linien mit mehr Komponenten gefunden sind. Viele Linien könnten indessen verschiedene Vielfache von mehr als einem dieser Werte sein. Es ist deshalb von keiner Bedeutung, die Linien nach diesem Prinzip zu klassifizieren.

VI. Zirkon.

Die folgenden beiden Linien haben je elf Komponenten.

$\lambda = 3573{,}30$			$\lambda = 3272{,}39$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
5	$-2{,}24\,s$	$6 \times {,}37$	5	$-2{,}26\,s$	$6 \times {,}37$
3	$-1{,}50\,s$	4	2	$-1{,}54\,s$	4
3	$-1{,}11\,p$	3	3	$-1{,}11\,p$	3
1	$-\ {,}74\,s$	2	1	$,-\ s$	2
6	$-\ {,}34\,p$	1	5	$-\ {,}37\,p$	1
1	$,-\ s$	0	1	$,-\ s$	0
6	$+\ {,}34\,p$		5	$+\ {,}37\,p$	
1	$,-\ s$		1	$+\ ,-\ p$	
3	$+1{,}03\,p$		3	$+1{,}14\,p$	
3	$+1{,}50\,s$		2	$+1{,}50\,s$	
?	$+\ ,-\ s$	b_0	5	$+2{,}26\,s$	

Diese beiden Linien sind sicher Duplikate. Die s-Komponenten sind gerade Vielfache von 0,37 und die p-Komponenten ungerade Vielfache desselben Wertes. Die allgemeine Differenz 0,74 kommt sechsmal in jeder dieser Linien vor.

Die folgenden beiden Linien haben je neun Komponenten.

$\lambda = 3780{,}78$			$\lambda = 3921{,}99$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
6	$-2{,}17\,s$	$5 \times {,}43$	4	$-2{,}14\,s$	$5 \times {,}43$
2	$-1{,}69\,s$	4	1	$,-$	—
2	$-\ {,}86\,p$	2	2	$-\ {,}92\,p$	2
3	$-\ {,}42\,p$	1	3	$-\ {,}44\,p$	1
3	$0\ p$	0	3	$0\ p$	0
3	$+\ {,}48\,p$		2	$+\ {,}46\,p$	
1+	$+\ {,}90\,p$		1+	$+\ {,}91\,p$	
2	$+1{,}69\,s$		1	$,-$	
6	$+2{,}17\,s$		4	$-2{,}14\,s$	

[illegible]

[illegible]

[illegible]

	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	

	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	

	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	
	[illegible]			[illegible]	

l – 8764,6			$\lambda = 3459{,}1$		
l	Δl i^2	A	i	$\Delta\lambda$ i^2	A
½	1,92 s	7 / ,27	3	−2,20 s	22 × ,10
½	1,35 s	5	4	−1,51 s	15
0	1,08 p	4	8	−1,17 p	12
½	,96 s	3	2	− ,73 s	7
1	,96 s		3	+ ,68 s	7
0	1,08 p		8	+1,17 p	12
1	1,35 s		4	+1,54 s	15
1	1,92 s		1+	+2,28 s	23

4027,4 und 8764,6 sind wahrscheinlich Duplikate.

Die folgenden sieben Linien haben je sieben Komponenten.

$\lambda = 4457{,}71$			$\lambda = 4258{,}31$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
2	$-2{,}31\ s$		4	$-1{,}53\ s$	$6+{,}26$
10	$-1{,}46\ s$		6	$-1{,}37\ p$	5 (?)
10	$-1{,}33\ p$		2	$-[\ {,}82]\ p$	3
2	$0\ p$	[1])	10	$0\ s$	0
10	$+1{,}46\ s$		2	$+[\ {,}82]\ p$	$8\times{,}10$
10	$+1{,}50\ p$		6	$+1{,}37\ p$	14
2	$+2{,}31\ s$		4	$+1{,}48\ s$	15

$\lambda = 4171{,}65$			$\lambda = 4093{,}32$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
8	$-1{,}48\ s$	$6\times{,}25$	1+	$-1{,}77\ s$	$6\times{,}355$(?)
8	$-1{,}26\ p$	5	2	$-\ {,}90\ p$	3
6	$-\ {,}26\ s$	1	2	$-\ {,}67\ s$	2 (?)
6	$0\ p$	0 [2])	3	$0\ p$	0
6	$+\ {,}26\ s$		3	$+\ {,}66\ s$	$7\times{,}10$
4	$+1{,}24\ p$		2	$+\ {,}93\ p$	9
3	$+1{,}50\ s$		1+	$+1{,}78\ s$	18
2	$[+3{,}02\ s]$	12 (?) (*a*)			

$\lambda = 4068{,}9$			$\lambda = 4055{,}2$			$\lambda = 3368{,}01$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
2	$-1{,}55\ s$		2	$-1{,}11\ s$	$2\times{,}53$	1	$-1{,}71\ s$	$4\times{,}48$
2	$-1{,}16\ p$		6	$-\ {,}56\ p$	1	8	$-1{,}25\ p$	3
2	$-\ {,}49\ s$		8	$-\ {,}53\ s$	1	2	$-\ {,}88\ s$	2
6	$0\ p$	[3])	8	$0\ p$	0	3	$0\ p$	0
2	$+\ {,}49\ s$		4	$+\ {,}49\ p$	[3])	2	$+\ {,}88\ s$	
2	$+\ {,}83\ p$		8	$+\ {,}53\ s$		8	$+1{,}25\ p$	
2	$+1{,}55\ s$		2	$+1{,}11\ s$		1+	$+1{,}68\ s$	

1) Die schwache, mittlere parallele Komponente ist unsymmetrisch.

2) Die Linie ist unsymmetrisch in den Intensitäten, mit einer möglichen Extrakomponente nach der violetten Seite. Dies kann eine fremde Linie sein. Sie erscheint nicht auf den Platten mit schwächerem Felde.

3) Das äußere, schwache parallele Paar von Komponenten ist nicht symmetrisch.

Die folgenden 16 Linien haben je **sechs Komponenten.**

$\lambda = 4590{,}81$			$\lambda = 4438{,}23$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
2	$-1{,}74\,s$	3 × ,55	2	$-1{,}57\,s$	3 × ,55
6	$-1{,}11\,p$	2	6	$-1{,}07\,p$	2
2	$-\ ,55\,s$	1	2	$-\ ,57\,s$	1
2	$+\ ,55\,s$		2	$+\ ,55\,s$	6(?) × ,10
5	$+1{,}11\,p$		6	$+1{,}07\,p$	11
2	$+1{,}67\,s$		2	$+1{,}60\,s$	16

$\lambda = 4431{,}70$			$\lambda = 4403{,}67$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
6	$-2{,}73\,s$	5 × ,55	5	$-2{,}11\,s$	8 × ,26
6	$-1{,}67\,s$	3	15	$-\ ,76\,p$	3
12	$-1{,}12\,p$	2	12	$-\ ,48\,s$	2
12	$+1{,}12\,p$		12	$+\ ,48\,s$	
6	$+1{,}67\,s$		15	$+\ ,76\,p$	
6	$+2{,}74\,s$		5	$+2{,}11\,s$	

$\lambda = 4110{,}29$			$\lambda = 4040{,}49$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
6	$-1{,}54\,s$	4 × ,39	2	$-2{,}08\,s$	8 × ,26
8	$-1{,}17\,p$	3	10	$-\ ,77\,p$	3
1+	$-\ ,77\,s$	2	8	$-\ ,51\,s$	2
1+	$+\ ,77\,s$		8	$+\ ,51\,s$	
8	$+1{,}17\,p$		10	$+\ ,77\,p$	
6	$+1{,}54\,s$		2	$+2{,}12\,s$	

$\lambda = 3554{,}31$			$\lambda = 3507{,}80$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
2	$-2{,}67\,s$	6(?) × ,48	6	$-2{,}78\,s$	
6	$-1{,}72\,s$	4	1+	$-[1{,}05]\,s$	
10	$-\ ,42\,p$	1	5	$-\ ,90\,p$	
10	$+\ ,42\,p$	4 × ,10	5	$+\ ,90\,p$	
6	$+1{,}72\,s$	17	1+	$+[1{,}08]\,s$	
2	$+2{,}67\,s$	27	6	$+2{,}75\,s$	

$\lambda = 3498{,}00$			$\lambda = 3483{,}70$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
1+	$-2{,}51\,s$	5 × ,50	4	$-1{,}82\,s$	5 × ,36
6	$-1{,}48\,s$	3	16	$-1{,}08\,s$	3
3	$-\ ,44\,p$	1 (?)	20	$-\ ,38\,p$	1
2	$+\ ,44\,p$		20	$+\ ,38\,p$	
6	$+1{,}48\,s$		16	$+1{,}08\,s$	
1+	$+2{,}45\,s$		4	$+1{,}80\,p$	

$\lambda = 3482{,}96$			$\lambda = 3396{,}51$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
4	$-1{,}10\,s$	3 × ,36	2	$-1{,}06\,p$	3 × ,34
4	$-\ ,72\,p$	2	6	$-\ ,67\,s$	2
4	$-\ ,70\,s$	2	6	$-\ ,33\,p$	1
4	$+\ ,70\,s$		6	$+\ ,33\,p$	
6	$+\ ,72\,p$		6	$+\ ,67\,s$	
4	$+1{,}10\,s$		2	$+\ ,95\,p$	

$\lambda = 3323{,}21$			$\lambda = 3318{,}70$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
8	$-\ 1{,}91\ s$	5 × ,38	—	$-[1{,}53]\,s$	
2	$-[1{,}15]\,s$	3	1+	$-[\ ,72]\,s$	
12	$-\ ,41\ p$	1	5	$-\ ,69\ p$	
12	$+\ ,41\ p$		5	$+\ ,69\ p$	
2	$+[1{,}15]\,s$		1+	$+[\ ,74]\,s$	
8	$+\ 1{,}91\ s$		5	$+\ 1{,}45\ s$	

$\lambda = 3313{,}89$			$\lambda = 3155{,}90$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
1+	$-[2{,}39]\,s$	6 × ,40	2	$-2{,}10\,s$	8 × ,26
8	$-\ 1{,}69\ s$	4	6	$-\ ,77\,p$	3
6	$-\ ,40\ p$	1	8	$-\ ,51\,s$	2
6	$+\ ,40\ p$	4 × ,10	8	$+\ ,51\,s$	
8	$+\ 1{,}68\ s$	17	6	$+\ ,77\,p$	
1+	$+[2{,}39]\,s$	24	2	$+2{,}10\,s$	

Die elf folgenden Linien haben je fünf Komponenten.

$\lambda = 5350{,}5$			$\lambda = 4236{,}23$			$\lambda = 4187{,}30$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
8	$-1{,}42\ s$	$3\times{,}48$	8	$-1{,}47\ s$		5	$-2{,}92\ s$	$9\times{,}32$
4	$-\ {,}49\ p$	1	2	$-\ {,}66\ p$		4	$-1{,}26\ p$	4
2	$0\ s$	0	4	$0\ p$		8	$0\ p$	0
3	$+\ {,}49\ p$		2	$+\ {,}66\ p$		4	$+1{,}24\ p$	
4	$+1{,}44\ s$		8	$+1{,}47\ s$		5	$+2{,}92\ s$	
				$[2{,}20]?s$				

$\lambda = 4061{,}70$			$\lambda = 4046{,}30$			$\lambda = 3501{,}50$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
10	$-1{,}79\ s$	$7\times{,}26$	2	$-1{,}65\ s$	$2\times{,}83$	6	$-2{,}00\ s$	$3\times{,}67$
4	$-\ {,}52\ p$	2	4	$-\ {,}84\ p$	1	4	$-\ [{,}70]\ p$	1
6	$0\ p$	0	8	$0\ s$		2	$0\ s$	0
3	$+\ {,}51\ p$		4	$-\ p$		2	$+\ [{,}70]\ p$	$7\times{,}10$
10	$+1{,}79\ p$		2	$+1{,}65\ s$		4	$+2{,}00\ s$	20

$\lambda = 3471{,}31$			$\lambda = 3432{,}59$			$\lambda = 3376{,}42$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
6	$-\ {,}87\ s$	$9\times{,}10$	2	$-1{,}71\ s$		2	$-1{,}10\ p$	$3\times{,}37$
12	$-\ {,}30\ p$	3	8	$-\ {,}94\ p$		2	$-\ {,}38\ p$	1
6	$+\ {,}30\ p$	3	15	$0\ s$		10	$0\ s$	0
4	$+\ {,}49\ s$	5	8	$+\ {,}94\ p$		2	$+\ {,}38\ p$	
2	$+1{,}20\ s$	12	2	$+1{,}71\ s$		1+	$+1{,}17\ p$	

$\lambda = 3271.30$			$\lambda = 3099{,}42$		
i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
2	$-[1{,}38]\ s$		1+	—	
8	$-\ {,}63\ p$		5	$1{,}31\ p$	
12	$0\ s$		3	$0\ p$	
8	$+\ {,}63\ p$		5	$1{,}31\ p$	
2	$+[1{,}38]\ s$		1+	—	

Linie 5350,5 ist unsymmetrisch in der Intensität. Die Linie 3471,31 ist unsymmetrisch sowohl in der Intensität als auch in der Zerlegung. Duplikate sind nicht vorhanden.

Die folgenden 89 Linien sind in vier Komponenten zerlegt.

λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A	λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	A
4582,50	3	$\mp$1,02 *s*	2×,51	4017,16	6	1,13	3×,42
	2	,52 *p*	1		8	,43	1
4456,50	30	,83	3×,28	4004,51	2	1,00	5×,20
	30	,56	2		5	,79	4
4455,64	2	1,20	3×,42	4003,28	8, 10	2,05	7×,29
	2	,84	2		6, 4	,29	1
4455,08	12	1,21	3×,42	3999,18	100	1,17	3×,42 (?)
	15	,46	1		100	,85	2
4429,28	3	1,58	3×,51	3973,68	20	1,14	2×,57
	5, 3	,49	1		15	,57	1
4420,70	15	1,82		3934,99	20	1,14	2×,57
	15	,71			15	,57	1
4414,80	20	1,58	5×,32	3916,16	25	,85	4×,22
	20	,63	2		20	,24	1
4413,28	12	1,76		3894,00	5, 3	[,89]	4×,22
	15	,53			2, 4	[,67]	3
4394,73	—	—		3891,61	25	1,28	13×,10
	7, 5	,60			25	,70	7
4349,10	2	[1,23]	3×,40	3890,58	30	1,29	4×,30 ?
	2	,77	2		30	,29	1
4312,47	4	1,27	3×,42	3817,80	30, 20	,81	
	4	,41	1		20	,35	
4309,20	8	1,25	3×,42	3782,45	3, 5	[,72]	
	8	,85	2		7	,73	
4256,66	6	1,50	6×,25	3674,98	50	,63	3×,21
	6, 4	,27	1		50	,42	2
4224,42	—	—		3663,81	20	1,27	3×,42
	5	1,08			15, 12	,42	1
4199,30	15	1,47	3×,48	3650,90	6	1,49	2×,75
	12	,46	1		5	,76	1
4077,27	—	—		3634,33	10	1,36	4×,34
	5	,38			10, 6	,35	1
4071,30	8	1,68		3629,29	2	1,09	
	10	,58			2	,71	
4043,77	15	1,48	3×,50	3624,10	25	1,16	
	15	,54	1		25, 20	,33	
4036,10	20	1,30	4×,33	3613,30	40	[1,03]	
	20	,67	2		30	,95	
4034,30	6	1,33	4×,33	3612,61	3	,59	
	4	,32	1		3	,41	
4031,57	2	1,66	4×,42	3588,15	20	,58	2×,29
	3	,41	1		20	,29	1
4025,16	25	[1,39]		3578,40	20	$\mp$2,01 *s*	7×,29
	25	,73			20, 15	,28 *p*	1
4024,20	25	$\pm$1,54 *s*	3×,51	3569,03	2	[—]	
	20	,55 *p*	1		2	,47	

λ	i	Δλ/λ²	A	λ	i	Δλ/λ²	A
3568,32	6	1,17	4×,30	3357,42	25, 20	,59	3×,20
	6	,90	3		25, 20	,40	2
3552,20	50	1,27	3×,42	3338,07	4	1,98	
	50	,77	2 (?)		2	1,17	
3530,17	6	1,21	3×,42	3310,10	4	—	
	5, 4	,45	1		4	1,45	
3514,79	4	1,23	3×,42	3296,59	6	1,49	3×,50
	4	,84	2		4	[,47]	1
3505,67	60	1,67	4×,42	3287,46	2	—	
	60	,41	1		2	,54	
3485,48	10	1,74		3284,89	20	,65	2×,33
	8	1,11			20	,35	1
3480,59	15	1,57	3×,51(?)	3274,14	4	1,46	2×,75
	15	,98	2		4	,78	1
3478,98	2	[,87]		3264,96	4	1,46 *s*	3×,50
	6	,50			4	[,51] *p*	1
3470,10	2	[1,59]	6×,27	3229,00	15	1,36	3×,45
	4	1,33	5		15, 12	,46	1
3460,10	2, 3	[1,22]		3213,01	4	1,10	2×,53(?)
	3	,72	2		4	,50	1
3454,71	3	,61	1×,60	3182,15	—	—	
	4	1,18	2		5	,67	
3440,54	5	0,+	*p* > *s*	3181,79	8	1,56	
	6	1,11			8	1,45	
3437,30	25	1,42	2×,71	3178,30	8	1,65	4×,42
	25	,72	1		8	,87	2
3434,08	5	1,58	4×,39	3166,48	—	—	
	10	1,19	3		6	,61	
3424,97	4	,93	2×,42(?)	3165,68	4	1,60	
	10, 8	,41	1		4	,49	
3413,55	2	[1,55]	13×,12	3164,54	12	1,09	11×,10
	4	1,43	12		6	,40	4
3394,96	4	1,76		3157,19	6	1,16	3×,42(?)
	4	,94			3	,81	2
3378,47	4	—		3111,09	4	1,46	
	4	1,43			6	,55	
3377,61	8	1,45		3095,29	8	1,25	5×,25
	6, 4	,61			8	,76	3
3369,42	4	1,64	4×,42	3031,04	3	—	
	4	,44	1		2	,66	
3364,00	8	∓1,33 *s*	3×,42				
	8	,84 *p*	2				

Eine auffallende Verwandtschaft zwischen den Komponenten einer Linie scheint zwischen einer großen Zahl dieser Quadruplette zu bestehen. Das Intervall von 0,42 wiederholt sich sehr oft bei vielen Linien, aber die Faktoren, mit denen dies Intervall multipliziert werden muß, um die Zerlegungen der Linien zu bekommen, sind ganz verschieden, so daß es wenig Duplikatlinien gibt. Einige von diesen Linien sind offenbar Paare.

Die folgenden 410 Linien sind Triplette.

λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$
5665,4	2, 4	∓1,25	4645,01	6, 12	∓ ,76
36,0	1+, 3	[,83]	34,20	15, 30	1,09
5504,7	6, 12	,59	29,33	6, 12	1,20
02,5	6, 12	,99	26,62	8, 15	1,21
5492,2	5, 10	,83	14,20	6, 12	1,03
69,8	8, 16	,56	04,59	3, 6	2,34
65,6	1+, 3	[1,01]	02,80	10, 20	1,27
53,8	6, 12	,66	4584,44	1+, 3	[1,02]
46,0	6, 10	,76	76,37	1+, 3	,71
00,7	8, 15	,68	75,78	15, 30	,91
5385,6	8, 15	1,24	74,78	6, 12	,94
57,5	8, 15	,66	65,68	3, 6	,95
5191,7	10, 20	1,30	54,29	8, 16	1,10
43,5	6, 12, 8	,62	53,25	3, 6	,54
38,4	10, 20	,62	42,49	12, 25	1,59
14,2	2, 4	[,90]	40,19	2, 6	[1,31]
5079,6	1+, 3	[,62]	36,00	10, 20	,94
66,9	2, 5	,95	23,33	3, 6	1,35
4839,3	2, 5, 4	,75	07,39	8, 15	1,10
28,5	4, 6, 3	,70	4497,27	30, 60	,94
24,8	4, 8	1,27	94,78	15, 30	1,20
16,1	12, 24	,78	85,71	2, 4	[2,35]
10,0	4, 8	1,19	82,72	4, 8	1,24
06,5	4, 8	1,27	81,00	5, 10	1,28
4789,3	3, 6	,95	70,80	10, 20	1,08
85,6	6, 12	,99	68,98	3, 8	1,29
72,1	15, 30	,90	67,12	6, 12	1,53
62,8	2, 4	1,13	61,50	8, 15	1,18
39,6	20, 4	1,04	60,57	2, 4	1,27
19,3	8, 16	1,17	50,71	5, 10	2,73
12,2	3, 6	1,31	43,31	30, 60	1,07
10,3	25, 50	1,18	29,55	1+, 3	[1,61]
03,3	2, 4	[1,41]	27,44	8, 15	1,09
4688,7	5, 8	1,14	04,98	6, 12	1,44
88,0	30, 60	1,32	4383,90	6, 12	1,31
85,5	3, 8	1,11	80,12	50, 100	1,15
83,6	8, 16	1,19	73,28	1+, 3	[2,32]
67,4	1+, 3	[1,24]	71,27	20, 40	1,18
62,0	3, 8	1,05	66,69	15, 30	1,22
57,9	4, 8	1,18	61,01	6, 12	1,62

λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$
4360,05	50, 100	∓1,26	4218,60	4, 8	∓1,86
58,95	5, 10	1,32	15,95	4, 8	,84
48,15	50, 100	1,12	15 50	6, 12	1,42
46,70	5, 10	,84	12,17	25, 50	,62
43,59	1+, 3	[1,23]	11,50	4, 8	1,57
43,23	2, 4	1,06	10,87	10, 20	1,57
41,40	5, 10	1,36	09,21	50, 100	,97
39,80	3, 6	1,86	01,69	20, 50	1,69
37,90	8, 15	1,34	4196 32	8, 15	1,85
33,59	15, 30	1,24	95,00	10, 20	1,84
24,24	8, 15	1,06	94,66	2, 4	1,20
19,24	4, 8	1,24	92,03	4, 8	[1,14]
17,57	12, 25	1,26	91,75	3, 5	,77
09,99	4, 8	1,68	87,80	20, 30	1,60
04,92	8, 15	1,45	86,89	20, 30	1,63
03,12	20, 40	1,67	83,51	10, 20	1,77
02,80	2, 4	1,67	80,08	25, 40	1,40
02,10	8, 16	,88	68,90	6, 10	1,28
4297,00	12, 25	1,50	66,60	15, 30	1,50
95,08	25, 30	1,69	61,48	30, 50	,71
93,41	15, 30	,75	53,96	8, 15	2,38
91,54	5, 10	1,63	52,87	15, 30	1,59
91,38	4, 8	1,62	51,23	20, 50	1,39
86,78	6, 12	,76	49,43	150, 300	1,27
82,53	8, 15	1,82	47,53	6, 10	1,20
77,60	6, 12	1,42	40,70	5, 10	1,86
76,91	6, 12	1,67	38,02	6, 10	,33
74,95	6, 12	1,20	35,85	10, 20	1,50
65,17	4, 8	1,52	34,46	4, 8	[1,66]
61,65	6, 12	1,11	21,68	12, 20	1,70
61,42	2, 5	[,90]	08,60	10, 20	1,67
53,76	8, 15	2,14	07,75	6, 10	,99
48,74	2, 4	[1,44]	4099,50	4, 6	[1,89]
41,98	20, 40	1,27	96,80	15, 30	,90
41,50	15, 30	1,11	94,42	6, 10	1,46
39,58	30, 20	1,49	91,00	6, 10	,66
37,57	4, 8	2,18	90,70	30, 50	,91
36,81	6, 12	[,85]	89,98	8, 15	1,00
34,89	8, 16	1,25	87,88	5, 10	1,74
31,88	10, 20	1,34	84,50	8, 15	1,18
27,98	40, 60	1,51	83,29	6, 12	1,58
22,67	4, 8	,70	81,48	30, 50	1,33

λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$
4078,49	6, 12, 8	∓1,66	3916,80	6, 12	∓1,42
76,70	8, 15	1,26	14,59	10, 20	,94
75,09	12, 20	1,67	00,08	2, 4	[1,65]
72,90	40, 75	1,27	3897,82	5, 10	1,43
64,38	25, 50	1,05	96,73	10, 20	1,18
60,78	6, 10	1,03	92,19	6, 12	1,21
58,78	4, 8	,88	85,61	12, 25	1,11
55,90	15, 25	1,32	79,21	10, 20	1,35
54,60	2, 4	,56	77,78	12, 25	1,10
50,52	30, 50	1,37	64,57	25, 50	1,32
48,90	30, 50	1,34	64,12	30, 50	1,20
45,90	25, 40	,61	49,48	15, 25	1,35
42,49	8, 15	[1,38]	47,22	12, 20	1,28
41,90	10, 20	[1,64]	43,30	25, 50	1,05
30,87	2, 4	,96	36,98	75, 150	1,24
29,88	30, 50	1,77	36,18	25, 50	,76
29,17	6, 12	1,74	22,60	15, 30	,85
24,70	20, 40	[1,39]	00,91	5, 10	1,44
18,60	15, 30	1,02	3796,71	30, 50	1,80
12,48	8, 15	,94	92,55	10, 20	1,38
07,80	10, 20	1,08	91,60	15, 25	1,52
05,02	6, 12	[1,57]	86,80	4, 8	1,34
3991,31	100, 150	1,08	82,99	3, 6	[,92]
89,65	10, 15	1,33	82,45	3, 6	[,72]
84,90	10, 20	1,57	72,29	10, 20	1,55
81,79	20, 40	1,35	66,99	50, 100	1,15
78,86	6, 12	1,47	59,30	3, 6	1,27
78,35	2, 4	[1,04]	57,99	12, 25	1,31
77,60	10, 20	1,06	51,85	75, 150	1,02
75,47	12, 30	1,22	50,84	10, 20	1,30
68,39	10, 20	1,16	46,18	50, 100	1,19
66,80	10, 20	1,69	38,32	6, 10	1,47
61,71	12, 25	1,29	37,54	4, 8	1,03
58,39	75, 125	,98	35,15	12, 20	1,52
56,90	3, 6	,62	31,50	30, 50	,97
41,75	10, 15, 8	1,01	29,98	8, 15	1,87
36,28	12, 25	1,88	27,90	15, 20	1,60
31,55	2, 4	1,66	19,02	8, 12	1,59
29,71	30, 50	1,14	14,99	30, 50	1,46
26,96	3, 6	1,19	14,30	6, 10	2,05
20,35	2, 4	[1,67]	09,51	40, 75	1,20
18,25	1+, 3	[,50]	3698,41	75, 125	1,26

λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$
3697,70	20, 40	∓1,28	3526,00	25, 40	∓1,70
79,80	1+, 3	[1,37]	21,01	12, 20	1,93
79,10	15, 25	1,24	19,72	25, 40	1,19
72,81	3, 5	2,85	10,61	8, 12	1,72
71,49	25, 40	,99	09,48	20, 30	1,28
68,69	15, 25	1,73	06,23	10, 15	1,89
67,28	6, 12	1,32	05,88	75, 125	[1,44]
62,32	10, 20	,95	00,33	5, 10	1,04
61,10	3, 5	,57	3499,78	20, 30	1,64
55,72	8, 15	1,74	96,40	60, 100	1,10
53,61	2, 4	1,17	83,17	3, 5	[1,38]
51,65	2, 4	[1,44]	81,36	50, 100	1,19
36,69	15, 25	1,69	79,58	10, 15	[1,07]
33,70	12, 20	1,29	78,68	8, 12	1,68
30,30	20, 40	1,89	78,45	6, 10	1,74
19,22	6, 12	,83	63,23	30, 50	1,05
12,13	30, 50	1,44	61,22	6, 10	1,38
07,60	15, 30	1,48	57,75	25, 30	1,33
01,40	40, 75	1,24	57,30	2, 3	[1,98]
00,11	10, 15	1,11	56,02	3, 5	,59
3588,96	3, 6	1,71	47,50	10, 15	,66
88,51	12, 20	1,66	46,71	5, 8	,88
86,22	15, 30	,75	43,69	10, 15	,71
77,74	5, 8	1,16	40,70	2, 3	[1,35]
77,10	50, 75	1,39	38,89	100, 150	1,25
75,89	15, 25	1,35	30,73	40, 40	1,32
72,70	75, 125	1,04	27,23	1+, 3	[1,76]
70,25	6, 12	1,11	24,00	2, 4	1,49
66,30	15, 25	1,23	19,76	3, 6	,81
65,61	10, 20	,93	19,22	6, 6	2,02
59,23	6, 10	,80	14,87	15, 15	,86
56,89	75, 125	,94	10,44	30, 25	1,24
50,67	8, 20	1,40	08,23	12, 10	,52
49,73	20, 30	1,60	05,03	25, 20	,98
47,90	20, 30	1,39	03,89	12, 10	,60
42,87	40, 60	1,23	03,10	10, 8	1,69
39,17	5, 8	1,77	3399,95	1+, 3	[1,61]
37,11	10, 15	1,24	99,51	10, 15	,63
35,30	6, 10	1,28	96,81	2, 3	1,06
33,35	12, 20	1,83	94,96	3, 5	1,76
31,00	10, 20	1,17	93,36	15, 12	1,62
27,58	15, 25	1,19	92,20	75, 75	1,26

λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$
3388,49	40, 40	∓1,63	3234,24	10, 12	∓1,19
88,07	40, 40	,75	31,89	40, 50	1,71
83,90	2, 4	,89	29,00	15, 20	1,37
74,84	30, 15	1,50	22,61	8, 10	1,28
73,61	15, 8	1,04	14,35	40, 50	1,70
73,05	4, 6	1,05	12,17	8, 12	1,12
70,73	4, 6	1,52	3192,11	8, 12	1,27
61,35	4, 6	1,15	91,31	4, 6	,93
60,61	4, 6	1,50	83,08	30, 40	1,14
60,18	12, 10	1,03	61,12	2, 4	,94
56,28	25, 20	1,73	57,94	4, 8	,96
54,59	12, 10	1,48	38,88	20, 30	1,14
49,59	4, 4	1,12	37,08	2, 4	[1,43]
49,23	2, 2	1,02	33,70	15, 20	1,17
45,00	15, 15	1,14	32,22	2, 4	[1,09]
44,00	1+, 3	1,18	29,96	20, 30	1,01
42,10	1+, 3	1,09	29,38	20, 30	,95
27,05	15, 12	1,26	26,10	15, 20	,55
19,19	8, 6	1,63	25,33	1+, 3	[1,03]
11,53	3, 3	1,73	20,90	4, 8	1,32
06,48	30, 20	1,11	11,09	6, 10	1,46
05,33	25, 25	1,39	06,79	25, 40	1,32
02,89	8, 6	1,43	3055,00	15, 25	1,20
3288,99	12, 10	1,92	36,57	8, 12	1,55
86,01	8, 8	1,79	29,63	6, 10	1,23
85,89	2, 2	1,78	28,18	10, 15	1,00
83,09	10, 8	1,32	20,53	5, 8	1,29
80,92	2, 2	,69	19,96	1+, 3	1,19
75,28	2, 2	1,24	11,88	4, 6	1,11
74,14	4, 3	1,46	03,88	6, 10	1,37
73,22	40, 50	1,45	2985,53	4, 6	,75
69,81	4, 4	1,38	81,18	3, 5	[1,60]
60,24	4, 4	1,42	79,35	2, 4	1,29
50,62	10, 4	1,98	78,21	4, 6	1,55
47,72	6, 6	1,14	69,77	6, 10	,56
42,32	3, 3	1,88	69,10	6, 10	1,58
41,26	20, 20	1,14	62,81	5, 10	1,05
36,75	3, 4	1,68	55,92	8, 12	1,11

Die Zirkontripletten sind auf Serien hin nicht genau untersucht worden. Solch eine Untersuchung von so vielen Linien würde eine große Menge Zeit in Anspruch nehmen.

Die folgenden 29 Linien sind anscheinend nicht zerlegt.

λ	i	B	λ	i	B
5508,5	8	D	4030,26	8	[3]
5485,4	8		3989,27	2	n i
5136,0	10		00,71	15	[4]
4851,8	6	b D	3781,80	8	[5] D
15,4	4	D	24,94	5	
4400,58	6	D [1]	06,79	5	D breit
4273,80	12	[2]	3657,01	2	[6]
66,96	4		3549,90	5	
50,89	1+	D breit	3431,71	8	[2]
40,59	20	A	3362,87	8	[4]
13,45	5	A	3354,08	3	n i [7]
4181,13	8		3314,70	15	[2]
40,18	5	D etwas	3131,23	1+	D breit
28,08	12	A	3013,44	1+	[8]
4044,80	20	A			

Die meisten dieser Linien sind, wie die Noten angeben, wahrscheinlich Linien eines anderen Typus, deren Komponenten zu kleine Zerlegung haben und zu diffus sind, um eine

1) Anzeichen eines schwachen Paares externer Komponenten.

2) s-Komponente starkes Zentrum, mit einem breiten Hintergrunde von Zerstreuung an beiden Seiten. p-Komponente breit.

3) p-Komponente verbreitert.

4) Breite Linie für s-Komponente, am schärfsten und stärksten an den Ecken mit weichem Zentrum, p-Komponente scharf.

5) Die wirklichen Komponenten können durch ein Carbonband verdeckt sein.

6) Möglicherweise getrennt, aber zu schwach.

7) Nicht identifiziert. Es kann kaum Exner und Hascheks Linie 3353,80 λ sein.

8) Zu schwach und diffus. Kann vielleicht Dublette sein. Zu weit im Violett für genauere Analyse.

Analyse zu gestatten. Die mit *A* bezeichneten Linien sind *ziemlich sicher* unzerlegt; und die, die nicht bezeichnet sind, sind *wahrscheinlich* unzerlegt. Die in der Bemerkung mit 2) bezeichneten Linien sind sehr eigentümlich und wahrscheinlich gleichartig. Die Linien 5736,0, 4240,39, 3900,71 würden eine Serie bilden, aber das nächste Glied um 3750 herum und die folgenden Glieder sind nicht vorhanden.

VII. Osmium.

λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$	λ	i	$\Delta\lambda/\lambda^2$
4420,63	25	$\mp$1,20 *s*	3794,05	4	$\mp$1,29
	25	,70 *p*	90,28	6	1,83
4395,08	4	1,49	82,37	12	1,82
28,94	4	1,19	52,71	20	1,63
11,15	6	,94	3598,26	2+	[1,55]
4294,17	8	1,18	3561,04	8	1,35
		,47	59,96	4	1,58
61,01	20	1,95	28,76	5	1,61
12,02	12	1,72	04,83	4	1,55
4175,74	5	1,49	3402,03	3	1,50
73,42	10	1,44	3301,75	12	1,68
35,95	15	1,97	3268,09	6	1,61
12,17	10	1,65	3262,44	4	1,37
4091,99	3	1,81	3156,38	4	1,62
66,90	8	1,54	3058,77	8	1,55
3977,88	6	1,54	2909,19	10	1,40
63,79	8	1,59			
3882,03	7	1,65			

Osmium wurde als eine Substanz ausgewählt, die weniger Linien besitzt, wobei einige Typen sich durch einen großen Bereich des Spektrums wiederholen. Mit Ausnahme eines schwachen Quadruplett sind die Linien alle Triplette mit Zerlegungen zwischen ,70 und 1,97. Es gibt eine Anzahl von Paaren ähnlicher Zerlegung, aber nicht genug Vertreter für eine Serie. Wie man sieht, sind die Spektrallinien nicht stark;

daher ist eine lange Exposition im magnetischen Felde erforderlich. Ein Charakteristikum der Komponenten ist ihre große Schärfe. Die nicht verzeichneten *p*-Komponenten haben sehr gleichförmig die doppelte Intensität der *s*-Komponenten.

VIII. Vergleichung der Substanzen.

Es ist wünschenswert, die oben behandelten Substanzen mit solchen früher beobachteten zu vergleichen, welche Serien zeigen und sich auch im Magnetfelde entsprechend verhalten. Die Komponenten der beiden Yttriumlinien 4358,91 und 3195,80, die genaue Duplikate sind, wie man es bei Serien erwartet, entsprechen sechs von den neun Komponenten der Quecksilberlinie 5461 der zweiten Nebenserie. Das Quadruplett 4167,65 entspricht vier Komponenten des Bariumsextuplets 5854. Das Quadruplett 3982,75 entspricht vier Komponenten der dreizehn Komponenten der Quecksilberlinie 3663,5. Die übrigen Komponenten bei diesen drei Linien fehlen aber nicht deshalb, weil sie zu schwach sind, denn die betreffenden sind keine schwachen Linien.

Die zwei Zirkonlinien mit elf Komponenten haben zwei Paar Komponenten ähnlich zwei Paaren von Komponenten in der Neunkomponentenquecksilberlinie 5461. Sie haben zwei andere Paare von Komponenten, die in der Bariumhauptserie mit größerer Wellenlänge, Linie 4934, wiederkehren. Ihr eines übrigbleibendes Komponentenpaar findet sich in der Bariumhauptserie mit kleinerer Wellenlänge, Linie 4554. Das heißt, die Komponenten dieser beiden Linien kommen in drei Serientypen vor. Es gibt noch andere Linien sowohl bei Yttrium wie bei Zirkon, für deren Komponenten derartige Parallelen aufgestellt werden können, wenn man mehr als eine Linie von Barium und Quecksilber benutzt. Solch ein Vergleich weist aber eher auf eine Differenz, als auf eine Identität im Charakter der Linien hin.

Die obigen Tabellen zeigen, daß die Abstände der Komponenten der Linien vielfache von Grundintervallen sind, sowie daß diese Intervalle sich häufig wiederholen. Verschiedene Linien sind nur dann vollständig identisch, wenn sie dasselbe

Intervall, in demselben Vielfachen zeigen. Man darf sogar verlangen, daß die Komponenten auch dieselbe relative Intensität haben. Dies ist die Bedingung, die bei den bisher festgestellten Haupt- und Nebenserien erfüllt ist. Die Abstände in den Quadrupletten der Hauptserien sind das Vier- und Zweifache des Intervalles 0,37 ($\Delta\lambda/\lambda^2$) für die Feldstärke 24400 und die der Sextuplette der Hauptserien sind das Fünf-, Drei- und Einfache desselben Wertes.

Während ich mit der Untersuchung dieser Gesetzmäßigkeiten beschäftigt war, wurde eine Untersuchung, die sich mit der gleichen Frage befaßt, von C. Runge publiziert.[1]) Ich habe demgemäß das ganze Material, das Runges Arbeiten und die vorstehenden Beobachtungen enthalten, im folgenden systematisch geordnet in einer Tabelle eingetragen, was die Verhältnisse klarer als jede wörtliche Beschreibung veranschaulicht. Ein konstantes Intervall, das mit den gleichen Zahlen multipliziert auftritt, bedingt einen Typus nach dem Prestonschen Gesetze. Von Runges Typen habe ich nur die aufgenommen, die bei meinen Messungen sich gleichfalls ergeben haben.

Der näheren Erklärung halber sei gesagt, daß der Wert „a" in der folgenden Tabelle der Zerlegung von 1,11 für die vorausgesetzte Feldstärke entspricht; es ist dies die Zerlegung, die von C. Runge als die des „normalen Tripletts" bezeichnet ist. Dieses Triplett gab ihm den Wert $1{,}75 \times 10^7$ für e/m (Ladung durch Maße) in der Gleichung

$$a = \Delta\lambda/\lambda^2 = \frac{e}{m} \cdot \frac{H}{4\pi c},$$

c ist die Geschwindigkeit des Lichtes und H die Feldstärke. Runge spricht dann folgendes allgemeine Gesetz aus:

„Die bisher beobachteten komplizierten Zerlegungen von Spektrallinien im magnetischen Felde zeigen die folgende Eigentümlichkeit: Die Abstände der Komponenten von der Mitte sind Vielfache eines aliquoten Teiles des normalen Abstandes „a" (s. oben). Sicher beobachtet sind bisher die Teile $a/2$, $a/3$, $a/4$, $a/5$, $a/6$, $a/7$, $a/11$, $a/12$.

---

1) C. Runge, Physik. Zeitschr. 8. p. 15. 1907.

Tabelle der Intervalle.

Intervalle od. approx. Teil von „a“	Vielfache der Intervallfaktoren	Linien vorhanden	Substanz, zu der der Typus gehört	Bemerkungen	λ
	22, 15, 12, 7	1	Zr		3459,1
	22, 16, 10, 9	1	Zr		4440,80
	13, 7	1	Zr		3891,61
(a/11) ,10	15, 13, 11, 2, 0	1	Ne	[6])	
	20, 16, 14, 12, 8, 8, 4	1	Hg	[4]) 1 N. S.	3655,
	12, 7	1	Os		4420,68
a/9 (?) ,12	7, 4	1	Y		5510,1
,18	7, 5, 4, 3, 2	1	Y		4235,89
a/6 ,185	10, 9, 8, 7, 6, 2, 1, 0	1	Ne	[6])	
,185	14, 9, 5, 2, 0	1	Ne		
,19	9, 7, 5, 2, 0	1	Y		4398,21
	9, 6, 4, 3	1	Y		4083,89
	7, 6	1	Y		4682,5
	5, 1	1	Y		4375,11
(2 a/11) ,20	5, 2	1	Y		4177,68
	5, 4	1	Zr		4004,51
	10, 8, 7, 6, 4, 2	1	Hg	[6])	
,21	3, 2	1	Zr		3674,98
	9, 7, 3, 1	1	Y		4236,10
	4, 3	1	Zr		3894,00
	4, 1	1	Zr		3916,16
(a/5) ,22	8, 7, 6, 5, 2, 1	1	Ne		
	8, 5, 4, 3		Cu, Ag, Al, Tl	1 N. S. [6])	
	8, 5, 4, 3		Ba	1 N. S. [1])	
	8, 4		Cu, Ra, Ag, Tl	1 N. S. [1])	
(2a/9)? ,25	6, 5, 1, 0	1	Zr		4171,65
	6, 1	1	Zr	3 a/11 (5, 1)	4256,66
	6, 5, 3, 0	1	Zr	a/11 (15, 14, 8, 0)	4258,31
(3a/13)? ,26	8, 3, 2	3	Zr	a/11 (21, 8, 5) Vgl. Zr 6 Komp.	
	7, 2, 0	1	Zr	a/11 (18, 5, 0)	4061,70
,265	8, 5, 3, 2, 0	1	Y		3584,71
	6, 5	1	Zr	a/10 (16, 13)	3470,10
a/4 ,27	6, 5, 4, 1, 0	1	Ne		
,27	7, 5, 4, 3	2	Zr	Vgl. Zr 8 Komp.	
	3, 2	1	Zr		4456,50
,29	7, 1	2	Zr	λ =	4003,28 3578,40
	2, 1	1	Zr		3588,15

Intervalle od. approx. Teil von „a“	Vielfache der Intervallfaktoren	Linien vorhanden	Substanz, zu der der Typus gehört	Bemerkungen	λ
	5, 2 (?)	1	Ba		5971,9
	4, 1	1	Y		3833,10
$a/11$,30	4, 1	1	Zr		3890,58
	4, 3	1	Zr		3568,32
,305	6, 3, 2, 0	1	Zr	$a/11$ (18, 9, 7, 0)	4093,32
	9, 4, 0	1	Zr		4187,30
,32	5, 2	1	Zr		4418,80
	4, 2	1	Zr		4034,30
$a/10$,33	4, 1	1	Zr		4031,57
	2, 1	1	Zr		3284,89
,34	3, 2, 1	1	Zr		3396,51
	4, 1	1	Zr		3634,33
	5, 3, 1	1	Zr		3483,70
,36	3, 2, 2	1	Zr	[4])	3482,96
	5, 3, 1	2	Ba	H. und 2 N. [2])	
	4, 2	2	Ba		
	4, 2	1	Y		3200,44
$a/3$,37	3, 1, 0	1	Zr		3376,42
	6, 4, 3, 2, 1, 0	2	Zr	Vgl. Zr 11 Komp.	
	5, 3, 1	1	Zr		3323,21
,38	5, 1, 0	1	Y		4477,1
	4, 1, 0	1	Y		3951,76
	4, 3, 2	1	Zr		4110,29
$\frac{1}{4}a/11$) ,39	4, 3	1	Zr		3434,08
	4, 3, 2, 1, (0?)		Hg	1 N. II. h.	3125,8
	3, 2	8	Zr		
	3, 1	6	Zr	Vgl. Zr-Quadrupletten-Tabelle	
,42	4, 1	3	Zr		
	4, 2	2	Zr		
$3\,a/8$	2, 1	1	Zr		
	5, 4, 2, 1, 0	2	Zr	Vgl. Zr 9 Komp.	
	4, 3, 2, 0	1	Zr		3368,01
,43	6, 4, 1	1	Zr	$a/10$ (27, 17, 4)	3554,31
	4, 3, 2, 2, 1, 1	1	Y	[4])	3818,49
,48	3, 1, 0	1	Zr		5350,5
	5, 3, (1?)	1	Zr		3498,00
	3, 1	3	Zr	Vgl. Zr 4 Komp.	
$\frac{5}{6}a/11$,50	3, 2, 1, 1, 0	1	Y	[4])	3950,51
	3, 1	2	Y	Vgl. Y-Quadrupletten	

Intervalle d. approx. Teil von ΔT		Vielfache der Intervall-matrizen	Multiplen vorhanden	Substrate an der der Typus primär	Bemerkungen	λ

Bezüglich der Diskussion dieser Tabelle muß auf die Dissertation verwiesen werden.

IX. Schlußfolgerungen.

1. Die Linien der Tripletklasse bei Barium ordnen sich zumeist in Gruppen mit Abständen, die den Abständen zwischen einigen Komponentensystemen von komplizierteren Typen nahe liegen.

2. Die große Mehrzahl der Abstände in Liniensystemen mit mehr als drei Komponenten stellen sich das als ganzzahlige Vielfache gewisser fundamentaler Intervalle, wobei die Faktoren *kleine* Zahlen sind. Die kleinsten Intervalle sind nach Runge aliquote Teile von „a", wobei „a" die Zerlegung der „normalen Triplette" ist. Runge fand kürzlich bei Neon die aliquoten Intervalle $a/2$, $a/3$, $a/4$, $a/5$, $a/6$, $a,7$, $a/11$, $a/12$. Alle, ausgenommen $a/12$, sind auch bei der gegenwärtigen Untersuchung beobachtet worden.

3. Die große Mannigfaltigkeit in den magnetischen Zerlegungen ergibt sich hauptsächlich durch die Variation der Intervall*faktoren* an Zahl und Größe; durch sie entstehen die verschiedenen Typen der Zerlegung.

4. Das Intervall 0,37 ($= a/3$) mal vier und zwei, sowie mal fünf, drei und eins, gibt die Quadruplett- bzw. Sextuplett-Haupt- und zweite Nebenserien, die von Runge und Paschen bei Na, Cu, Ag, Al, Tl, Mg, Ca, Sr, Ba, Ra gefunden wurden. Das Quadruplett hat einen zweifelhaften Vertreter bei Yttrium, und das Sextuplett kommt bei einer Zirkonlinie vor. Indessen erscheint dasselbe Intervall kombiniert mit Faktoren in anderen Verhältnissen in neun neuen Typen. Einer der Typen von Hg, erste Nebenserie, hat einen vereinzelten Vertreter bei diesen Substanzen; aber das gleiche Intervall tritt bei ihnen in mindestens 18 neuen Typen auf.

5. Die Spektren von Yttrium und Zirkon ergeben eine große Zahl neuer Typen.

6. Die hervorragendste Charakteristik der zahlreichen neuen Typen ist die Tatsache, daß sie sich innerhalb des mir zugänglichen Spektralbereiches nicht wiederholen. Es würde interessant sein, die Messungen weiter in das Ultraviolett hinein mit einem viel stärkeren Felde auszudehnen, um zu

sehen, ob nicht doch Wiederholungen und sogar Serien vorkommen.

7. Das Intervall 0,42 (= $3a/8$) bei Zirkon ist das einzige, das Serientypen zu versprechen scheint. Es liefert bei dieser Substanz acht Quadruplette von einem Typus und sechs von einem anderen; aber trotzdem ließen sich keine Serien finden.

8. Es gibt sechs Linien bei Yttrium, die mit sieben Linien bei Zirkon übereinstimmen und diese enthalten drei Typen. Dies sind kaum genug Übereinstimmungen, um eine Ähnlichkeit der Substanzen vermuten zu lassen, die indessen chemisch besteht. Die Substanzen sind parallele Glieder in zwei benachbarten (der dritten und vierten) Mendelejeffschen Gruppen.

9. Das eine Quadruplett bei Osmium hat ein für die erste Nebenserie charakteristisches Intervall; aber trotzdem ist es nicht von letzterem Typus.

10. Eine Untersuchung der Triplette auf Serien hin ist sehr umständlich. Es ist häufig von Vorteil, sie (wie beim Barium) in Gruppen zu teilen. Sie sehen dann wie kompliziertere Typen mit fehlenden Komponenten aus. Aber bei Yttrium und Zirkon würde man in Verlegenheit sein, zu wissen, welcher Typus zum Vergleich heranzuziehen wäre. Die Yttriumplatten sind sehr ausführlich auf Serien hin untersucht worden, ohne daß ein Ergebnis erzielt wäre. Bei Zirkon hat die Zeit das Studium von nur wenigen Triplettentypen gestattet. Die Resultate sind gleicherweise negativ ausgefallen. Die in den Triplettenwerten auftretenden Abstände erstrecken sich über einen großen Raum. Sie gruppieren sich nicht um eine „normale Zerlegung“ herum oder um Vielfache von aliquoten Teilen einer normalen Zerlegung.

11. Die unzerlegten Linien bei Zirkon zeigen keine Serien. Die meisten dieser Linien sind übrigens wahrscheinlich von komplizierterem Bau und nur mit den verfügbaren Mitteln nicht auflösbar.

12. Es gibt in den von mir untersuchten Spektren eine große Menge von Linien, die in Paaren angeordnet werden können. Solche Linien liegen meist verhältnismäßig nahe beieinander auf der Schwingungsskala. Die Paare können dieselbe Zerlegung haben oder nicht, und haben dieselbe oder

eine verschiedene Zahl von Komponenten. Bei Substanzen, die Serien ergeben haben, sind solche Paare häufig gefunden. Diese Paare wiederholen sich dann in anderen Teilen des Spektrums mit beträchtlicher Gleichmäßigkeit der Schwingungsdifferenzen. Bei Osmium sind keine Wiederholungen vorhanden, und bei Yttrium und Zirkon nur anscheinend, da die Abstände der Schwingungsdifferenz der anscheinenden Paare sehr unregelmäßig sind.

X. Allgemeine Schlußfolgerung.

Es besteht eine allgemeine Unähnlichkeit zwischen den Zerlegungen der Spektrallinien von Yttrium und Zirkon, sowie zwischen diesen und den Linien aller Substanzen, die Serien ergeben haben. Aber alle Substanzen haben gemeinsame Fundamentintervalle von kleiner Größe und geringerer Zahl, die meist innig verbunden sind mit einer „normalen Zerlegung".

Zum Schlusse möchte ich Hrn. Prof. Voigt, auf dessen Veranlassung hin diese Untersuchung unternommen wurde, für seine freundliche Beihilfe und begeisternde Ermutigung danken. In gleicher Weise bin ich Hrn. Prof. Runge zu Danke verpflichtet, der mir seine unschätzbare Erfahrung in Spektralarbeiten in liebenswürdiger Weise zur Verfügung gestellt hat.

(Eingegangen 19. Januar 1908.)

8. *Über Lösungen in Gemischen von Alkohol und Wasser;* *von Ernst Cuno.*

(Auszug aus einer Inaugural-Dissertation, Erlangen 1907.)

I. Teil.

Schichtenbildung in Gemischen von Alkohol, Wasser und Salz.

Historisches.

Über Schichtenbildung in Gemischen von Alkohol, Wasser und Salz liegt bereits eine Reihe Untersuchungen vor, so von Schiff[1]), Gérardin[2]), Scheibler[3]), Traube und Neuberg[4]), Bodländer[5]) sowie Fleckenstein.[6]) H. Schiff fand bei seinen Untersuchungen über die Löslichkeit von Mangansulfat in Alkohol-Wassergemischen, daß sich die Lösung in zwei durch eine scharfe Trennungsfläche voneinander geschiedene Schichten schied. Dasselbe fand später G. Bodländer bei Ammoniumsulfat, und J. Traube und O. Neuberg zeigten, daß auch andere Substanzen die Fähigkeit besitzen, in Gemischen von Wasser und Äthylalkohol Schichtenbildung hervorzurufen, so Kalium- und Natriumhydroxyd, Kalium- und Natriumkarbonat, Natrium-, Magnesium- und Zinksulfat und noch andere Salze und Basen.

Die Zusammensetzung der beiden Schichten wurde von Traube und Neuberg bei Gemischen von Wasser, Äthylalkohol und Ammoniumsulfat bei verschiedenen Temperaturen, verschiedenem Alkohol- und Salzgehalt näher untersucht; sie konnten feststellen, daß mit wachsender Temperatur

1. in der oberen Schicht eine Abnahme des Wasser- und Salzgehaltes, eine Zunahme des Alkoholgehaltes,

1) H. Schiff, Lieb. Ann. 118. p. 362. 1861.
2) A. Gérardin, Ann. chim. phys. (4) 5. p. 129. 1865.
3) C. Scheibler, Chem. Ber. 5. p. 348. 1872.
4) J. Traube u. O. Neuberg, Zeitschr. f. phys. Chem. 1. p. 509. 1887.
5) G. Bodländer, Zeitschr. f. phys. Chem. 7. p. 308. 1891.
6) A. Fleckenstein, Erlanger Dissertation 1904.

2. in der unteren Schicht eine Zunahme des Wassergehaltes und eine Abnahme des Salz- und Alkoholgehaltes erfolgte; weiterhin, daß mit wachsendem Alkohol- oder Salzgehalt der Mischung

1. in der oberen Schicht eine Abnahme des Wasser- und Salzgehaltes, eine Zunahme des Alkoholgehaltes,

2. in der unteren Schicht eine Abnahme des Alkoholgehaltes und eine Zunahme des Salzgehaltes eintritt, während die Wassermenge erst zu- dann abnimmt.

Fleckenstein hat die Schichtenbildung in Gemischen von Wasser, Alkohol und Ammoniumnitrat untersucht, und über den Eintritt der Schichtenbildung und die Volumänderung der beiden Schichten mit der Temperatur genauere Untersuchungen angestellt, jedoch hat er eine Analyse der beiden Schichten nur in einem Fall durchgeführt.

Aus diesen mir am Beginn meiner Arbeit bekannten Untersuchungen läßt sich jedoch nichts allgemeines über den Eintritt der Schichtenbildung, das Volumen der beiden Schichten oder die Verteilung der drei Komponenten in den beiden Schichten aussagen. Daher habe ich auf Veranlassung von Hrn. Prof. Dr. E. Wiedemann unternommen, die Gesetzmäßigkeiten, die bei der Schichtenbildung in Äthylalkohol-, Wasser- und Salzgemischen zu beobachten sind, näher zu untersuchen.

Gegen Ende meiner Untersuchungen erhielt ich Kenntnis von den umfangreichen Arbeiten von F. A. H. Schreinemakers[1]) und B. R. de Bruyn[2]), die auch Fleckenstein unbekannt waren. B. R. de Bruyn untersuchte das System Kaliumkarbonat, Äthylalkohol und Wasser; er richtete jedoch sein Hauptaugenmerk auf die Zusammensetzung der Lösungen, die mit einem festen Hydrate des Kaliumkarbonats im Gleichgewicht sind.

Theoretisches.

Die nachfolgenden Ableitungen stützen sich auf die Annahme, daß zwischen den beiden Schichten vollkommenes

1) F. A. H. Schreinemakers, Zeitschr. f. phys. Chem. **22.** p. 93 und p. 515. 1897 sowie **25.** p. 305. 1898.

2) B. R. de Bruyn, Zeitschr. f. phys. Chem. **32.** p. 68. 1900.

Gleichgewicht herrscht. Ein solches Gleichgewicht besteht z. B. zwischen einer gesättigten Lösung eines Salzes in Wasser und dem Salz als Bodenkörper. Hier kann man beliebig viel von den beiden Phasen entfernen, ohne daß der Gleichgewichtszustand geändert wird, d. h.: daß weder Salz in Lösung geht, noch sich ausscheidet. Ebenso kann man auch bei zwei übereinandergelagerten Schichten beliebige Mengen von der oberen oder unteren Schicht entfernen, ohne daß sich die Zusammensetzung der beiden Schichten, auch nach dem Schütteln, ändert. Die andere Annahme, daß nämlich ein Teil der unteren Schicht mit einem Teil der oberen Schicht oder die ganze untere Schicht mit der ganzen oberen Schicht im Gleichgewicht steht, ist an sich unwahrscheinlich; auch haben Versuche gezeigt, daß die erste Annahme die richtige ist. Bei einem Versuch, den ich bei 22,7° machte, bestimmte ich die Zusammensetzung der unteren Schicht nach der später zu beschreibenden Methode, hierauf entfernte ich die Hälfte der unteren Schicht und rührte die beiden Schichten durcheinander. Sobald die Sonderung der beiden Schichten eingetreten war, bestimmte ich nochmals die Zusammensetzung der unteren Schicht. Das Ergebnis findet sich in folgender Tabelle:

Untere Schicht	Dichte	100 ccm der Schicht enthalten g		
		K_2CO_3	C_2H_5OH	H_2O
1. Versuch	1,2251	81,16	8,44	82,91
2. Versuch	1,2248	81,09	8,43	82,91

Bei einem anderen Versuch bis 25°, wo $^3/_4$ der unteren Schicht entfernt wurde, ergaben sich die Dichten der unteren Schicht zu 1,2796 bzw. 1,2784, die Salzmengen in 100 g der unteren Schicht zu 29,54 und 29,40. Schließlich wurde noch bei einem dritten Versuch die Hälfte der oberen Schicht entfernt, dann ergaben sich die Dichten der oberen Schicht zu 0,8854 bzw. 0,8845 und die Salzmengen in 100 g der oberen Schicht zu 0,694 bzw. 0,694. Man kann also aus den beiden Schichten beliebig viel entnehmen, ohne daß sich deren Zusammensetzung ändert, denn die beobachteten Abweichungen liegen innerhalb der Fehlergrenzen.

Wurden zur Herstellung der beiden Schichten A g Salz, B g Wasser und C g Alkohol verwendet, und hat die Analyse der oberen Schicht in 100 ccm a g Salz, b g Wasser und c g Alkohol ergeben, die der unteren Schicht α g Salz, β g Wasser und γ g Alkohol, so müssen folgende drei Gleichungen bestehen:

$$A = x.a + \xi.\alpha; \quad B = x.b + \xi.\beta; \quad C = x.c + \xi.\gamma,$$

wo x und ξ gleich einem Hundertstel des Volumens der oberen bzw. unteren Schicht sind.

Man kann aber bei einer Schichtenbildung aus beiden Schichten beliebig viel entfernen, ohne daß sich die Zusammensetzung der beiden Schichten ändert. Es muß also eine ganze Reihe Salzlösungen in Gemischen von Alkohol und Wasser geben, die alle in die gleichen Schichten zerfallen. Die Zusammensetzung dieser Salzlösungen ist gegeben durch die Gleichungen

$$A = x.a + \xi.\alpha; \quad B = x.b + \xi.\beta; \quad C = x.c + \xi.\gamma,$$

wobei x und ξ unbekannt sind. Wir haben also drei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die Bedingung, daß diese drei Gleichungen gleichzeitig gültig sind, wird durch das Verschwinden einer Determinante dargestellt, bzw. durch die Gleichung:

$$A(b\gamma - c\beta) + B(c\alpha - a\gamma) + C(a\beta - b\alpha) = 0.$$

In dieser Gleichung bestimmen a, b, c, α, β, γ die bekannte Zusammensetzung der beiden Schichten, während A, B, C der Zusammensetzung der ganzen Lösung entspricht. In einem rechtwinkeligen Koordinatensystem mit den Achsen A, B und C erhalten wir eine Ebene, die durch den Koordinatenanfangspunkt geht und die beiden Punkte a, b, c und α, β, γ enthält. In unserem Koordinatensystem werden also sämtliche Lösungen, die in gleiche obere und gleiche untere Schichten zerfallen, durch Punkte einer Ebene dargestellt, die durch den Koordinatenanfangspunkt geht, und die beiden Punkte enthält, welche der Zusammensetzung der beiden Schichten entsprechen. Selbstverständlich stellen nur die Punkte der Ebene Lösungen von

gleichen oberen und gleichen unteren Schichten vor, die innerhalb der beiden geraden Linien liegen, die vom Koordinatenanfangspunkt nach den Punkten a, b, c und α, β, γ gezogen werden können, da ja bei den Punkten, die außerhalb dieses Winkels liegen, die eine Schicht negativ würde, was physikalisch keinen Sinn hat. Dagegen kann man bei eingetretener Schichtenbildung Lösungen, die allen Punkten der Ebene entsprechen, zugeben oder entfernen (innerhalb der durch die Zusammensetzung der beiden Schichten bedingten Grenzen), ohne daß sich die Zusammensetzung der beiden Schichten ändert.

Geht man bei derselben Temperatur zu einer anderen Zusammensetzung der beiden Schichten über, so erhält man eine andere Ebene, die aber auch durch den Koordinatenanfangspunkt geht. Für alle möglichen Schichten erhält man dann ein Ebenenbündel, das seinen Ursprung im Koordinatenanfangspunkt hat.

Beachtet man, daß sämtliche Punkte einer Geraden, die durch den Koordinatenanfangspunkt geht, Gemische von Salz, Wasser und Alkohol von gleicher Konzentration darstellen, so kann man ohne weiteres von der Darstellung im Raum auf die Darstellung in der Ebene übergehen. Als Ebene, auf die sämtliche Punkte und Geraden vom Koordinatenanfangspunkt aus projiziert wurden, wählte ich die Ebene $B = 100$. Wir haben also ein rechtwinkeliges Koordinatensystem mit den Achsen C und A. Der Punkt 45,81 bedeutet eine Lösung von der Zusammensetzung k . 45 g Alkohol, k . 81 g Salz und k . 100 g Wasser, wobei k einen beliebigen Faktor vorstellt. Die Punkte, die uns Lösungen vorstellen, die in gleiche obere und gleiche untere Schichten zerfallen, liegen hier auf einer Geraden, die von den zwei Punkten begrenzt wird, die die beiden Schichten vorstellen.

Man wird also bei einer Versuchsreihe bei gleicher Temperatur eine Reihe derartiger Strecken erhalten, und zwar stellt das Gebiet, das die Strecken überstreichen, die Lösungen dar, die in zwei Schichten zerfallen, deren Zusammensetzung durch die Endpunkte des durch den betreffenden Punkt gehenden Strahles dargestellt wird. Das Gebiet zwischen den Achsen und den Endpunkten der Strecken stellt gewöhnliche Lösungen dar.

F. A. H. Schreinemakers[1]) geht vom thermo-dynamischen Potential aus und kommt zum gleichen Ergebnis. Im übrigen möchte ich auf die Originalabhandlung hinweisen, sowie auf die ihr vorhergehenden Abhandlungen von A. C. van Rijn van Alkemade[2]) und H. W. Bakhuis Roozeboom.[3])

Versuchsanordnung.

a) Herstellung der Schichten.

Um die Zusammensetzung der beiden Schichten für bestimmte Temperaturen bestimmen zu können, wurde die Lösung längere Zeit hindurch in einem Wasserbad auf konstanter Temperatur erhalten. Als Wasserbad diente ein 4 Liter fassender Kochbecher *a* (Fig. 1) von 29 cm Höhe und 7 cm Radius, aus Jenenser Geräteglas, der auf einer Asbestpappe erwärmt wurde. In diesem Kochbecher befand sich zur Aufnahme der Lösung ein Becherglas *b*, dessen Höhe 18 cm und dessen Radius 3,5 cm betrug. Das Becherglas *b* stand auf einem runden Dreifuß *c*, der im Kochbecher feststand. Der Dreifuß war von einem 2 mm hohen Rande so umgeben, daß das Becherglas gerade hineinpaßte. Außerdem wurde das Becherglas noch am oberen Ende durch Drähte, die am Kochbecher eingehängt waren, gegen Hin- und Herschwanken geschützt. Das Becherglas wurde durch eine aufgelegte Korkplatte geschlossen, die durch Bleigewichte beschwert wurde, und die zwei Durchbohrungen zur Aufnahme eines in $^1/_{10}{}^0$ geteilten Thermometers und eines Glasrührers hatte.

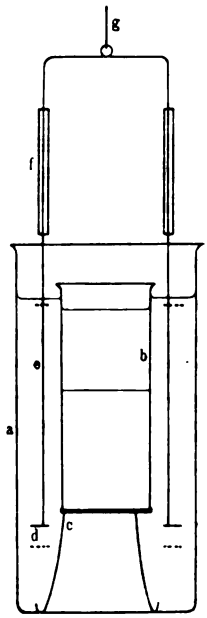


Fig. 1.

1) F. A. H. Schreinemakers, Zeitschr. f. phys. Chem. **22.** p. 93 und 515. 1897; **25.** p. 305. 1898.

2) A. C. van Rijn van Alkemade, Zeitschr. f. phys. Chem. **11.** p. 289. 1892.

3) H. W. Bakhuis Roozeboom, Zeitschr. f. phys. Chem. **12.** p. 359. 1893.

Zum Durchrühren des Wassers im Kochbecher diente ein Rührer; er bestand aus einem Ring *d* aus starkem Messingblech, dessen äußerer Durchmesser 12 cm und dessen innerer 9 cm betrug. An diesem Ring war ein Messingbügel *e* angelötet. Der Messingbügel, der durch zwei Metallröhren *f* eine Führung erhielt, wurde mittels einer Schnur *g*, die durch eine Glasröhre geführt wurde, mit einer Kurbel verbunden. Diese bestand aus einer durch einen Elektromotor drehbaren Metallscheibe, an der man einen Kurbelstift längs eines Radius festklemmen konnte.

In das Becherglas wurde eine Lösung von Kaliumkarbonat bzw. Mangansulfat in Wasser gebracht, und das Ganze auf etwas über die Versuchstemperatur erwärmt. Hierauf wurde der Lösung unter Umrühren mit dem Glasrührer eine geeignet erscheinende Menge Äthylalkohol zugesetzt. Zur Erwärmung des Wasserbades diente eine Gasflamme. War das Rührwerk in Bewegung gesetzt, so gelang es durch An- und Ausschalten einer danebenstehenden Glühlampe, die gewählte Versuchstemperatur auf $\pm 0{,}1^{\circ}$ konstant zu halten. War dies eingetreten, so wurde die Lösung nochmals mit dem Glasrührer durcheinandergerührt. Nach vollkommener Klärung der beiden Schichten wurden zuerst aus der oberen Schicht und dann aus der unteren Schicht die zur Bestimmung der Zusammensetzung der beiden Schichten nötigen Proben entnommen (vgl. weiter unten).

b) Analyse der Schichten.

Zur Bestimmung der Gewichtsmengen Salz, Wasser und Alkohol, die je 100 ccm der beiden Schichten enthalten, muß man von beiden Schichten kennen:

1. die Dichte, 2. den Salzgehalt, 3. den Alkoholgehalt.

1. Dichtebestimmung.

Nach mannigfachen Vorversuchen erwiesen sich die beiden in Fig. 2 gezeichneten Abänderungen des Sprengel-Ostwaldschen Pyknometers[1]) als brauchbar. Die Pyknometer, die ich mir von Gundelach in Gehlberg (Thüringen) anfertigen ließ,

1) W. Ostwald, Hand- und Hilfsbuch zur Ausführung physikochemischer Messungen, p. 110. Leipzig 1893.

haben ca. 7 ccm Inhalt. Der Durchmesser der Kapillare beträgt bei *a* $^1/_2$ mm, bei *b* 1 mm. Bei *a* befindet sich ein kleiner Glasschliff, auf den das Ansatzstück *c* paßt. Die Pyknometer wurden mit destilliertem Wasser unter Zuhilfenahme einer

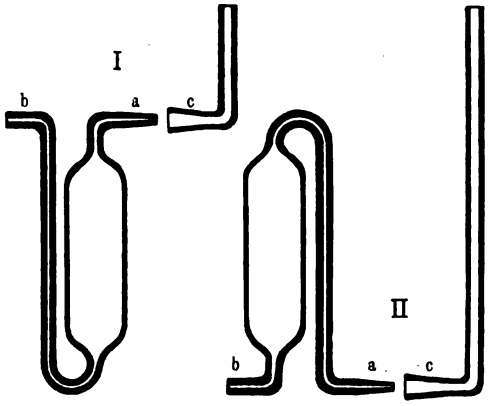


Fig. 2.

Wasserstrahlsaugpumpe gereinigt, und hierauf im Trockenofen unter Durchsaugen von Luft getrocknet.

Zur Bestimmung der Dichte der oberen Schicht wird das Pyknometer I mit Ansatzstück und geeignet gebogenem Drahte zum Festhalten im Trockenofen auf einige Grade oberhalb der Versuchstemperatur erwärmt, hierauf das Ganze in die obere Schicht eingetaucht und durch schwaches Ansaugen an einem Kugelrohr, das durch einen Gummischlauch mit dem Ansatzstück verbunden ist, das Pyknometer ganz mit Flüssigkeit gefüllt. Nachdem das Ansatzstück noch unter der Flüssigkeit abgenommen wurde, hebt man das Pyknometer aus der Flüssigkeit, wobei sich diese im weiteren Schenkel sofort zurückzieht, da die Temperatur der Flüssigkeit immer höher gewählt wurde als die Zimmertemperatur. Das Pyknometer wird hierauf mit Wasser abgespült, getrocknet, und dann gewogen. Wurde derselbe Versuch mit destilliertem Wasser an Stelle der Flüssigkeit ausgeführt (bei gleicher Temperatur) und das Pyknometer auch noch leer gewogen, so läßt sich aus diesen drei Wägungen die Dichte der Flüssigkeit bei der betreffenden Temperatur in bekannter Weise berechnen.

Bei der unteren Schicht verfährt man ebenso wie bei der oberen Schicht, nur muß man beim Einbringen des Pyknometers II in die Flüssigkeit in das Ansatzstück schwach hineinblasen, damit nicht schon von der oberen Schicht ein Teil in das Pyknometer gelangt. Nach dem Herausnehmen aus der Flüssigkeit wird das Pyknometer II vorsichtig umgekehrt, um ein Auslaufen der Flüssigkeit zu vermeiden.

2. Salzbestimmung.

Der Gehalt der beiden Schichten an Kaliumkarbonat wurde durch Titration mit $^1/_{10}$ normal Salzsäure und Methylorange als Indikator bestimmt. Zur Entnahme der zur Titration nötigen Menge der Flüssigkeit dienten Pipetten (Fig. 3), die so beschaffen sind, daß keine Flüssigkeit durch Verdampfen verloren geht.[1]) Durch Wägen vor und nach dem Ansaugen der Schicht (bei der unteren Schicht wurde zuerst schwach hineingeblasen) ist die Menge der zu titrierenden Flüssigkeit bestimmt.

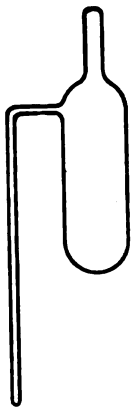


Fig. 3.

Bei den Schichten, die Mangansulfat enthielten, wurde der Salzgehalt durch Abdampfen und Erhitzen gefunden.

3. Bestimmung des Alkoholgehaltes.

Größere Schwierigkeit bot die Bestimmung des Alkoholgehaltes der beiden Schichten. Nach einer Reihe von Vorversuchen gelang es schließlich, in der elektrischen Leitfähigkeit der Lösungen ein sehr genaues Mittel zur Bestimmung des Alkoholgehaltes zu finden.

Um den Prozentgehalt für die Schichten, die Kaliumkarbonat enthalten, zu bestimmen, wurden mittels ähnlicher Pipetten wie für die Salzbestimmung Proben aus beiden Schichten entnommen, und deren Gewicht bestimmt. Diese

---

1) W. Ostwald, l. c. p. 213.

Proben wurden dann aus später mitzuteilenden Gründen mit einer Lösung von Kaliumkarbonat in Wasser von bekannter Konzentration versetzt. Die zugesetzten Mengen mußten ebenfalls durch Wägung bestimmt werden. Hierauf wurde die Leitfähigkeit der beiden verdünnten Lösungen bestimmt und außerdem noch durch Titration die Menge Salz, die sich in 100 ccm dieser Lösungen befindet. Aus der Leitfähigkeit und dem Salzgehalt in 100 ccm konnte der Prozentgehalt des Lösungsmittels an Alkohol dieser verdünnten Lösungen nach Teil II ermittelt werden, und dadurch auch der Alkoholgehalt der beiden Schichten.

Bei den Versuchen mit Mangansulfat schieden sich aus manchen Schichten bei Temperaturerniedrigung Kristalle ab, die sich in der Schicht auch bei Wasserzusatz nicht mehr lösten. Dies konnte dadurch vermieden werden, daß der Zusatz von Mangansulfat in Wasser nicht erst zugegeben wurde, als sich in der Pipette schon die Schicht befand, sondern vorher, und dann erst die Schicht angesaugt wurde.

Versuche.

a) Zusammensetzung der Schichten.

Im folgenden befinden sich die über die Zusammensetzung der beiden Schichten ermittelten Werte in Tabellen. Und zwar wurde die Zusammensetzung einer Reihe von zusammengehörigen Schichten ermittelt bei Lösungen in Alkohol–Wassergemischen von:

1. Kaliumkarbonat bei 25°: Tab. 1 und Kurve Fig. 4.
2. Kaliumkarbonat bei 40°: Tab. 2 und Fig. 5.
3. Kaliumkarbonat bei 60°: Tab. 3 und Fig. 6.
4. Mangansulfat bei 25°: Tab. 4 und Fig. 7.

In den Tabellen bedeuten a, b und c die Mengen Salz, Wasser und Alkohol in 100 ccm der oberen Schicht, s die Dichte derselben, und a' bzw. c' die Mengen Salz und Alkohol, die auf 100 g Wasser in der oberen Schicht kommen. Die anderen Buchstaben beziehen sich entsprechend auf die untere Schicht.

Tabelle 1.

K_2CO_3. Versuchstemperatur 25°.

Obere Schicht	*a*	0,12	0,37	1,33	1,88	2,36	3,72	5,76	10,26
	b	15,53	24,14	37,58	40,36	43,77	49,43	55,11	63,18
	c	67,81	62,00	51,53	49,42	46,52	41,65	36,75	29,17
	s	0,8346	0,8651	0,9044	0,9166	0,9265	0,9480	0,9762	1,0261
	a'	0,77	1,52	3,53	4,65	5,39	7,52	10,46	16,24
	c'	436,6	256,8	137,1	122,5	106,3	84,26	66,68	46,16
Untere Schicht	*α*	63,65	49,82	38,77	35,62	34,10	29,96	26,00	20,13
	β	80,63	83,86	84,24	84,32	83,44	81,82	79,41	74,66
	γ	1,20	2,44	5,15	6,15	6,89	9,33	12,41	17,69
	σ	1,4548	1,3612	1,2816	1,2609	1,2443	1,2111	1,1782	1,1248
	α'	78,95	59,41	46,02	42,24	40,87	36,62	32,74	26,96
	γ'	1,49	2,91	6,11	7,30	8,26	11,41	15,63	23,70

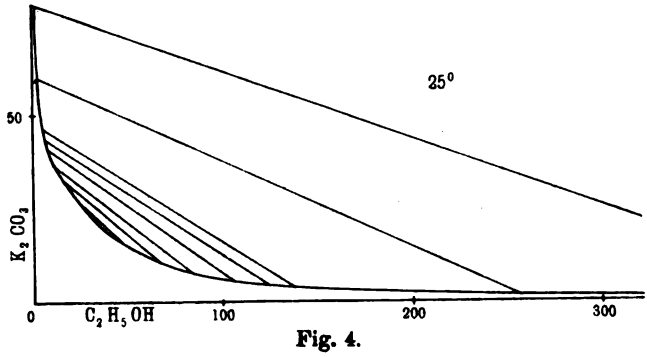


Fig. 4.

Tabelle 2.

K_2CO_3. Versuchstemperatur 40°.

Obere Schicht	*a*	0,48	0,73	3,48	5,72	—	10,07
	b	24,38	31,81	49,04	56,24	—	62,73
	c	60,86	54,67	41,17	34,97	—	28,70
	s	0,8567	0,8721	0,9364	0,9693	—	1,0150
	a'	1,76	2,28	6,99	10,17	—	16,06
	c'	249,6	171,9	83,96	62,19	—	45,75
Untere Schicht	*α*	46,70	42,97	28,11	22,96	22,26	—
	β	83,96	84,19	80,93	78,13	77,71	—
	γ	2,82	3,75	10,50	13,93	13,99	—
	σ	1,3348	1,3091	1,1954	1,1502	1,1396	—
	α'	55,62	51,04	34,73	29,39	28,64	—
	γ'	3,36	4,46	12,97	17,82	18,01	—

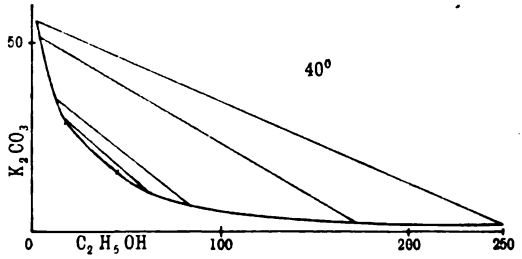


Fig. 5.

Tabelle 3.

K_2CO_3. Versuchstemperatur 60°.

Obere Schicht	*a*	0,71	3,73	—	—
	b	28,14	48,62	—	—
	c	56,37	40,35	—	—
	s	0,8522	0,9270	—	—
	a'	2,53	7,66	—	—
	c'	200,3	82,99	—	—
Untere Schicht	α	42,72	31,41	26,29	19,89
	β	82,05	81,37	79,26	74,24
	γ	4,49	8,71	11,91	16,80
	σ	1,2926	1,2149	1,1746	1,1093
	α'	52,06	38,60	33,15	26,80
	γ'	5,47	10,70	15,03	22,68

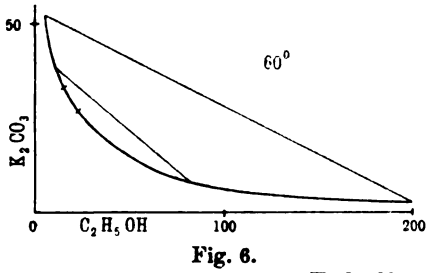


Fig. 6.

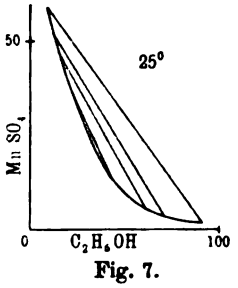


Fig. 7.

Tabelle 4.

$MnSO_4$. Versuchstemperatur 25°.

Obere Schicht	*a*	0,85	1,85	3,11	8,88
	b	46,86	53,13	57,11	64,74
	c	42,81	37,86	34,78	28,00
	s	0,9052	0,9284	0,9500	1,0162
	a'	1,81	3,48	5,45	13,72
	c'	91,35	71,26	60,90	48,25

Tabelle 4 (Fortsetzung).

Untere Schicht	α	49,19	42,68	38,00	27,29
	β	33,19	32,16	30,32	26,23
	γ	8,04	9,93	11,71	17,07
	σ	1,4042	1,3477	1,3053	1,2059
	α'	59,13	51,95	47,02	35,79
	γ'	9,67	12,09	14,49	22,40

Aus den Tabellen für die Zusammensetzung der einzelnen Schichten ergibt sich: Bei den untersuchten Temperaturen und analog den Ergebnissen von Traube und Neuberg[1]) für Ammoniumsulfat entspricht einer Zunahme des Wassergehaltes der oberen Schicht eine Zunahme des Salzgehaltes und eine Abnahme des Alkoholgehaltes der oberen Schicht, während für die untere Schicht der Salzgehalt abnimmt, der Alkoholgehalt zunimmt, und der Wassergehalt erst zu und dann abnimmt.

Aus den drei für die Temperaturen von 25°, 40° und 60° gezeichneten Kurven für Kaliumkarbonat, die uns für eine gegebene Zusammensetzung der Gesamtlösung angeben, ob und in welche Schichten dieselbe bei der betreffenden Temperatur zerfällt, folgt, daß dieselben genau den gleichen Charakter tragen. Der eine Kurventeil, der die oberen Schichten vorstellt, nähert sich der X-Achse asymptotisch, um, wie B. R. de Bruyn fand, in einem Punkte der ca. 91,5 proz. Alkohol entspricht, in die Kurve überzugehen, die uns das Gleichgewicht zwischen Lösungen und einem festen Hydrate vorstellt. In dieselbe Kurve geht auch der zweite Kurventeil über, und zwar bei ca. 0,4 proz. Alkohol. Die Analysenfehler sind jedoch bei diesen sehr hoch oder sehr niedrig prozentigen Alkoholen so groß[2]), daß ich diese Gleichgewichte nicht näher untersuchte. Die beiden Kurventeile für die oberen und unteren Schichten gehen ohne Unterbrechung ineinander über. In der Zeichnung sieht es daher so aus, als ob wir es nur mit einer einzigen Kurve zu tun hätten. Diese Kurve wollen wir *Schichtungskurve* nennen, wobei wir jedoch voraussetzen, daß je zwei Punkte derselben einander zugeordnet sind. Nähert

1) J. Traube u. O. Neuberg, Zeitschr. f. phys. Chem. 1. p. 512. 1887.

2) B. R. de Bruyn, Zeitschr. f. phys. Chem. 32. p. 93. 1900.

man sich dem Punkte, wo die beiden Kurventeile zusammenstoßen, so werden, wie man auch aus den Tabellen und Kurven sieht, die beiden Schichten einander mehr und mehr gleich, um für diesen Punkt identisch zu werden. Diese Lösung stellt also sozusagen eine kritische Lösung vor. An dieser Stelle möchte ich auch erwähnen, daß es natürlich für die Darstellung vollkommen gleich ist, ob ich die Schichtungskurve in meinem Koordinatensystem oder wie B. R. de Bruyn in einem Dreieck auftrage. Aus praktischen Gründen wurde jedoch das rechtwinkelige System bevorzugt.

Legen wir die drei Schichtungskurven für Kaliumkarbonat aufeinander, so decken sich dieselben fast vollkommen, daraus folgt, daß die Temperatur bei Kaliumkarbonat in Gemischen von Alkohol und Wasser nur sehr geringen Einfluß auf die Schichtenbildung ausübt. Die Versuche zeigten, daß dies auch bei Mangansulfat der Fall ist.

Aus der schon in der Einleitung erwähnten Arbeit von Traube und Neuberg „Über Schichtenbildung in Gemischen von Alkohol, Wasser und Salzen oder Basen" wurden die experimentellen Ergebnisse der Lösungen mit Ammoniumsulfat verwendet. Die umgerechneten Tabellen lieferten folgendes Ergebnis:

Tabelle 5.

$(NH_4)_2SO_4$. Versuchstemperatur 33°.

Obere Schicht	α'	5,55	6,51	6,69	8,32	8,63	9,90	10,97
	c'	189,1	154,1	146,6	123,3	118,7	107,6	97,41
Untere Schicht	α'	66,31	60,83	59,19	54,72	52,88	51,15	47,84
	γ'	9,15	10,33	10,95	11,73	12,21	13,83	15,96

Tabelle 6.

$(NH_4)_2SO_4$.

Versuchstemperatur		16,6°	33°	41,8°	55,7°
Obere Schicht	α'	13,24	10,97	10,54	10,10
	c'	76,14	97,41	100,7	107,8
Untere Schicht	α'	48,87	47,84	47,58	47,01
	γ'	16,90	15,96	15,98	15,36

Die Schichtungskurve für Ammoniumsulfat bei 33° wurde in Fig. 8 aufgetragen; sie besitzt im allgemeinen dieselben Eigenschaften, wie die anderen Schichtungskurven. Trägt man die für die verschiedenen Temperaturen erhaltenen Zusammensetzungen der beiden Schichten im Koordinatensystem auf, und verbindet die zusammengehörigen Punkte wie immer durch Gerade, so schneiden sich diese vier Geraden annähernd in einem Punkte, wie es auch sein muß, da Traube und Neuberg zu diesen Schichten ungefähr das gleiche Verhältnis von Wasser, Alkohol und Salz nahm.

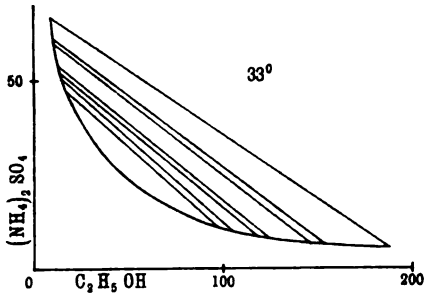


Fig. 8.

b) Änderungen der Schichten der Temperatur.

Da sich die drei Schichtungskurven für Kaliumkarbonat sehr oft innerhalb der Fehlergrenzen decken, so mußten, um die Lage der Schichtungskurven zueinander näher festzustellen, noch genauere Untersuchungen über die Abhängigkeit des Eintritts und des Verschwindens der Schichtenbildung mit der Temperatur angestellt werden. Dabei wurde so verfahren, daß wie bei den vorhergehenden Untersuchungen eine Schichtenbildung bei 25° hergestellt wurde. Nach vollkommener Klärung der beiden Schichten wurde aus denselben je eine Probe zur Salzbestimmung entnommen, und außerdem ein unten zugeschmolzenes Glasröhrchen von 12 mm Durchmesser und ca. 11 cm Länge zu $^3/_4$ seines Inhalts mit je einer Schicht gefüllt. Nachdem die Glasröhrchen gut verkorkt waren, wurden sie in je einem Wasserbade durch ein Rühr- und Schüttelwerk nach Fleckenstein[1]) auf die gewünschte Temperatur gebracht. Der Eintritt und das Verschwinden der Schichtenbildung wurde durch das Auftreten bzw. Verschwinden einer milchartigen Trübung im Glasröhrchen erkannt.

1) A. Fleckenstein, Erlanger Dissert. 1904. p. 8.

Bei sämtlichen Versuchen, die mit der oberen Schicht angestellt wurden, trennte sich diese unterhalb 25° in zwei Schichten, während sie oberhalb 25° stets eine homogene Lösung bildete.

Bei der unteren Schicht lag die Sache wesentlich anders. Hier war die Schicht unter 25° immer homogen, und die Trennung in zwei Schichten erfolgte oberhalb 25°. Die Schichtenbildung verschwand jedoch wieder bei einem Salzgehalt von 35,19 g in 100 g der Schicht bei 42°, bei einem Salzgehalt von 32,85 g bei 51°; dann blieb die Lösung in beiden Fällen bei weiterem Erhitzen homogen. Bei einem Salzgehalt von 21,16 g in 100 g der Schicht verschwand die Schichtenbildung selbst beim Erhitzen auf 80° noch nicht. Die sich abscheidende obere Schicht wurde jedoch mit steigender Temperatur wieder kleiner, so daß bei genügend hoher Temperatur wahrscheinlich auch hier die Lösung wieder homogen geworden wäre. Genau denselben Gang der Erscheinungen konnte ich noch bei einer anderen unteren Schicht beobachten, die in 100 g 17,90 g Kaliumkarbonat enthielt.

Haben wir eine Lösung, die uns eine Schicht von 25° vorstellt, und ist diese z. B. bei 40° in zwei Schichten geteilt, so wissen wir, daß bei dem betreffenden Punkt der Kurve für 25° die Schichtungskurve für 40° außerhalb der für 25° liegen muß, d. h. in der Nähe des Punktes zwischen der Schichtungskurve für 25° und den beiden Achsen verlaufen muß. Ist die Lösung bei 40° homogen, so muß die Kurve für 40° innerhalb der für 25° liegen, oder an dieser Stelle mit ihr zusammenfallen.

Aus den Versuchen folgt daher, daß bei der oberen Schicht die Kurven unter 25° unterhalb der 25° Kurve verlaufen, während die über 25° oberhalb derselben verlaufen. Für die untere Schicht folgt aber, daß für großen Salzgehalt die Kurve für eine höher gelegene Temperatur höher gelegen ist, als die Kurve für eine niedrigere Temperatur.

Demnach verläuft die Kurve z. B. für 50° in der oberen Schicht ganz innerhalb der Schichtungskurve für 25°, der Anfang der Kurve für die untere Schicht liegt ebenfalls auf derselben Seite der 25° Kurve. Nun folgt aber, da bei einem Salzgehalt von 35,19 g die Schichtenbildung bei 42° und bei

einem Salzgehalt von 32,85 g bei 51° verschwindet, daß die Kurven für 42° bis 51° sämtlich innerhalb der beiden Punkte auf der 25° Kurve, die den Salzgehalten entsprechen, die Kurve für 25° schneiden müssen. Und zwar schneidet eine Kurve die Kurve für 25° in um so größerem Abstand von der *Y*-Achse, je höher die betreffende Temperatur ist. Da nun jede Kurve ihren Anfangs- und Endpunkt auf derselben Seite der 25° Kurve hat, stetig ist, und die 25° Kurve einmal schneidet, so muß jede Kurve die Kurve für 25° noch einmal schneiden. Diesen Schnittpunkt auf dem Kurventeil anzunehmen, der der unteren Schicht entspricht, ist nach den Versuchen nicht möglich, da es dann ja bei 25° untere Schichten von nicht zu großem Salzgehalte geben müßte, die sich beim Abkühlen in zwei Schichten trennen, beim Erwärmen aber homogen bleiben müßten, was aber niemals beobachtet werden konnte. Auf dem Kurventeil, der der oberen Schicht entspricht, kann dieser Punkt auch nicht liegen, da ja nach meinen Versuchen die Kurve entweder ganz oberhalb oder ganz unterhalb der Kurve für 25° verläuft. Es bleibt also nur noch die Möglichkeit übrig, daß der zweite Schnittpunkt in den Punkt fällt, der sowohl der oberen als auch der unteren Schicht angehört, dem schon oben erwähnten kritischen Punkt.

Es müssen also alle Kurven durch den kritischen Punkt der 25° Kurve gehen, und aus denselben Gründen müßte auch dieser Punkt für sämtliche anderen Kurven der kritische Punkt sein, so daß also bei jeder Temperatur diejenige Lösung, deren beide Schichten einander identisch sind, immer durch denselben Punkt unseres Koordinatensystems dargestellt wird. Für diese Annahme spricht auch die graphische Darstellung der Kurven für 25°, 40° und 60°, wo der kritische Punkt auf die Lösung von der Zusammensetzung ca. 30,0 g Alkohol, 22,5 g Kaliumkarbonat und 100 g Wasser fällt. (Eigentlich dürfte ich den Satz, daß für Kaliumkarbonat die kritische Lösung für alle Temperaturen gleich ist, nicht ohne weiteres aussprechen, da es leider unmöglich war, solche Punkte, die möglichst nahe dem kritischen Punkte liegen, als Schichten zu erhalten, und diese Schichten dann auf ihre Veränderung mit der Temperatur zu prüfen. Genauer ist folgende Formu-

lierung des Satzes: Die kritische Lösung hängt bei Kaliumkarbonat so gut wie nicht von der Temperatur ab.)

Der Verlauf der Kurven für 20°, 25°, 40° und 60° ist in Fig. 9 dargestellt. Die Abweichungen von der Kurve für 25° sind stark vergrößert. Geht man auf einer Kurve vom kritischen Punkt aus aufwärts, so schneidet diese Kurve zuerst die Kurve für die höchste Temperatur und dann die nächstfolgenden. Trägt man die Kurven für die verschiedenen Temperaturen im Raum auf, indem man als dritte Achse die Temperatur nimmt, so entsteht eine Fläche (Fig. 10), die sich auf der Seite der tiefer gelegenen Temperaturen verflacht.

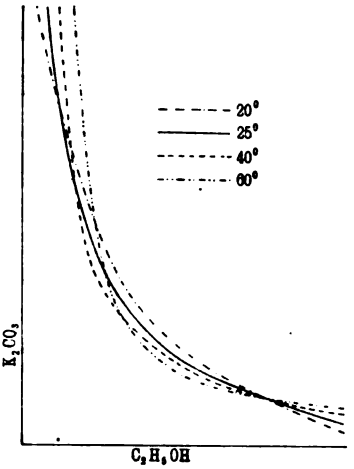


Fig. 9.

Mit diesen Ergebnissen über die Änderung der Schichtenbildung mit der Temperatur für Lösungen von Kaliumkarbonat in Gemischen von Alkohol und Wasser stimmen auch die Kurven der Figg. 4—6 überein.

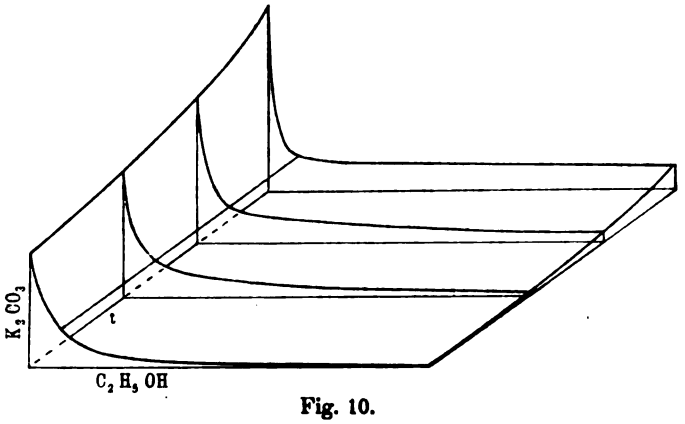


Fig. 10.

Nur die Lage dreier Punkte, die der oberen Schicht bei 40° entsprechen, stimmt nicht mit der oberen Schicht bei 25°

überein. Die Kurven von 25° und 40° stehen ganz im Einklang mit der 60° Kurve.

Die Werte, die B. R. de Bruyn für die Zusammensetzung der zusammengehörigen Schichten bei Kaliumkarbonat erhielt[1]), befinden sich umgerechnet in folgenden Tabellen, und stimmen mit wenig Ausnahmen mit meinen Kurven überein.

Tabelle 7.

K_2CO_3. Versuchstemperatur 17°.

Obere Schicht	α'	0,5	4,7	9,8	10,8	17,0	—	—	20,0
	c'	426	109	67,5	61,3	43,3	—	—	36,3
Untere Schicht	α'	75,1	43,7	34,9	33,5	—	27,8	25,1	—
	γ'	1,2	6,9	12,4	14,0	—	21,5	25,5	—

Tabelle 8.

K_2CO_3. Versuchstemperatur 35°.

Obere Schicht	α'	6,9	18,2
	c'	90,7	42,8
Untere Schicht	α'	35,6	23,2
	γ'	10,8	27,4

Auch die von B. R. de Bruyn bei verschiedenen Temperaturen bestimmte Zusammensetzung der beiden Schichten, die mit dem festen Hydrate im Gleichgewicht stehen, stimmt mit meinen Kurven überein.

Ferner machte Snell[2]) die Beobachtung, daß ein Gemisch von 25,3 g Kaliumkarbonat und 25,3 g Alkohol auf 100 g Wasser unterhalb 40° und oberhalb 70° eine homogene Lösung bildet, sich aber dazwischen in zwei Schichten trennt, was ebenfalls mit meinen Kurven übereinstimmt.

Die Resultate Linebargers[3]) konnten nicht verwendet werden, denn Linebarger arbeitete mit zu wenig Substanz,

1) B. R. de Bruyn, Zeitschr. f. physik. Chem. **32**. p. 96. 1900. In Tab. 17 befindet sich dort ein Druckfehler, indem es unter % W an Stelle von 77,9, 67,9 heißen muß.

2) J. F. Snell, Journ. of phys. chem **2**. p. 457. 1898.

3) C. E. Linebarger, Amer. chem. Journ. **14**. p. 380. 1892.

um genaue Resultate erwarten zu lassen, wie auch schon B. R. de Bruyn auf die Ungenauigkeit der Bestimmungen hinwies.[1]) Es sei hier nur erwähnt, daß Linebarger zu 0,5 bis 2 ccm einer Lösung eines Salzes in Wasser von bekannter Konzentration aus zwei Büretten Wasser und Alkohol zufließen ließ, bis immer die Lösung gerade anfing sich zu trüben. Es konnte daraus die Zusammensetzung einer Reihe von oberen Schichten berechnet werden.

c) Prüfung der von Bodländer sowie W. Herz und M. Knoch aufgestellten Gesetze.

Weiterhin benutze ich meine Versuchsergebnisse, um das Gesetz zu prüfen, das G. Bodländer aufstellte, daß nämlich „in erster Annäherung in gleichen Volumen der bei gleicher Temperatur gesättigten Lösungen eines Stoffs in Wasser von verschiedenem Alkoholgehalt das Verhältnis der Menge Wasser W zur Kubikwurzel aus der Menge des gelösten Stoffs S ein konstantes sein müsse".[2]) Die folgenden Tabellen enthalten die aus den Tabb. 1—4 berechneten Werte von $W/\sqrt[3]{S} = \mathrm{I}$ für die oberen und unteren Schichten bei Kaliumkarbonat und Mangansulfat bei den untersuchten Temperaturen, da man die Schichten gewissermaßen auch als gesättigte Lösungen auffassen kann, weil dieselben für einen bestimmten Alkoholgehalt und eine bestimmte Temperatur den Lösungen von höchst möglichen Salzgehalten entsprechen. Die Tabb. 9, 10 und 11 beziehen sich auf Kaliumkarbonat, die Tab. 12 auf Mangansulfat, dabei bedeutet

$$\text{I das Verhältnis } \frac{W}{\sqrt[3]{S}}$$

$$\text{und II das Verhältnis } \frac{(S + A) \cdot W}{S + A + W},$$

wobei A, W und S die Mengen Alkohol, Wasser und Salz in 100 ccm der Schicht sind.

1) B. R. de Bruyn, Zeitschr. f. phys. Chem. 32. p. 96. 1900.
2) G. Bodländer, Zeitschr. f. phys. Chem. 7. p. 314. 1891.

Tabelle 9.

K_2CO_3. Versuchstemperatur 25°.

	A	I	II
Untere Schicht	1,20	20,2	35,9
	2,44	22,6	32,2
	5,15	24,9	28,8
	6,15	25,6	27,9
	6,89	25,7	27,5
	9,33	26,3	26,5
	12,41	26,8	25,8
	17,69	27,5	25,1
Obere Schicht	29,17	29,1	24,3
	36,75	30,7	24,0
	41,65	31,9	23,7
	46,52	32,9	23,1
	49,42	32,7	22,6
	51,58	34,2	22,0
	62,00	33,7	17,4
	67,81	31,5	12,6

Tabelle 10.

K_2CO_3. Versuchstemperatur 40°.

	A	I	II
Untere Schicht	2,82	23,3	31,2
	3,75	24,0	30,1
	10,50	26,6	26,1
	13,93	27,5	25,1
	13,99	27,6	24,7
Obere Schicht	28,70	29,1	24,0
	34,97	31,4	23,6
	41,17	32,5	23,4
	54,67	35,4	20,2
	60,86	32,4	17,4

Tabelle 11.

K_2CO_3. Versuchstemperatur 60°.

	A	I	II
Untere Schicht	4,49	23,5	30,0
	8,71	25,8	26,9
	11,91	26,7	25,8
	16,80	27,4	24,6
Obere Schicht	40,35	31,4	23,1
	56,37	31,5	18,9

Tabelle 12.

$MnSO_4$. Versuchstemperatur 25°.

	A	I	II
Untere Schicht	8,04	22,7	33,9
	9,93	23,5	32,1
	11,71	24,0	30,8
	17,07	25,3	28,0
Obere Schicht	28,00	31,3	23,5
	34,78	39,1	22,8
	37,86	43,3	22,7
	42,81	49,5	22,6

Zum Vergleich mit den Zahlen, die Bodländer erhielt, folgen hier einige Werte aus Bodländers Abhandlung. Er erhielt bei den unteren Schichten einer Lösung von Ammoniumsulfat in Alkohol–Wassergemischen folgende Werte:

19,02, 19,85, 20,09, 20,04, 19,56,

bei den oberen Schichten:

27,54, 27,25, 26,93, 27,61, 31,71, 31,52 und 40,97.

Das Verhältnis $I = W/\sqrt[3]{S}$ steigt mit dem Alkoholgehalt der Lösung, erreicht ein Maximum, und fällt dann wieder etwas. Auffallend ist, daß in der unteren Schicht, die mit der oberen das Maximum von I anzeigenden Schicht im Gleichgewicht steht, das Maximum des Wassergehaltes erreicht wird. Bei den Schichten, die einen mittleren Alkoholgehalt besitzen, ist das Verhältnis ziemlich konstant, während es bei sehr wenig Alkoholgehalt sehr stark sinkt. Bemerkenswert ist auch, daß sich das Verhältnis I mit der Temperatur nicht ändert. Für den kritischen Punkt hat es ungefähr den Wert 28, sowohl bei Lösungen mit Kaliumkarbonat, als auch mit Mangansulfat.

In den Tabellen sind in der letzten Reihe die Werte berechnet, die der Ausdruck

$$II = \frac{(S + A) \cdot W}{S + A + W}$$

für die betreffende Lösung annimmt. Diesen Ausdruck haben W. Herz und M. Knoch[1]) an Stelle des Bodländerschen gesetzt, und damit z. B. für NaCl in Glyzerin-Wassergemischen folgende Werte erhalten: 23,4, 28,8, 29,5, 30,4, 29,5 und 16,8 mit steigendem Glyzeringehalt. Es zeigt sich auch hier, daß die Werte für mittlere Alkoholgehalte ziemlich gut konstant sind, während die für wenig oder viel Alkoholgehalt noch stärkere Abweichungen zeigen, als der Bodländersche Ausdruck. W. Herz und M. Knoch haben bei ihren Versuchen ein Maximum dieses Ausdruckes erhalten, während bei meinen Versuchen der Ausdruck mit steigendem Alkoholgehalt immer sinkt.

II. Teil.

Elektrische Leitfähigkeit von Lösungen in Gemischen von Alkohol und Wasser.

Einleitung.

Über die elektrische Leitfähigkeit von Lösungen in Gemischen von Alkohol und Wasser sind eine große Anzahl von Untersuchungen angestellt worden. Ich möchte hier nur die

1) W. Herz u. M. Knoch, Zeitschr. f. anorgan. Chem. 46. p. 193. 1905.

Arbeiten von Arrhenius[1]), Cohen[2]), Lenz[3]), Völlmer[4]), Stephan[5]) sowie Jones und Bingham[6]) erwähnen. Diese Arbeiten beziehen sich jedoch beinahe ausschließlich auf ganz verdünnte Lösungen. C. Stephan untersuchte Lösungen bis zu einem Salzgehalt von 5 Proz. Aus seinen Tabellen habe ich folgende Zahlen entnommen, wobei das Leitvermögen k auf 1 ccm Quecksilber bei 0° als Einheit bezogen ist.

Gehalt an NaCl 2 Proz.

Prozentgehalt des Lösungsmittels an Alkohol	13,7	35,1	49,0
$10^9 . k_{10}^0$	1230	722	540
$10^9 . k_{20}^0$	1670	1014	748

Aus dieser Tabelle ersieht man die starke Veränderung der Leitfähigkeit mit dem Prozentgehalt des Lösungsmittels an Alkohol und mit der Temperatur. Die Leitfähigkeit ist daher sehr geeignet zur Bestimmung des Alkoholgehaltes.

Versuche.

Zur Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit benutzte ich die Methode von F. Kohlrausch. Das Induktorium wurde im Nebenzimmer aufgestellt, um während des Versuches durch sein Geräusch nicht zu stören. Als Meßbrücke diente die Kohlrauschsche Brückenwalze.[7]) Bei Vergleichung mit einem Präzisionsrheostaten wurden die Angaben der Brücke als hinreichend genau für meine Versuche gefunden.

Als Widerstandsgefäße benutzte ich die gebräuchliche U-Rohrform mit gut schließenden Kautschukdeckeln und Platinelektroden, die von Zeit zu Zeit mit der Lummer-Kurlbaumschen Flüssigkeit[8]) frisch platiniert wurden. Die Widerstands-

1) S. Arrhenius, Zeitschr. f. phys. Chem. **9.** p. 487. 1892.
2) E. Cohen, Zeitschr. f. phys. Chem. **25.** p. 1. 1898.
3) R. Lenz, Mém. de Pétersb. **30.** Nr. 7 p. 64. 1882.
4) K. Völlmer, Wied. Ann. **52.** p. 328. 1894.
5) C. Stephan, Wied. Ann. **17.** p. 673. 1882.
6) H. Jones u. Bingham, Americ. chem. Journ. **33.** p. 481. 1905.
7) F. Kohlrausch u. L. Holborn, Leitvermögen usw. p. 42. 1898.
8) F. Kohlrausch u. L. Holborn, l. c. p. 9.

gefäße wurden in ein großes Wasserbad gestellt, dessen Temperatur durch Umrühren und Zugabe von Wasser während des Versuches auf ein $^1/_{20}{}^0$ konstant gehalten werden konnte. Als Versuchstemperatur, die an einem in $^1/_{10}{}^0$ geteilten Thermometer abgelesen werden konnte, wählte ich 15°. Die Eichung der Widerstandsgefäße geschah mittels der sogenannten Normalflüssigkeiten, die nach Kohlrausch und Holborn[1]) hergestellt wurden. Die dabei verwendeten Salze wurden von E. Merck in Darmstadt als puriss. bezogen, und wurden sämtlich durch Umkristallisieren aus der heiß gesättigten Lösung und Eindampfen gereinigt.

Die Widerstandskapazitäten ergaben bei

Gefäß I für KCl $^1/_{10}$ norm. 3,7833, $MgSO_4$ max. 3,7816, Mittel: 3,7825.

Gefäß II für KCl norm. 64,075, NaCl ges. 64,117, $MgSO_4$ max. 64,089, Mittel: 64,094.

Das Gefäß I wurde für schlecht leitende, das Gefäß II für gut leitende Lösungen gebraucht.

Das zu den Versuchen nötige Wasser wurde in bekannter Weise durch Destillation hergestellt.

Das verwendete Kaliumkarbonat wurde von E. Merck in Darmstadt als „purissimum" bezogen, erwies sich als genügend rein, und wurde vor Gebrauch durch mehrstündiges Erhitzen im Trockenofen auf ungefähr 160° und Abkühlenlassen im Exsikkator entwässert.

Die Lösungen von Kaliumkarbonat in Gemischen von Alkohol und Wasser wurden in folgender Weise hergestellt. Zunächst wurde der Alkoholgehalt eines Gemisches von Wasser und Alkohol bestimmt mittels eines Ostwaldschen Pyknometers bei 15° und mit Hilfe der Tabellen von Landolt und Börnstein.[2]) Dann wurde dem Gemisch so lange Kaliumkarbonat zugesetzt, bis Schichtenbildung eintrat. Hierauf wurde von demselben Alkohol–Wassergemisch so viel zugesetzt, daß die Schichtenbildung wieder verschwand (Temperatur der Lösung ca. 15°). Es konnten dann aus dieser Lösung und dem Alkohol–Wassergemisch beliebig viele Lösungen hergestellt

1) F. Kohlrausch u. L. Holborn, l. c. p. 76.

2) H. Landolt u. R. Börnstein, Phys.-chem. Tabellen p. 224. 1894.

werden, die alle den gleichen Prozentgehalt des Lösungsmittels an Alkohol besitzen.

Der Salzgehalt S (g Salz in 100 ccm der Lösung) wurde durch Titration bestimmt, und die Leitfähigkeit K nach der oben beschriebenen Methode, wobei als Einheit der Leitfähigkeit die Leitfähigkeit eines Körpers angenommen wurde, von dem eine Säule von 1 cm Länge und 1 qcm Querschnitt den Widerstand 1 Ohm besitzt. Die erhaltenen Resultate sind in den folgenden Tabellen, denen die Kurven in Fig. 11 entsprechen, zusammengestellt. Der Prozentgehalt des Alkohols bezieht sich auf 100 g des Lösungsmittels.

Tabelle 13.

C_2H_5OH 0 % (Wasser).

S	K
68,42	0,1674
58,89	0,1925
43,14	0,2081
41,03	0,2069
34,41	0,1986
27,51	0,1809
20,69	0,1581
13,69	0,1147
6,90	0,0653

Tabelle 14.

C_2H_5OH 2,0$_2$ %.

S	K
51,69	0,1859
45,92	0,1904
43,75	0,1909
34,70	0,1825
26,49	0,1631
17,67	0,1253
8,77	0,0720

Tabelle 15.

C_2H_5OH 4,0$_3$ %.

S	K
43,44	0,1750
42,41	0,1750
35,79	0,1700
28,96	0,1560
21,22	0,1320
14,48	0,0995
7,20	0,0572

Tabelle 16.

C_2H_5OH 6,0$_2$ %.

S	K
35,99	0,1557
30,27	0,1462
24,22	0,1306
18,23	0,1085
12,22	0,0798
6,14	0,0455

Tabelle 17.

C_2H_5OH 8,0$_3$ %.

S	K
32,47	0,1379
27,07	0,1271
21,87	0,1134
16,29	0,0921
10,60	0,0664
5,43	0,0378

Tabelle 18.

C_2H_5OH 9,9$_7$ %.

S	K
29,33	0,1221
24,62	0,1112
19,83	0,0970
14,90	0,0787
9,85	0,0572
5,12	0,0324

Tabelle 19.

C_2H_5OH 15,1$_8$ %.

S	*K*
24,07	0,0899
18,80	0,0752
11,92	0,0531
6,32	0,0318

Tabelle 20.

C_2H_5OH 20,1$_5$ %.

S	*K*
18,99	0,0626
14,84	0,0509
9,75	0,0366
5,23	0,0221

Tabelle 21.

C_2H_5OH 28,1 %.

S	*K*
12,21	0,0318
8,27	0,0235
4,14	0,0137

Tabelle 22.

C_2H_5OH 38,8 %.

S	*K*
5,96	0,0117
2,97	0,0069

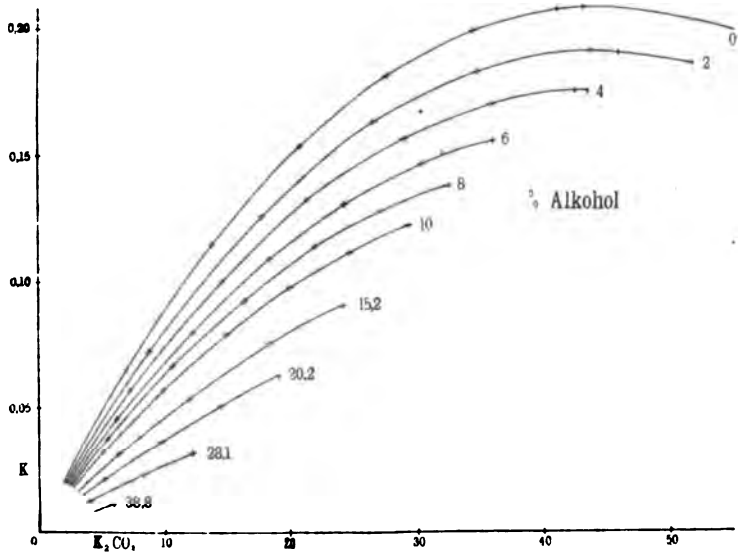


Fig. 11.

Die Lösungen mit Mangansulfat wurden aus in der Dissertation angeführten Gründen so hergestellt, daß ein Glaskolben mit Stöpsel leer gewogen wurde. Dann wurde eine geeignet erscheinende Menge Alkohol (99,3 Proz.) zugegeben und das Ganze wieder gewogen. Hieraus konnte die Menge einer

Lösung von Mangansulfat in Wasser berechnet werden, die zugegeben werden mußte, damit in 100 g der Gesamtlösung eine bestimmte Anzahl Gramm reinen Alkohols enthalten waren. Diese Menge wurde dann zugegeben und zwar zuletzt tropfenweise. Da ein Tropfen ca. 0,05 g wiegt, und immer über 50 g Lösung zugegeben werden mußte, so konnten die Lösungen mit hinreichend großer Genauigkeit hergestellt werden.

Die Werte für Mangansulfat finden sich in den folgenden Tabellen. Hier bezieht sich der Alkoholgehalt auf die ganze Lösung, und nicht wie bei Kaliumkarbonat nur auf das Lösungsmittel. Der Salzgehalt ist hier durch die Salzmenge ausgedrückt, die sich in 100 g der Lösung befindet. Den Tabellen entsprechen die Kurven in Fig. 12.

Tabelle 23.
0 % C_2H_5OH (Wasser).

S	$K \cdot 10^2$
38,89	1,888
30,78	3,345
30,22	3,429
26,60	3,834
22,37	4,085
19,99	4,083
17,35	3,961
12,10	3,381
7,47	2,478
6,51	2,265
3,78	1,508

Tabelle 24.
2 % C_2H_5OH.

S	$K \cdot 10^2$
35,38	2,061
35,11	2,085
33,44	2,323
32,28	2,518
26,97	3,213
21,71	3,461
17,15	3,391
12,17	2,940
9,39	2,549
6,88	2,065
3,33	1,218

Tabelle 25.
4 % C_2H_5OH.

S	$K \cdot 10^2$
33,50	1,860
32,18	2,034
28,33	2,498
24,49	2,812
20,64	2,948
16,00	2,863
9,98	2,315
9,26	2,213
5,78	1,619
2,78	0,942

Tabelle 26.
6 % C_2H_5OH.

S	$K \cdot 10^2$
31,96	1,693
27,71	2,096
27,14	2,150
20,34	2,498
16,76	2,470
13,53	2,307
9,00	1,900
5,09	1,297

Tabelle 27.
8 % C_2H_5OH.

S	$K \cdot 10^2$
29,15	1,607
27,10	1,772
24,99	1,936
20,65	2,118
14,74	2,068
8,84	1,628
4,45	1,047

Tabelle 28.
10% C_2H_5OH.

S	$K \cdot 10^3$
27,30	1,470
24,48	1,637
20,21	1,800
16,02	1,802
11,16	1,605
5,97	1,122

Tabelle 29.
12% C_2H_5OH.

S	$K \cdot 10^3$
24,18	1,387
20,08	1,523
17,88	1,538
11,03	1,382
6,40	1,027

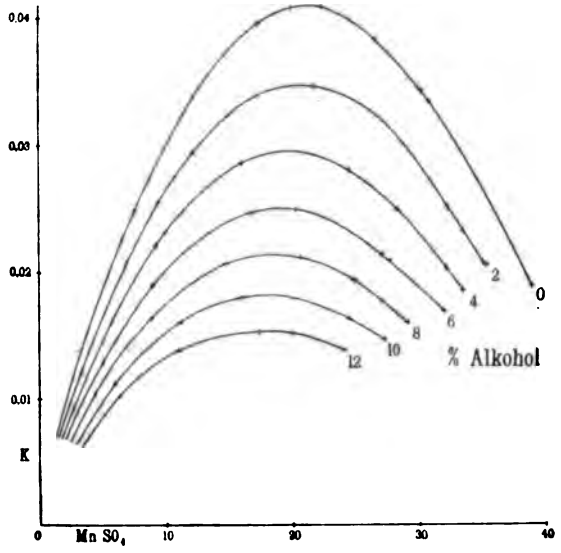


Fig. 12.

Aus Figg. 11 und 12 ergibt sich, daß der Charakter der Leitfähigkeitskurven für Lösungen von Salzen in Alkohol–Wassergemischen derselbe ist, wie für Lösungen der Salze in reinem Wasser. Das Maximum der Leitfähigkeit wird jedoch bei Lösungen von Kaliumkarbonat nicht mehr erreicht, deren Lösungsmittel mehr als ca. 4 Proz. Alkohol enthält, da sich die Lösung schon vorher in zwei Schichten trennt. Bei den Leitfähigkeitskurven für Mangansulfat ist folgende Erscheinung auffallend: Die Leitfähigkeitskurve für Lösungen von Mangan-

sulfat in reinem Wasser verläuft für hohe Salzgehalte beinahe geradlinig. Verlängern wir sie bis zur *S*-Achse, so schneidet sie diese im Punkt $S = 49$. In diesen Punkt münden auch alle Verlängerungen der Kurven mit 2—12 g Alkohol in 100 g Lösung.

Ferner ist bei gleichem Salzgehalt die Abnahme der Leitfähigkeit bei geringem Alkoholgehalt des Lösungsmittels größer, als bei hohem Alkoholgehalt. Daher wurde es nicht für nötig gehalten, die Leitfähigkeit auch bei höher prozentigen Alkoholen genauer zu untersuchen. Kamen Lösungen mit höher prozentigem Alkoholgehalte vor, so wurden dieselben durch Zugabe einer Lösung von Kaliumkarbonat bzw. Mangansulfat in Wasser auf den für mich gut meßbaren Bereich von 0—10 Proz. Alkohol zurückgeführt. Übrigens mußte diese Verdünnung, wie schon im I. Teil der Arbeit erwähnt wurde, mit jeder zu untersuchenden Schicht vorgenommen werden, weil die Schichtenbildung bei Kaliumkarbonat und Mangansulfat sehr wenig von der Temperatur abhängig ist, und daher die Lösung zu nahe dem Ende der Leitfähigkeitskurven gelegen wäre, und deshalb die Bestimmung des Alkoholgehaltes des Lösungsmittels zu ungenau geworden wäre.

Um überhaupt den Alkoholgehalt des Lösungsmittels einer beliebigen Lösung von Kaliumkarbonat zu finden, bestimmt man die Menge Salz, die sich in 100 ccm der Lösung befindet, durch Titration, und die Leitfähigkeit der Lösung bei 15°. Hierauf bestimmt man mit Hilfe der Leitfähigkeitskurven für den betreffenden Salzgehalt die Kurve, die die Abhängigkeit der Leitfähigkeit vom Alkoholgehalt gibt, und hat dann für die betreffende Leitfähigkeit den Prozentgehalt des Lösungsmittels an Alkohol. Entsprechend hat man bei Lösungen von Mangansulfat die Menge Salz durch Abdampfen zu bestimmen, die sich in 100 g Lösung befindet.

Resultate.

1. Aus meinen Versuchen geht hervor, daß für Kaliumkarbonat, Mangansulfat und Ammoniumsulfat eine Reihe gesättigter Lösungen besteht, von denen je zwei miteinander im Gleichgewicht stehen können. Bezieht man den Salzgehalt und den Alkoholgehalt dieser Lösungen auf 100 g Wasser, und

wählt den Alkoholgehalt als *X*-Achse und den Salzgehalt als *Y*-Achse eines rechtwinkeligen Koordinatensystems, so erhält man, wenn man die verschiedenen gesättigten Lösungen aufträgt (bei derselben Temperatur), eine Kurve, die im ersten Quadranten verläuft, nach unten konvex ist, und sich den beiden Achsen nähert, um schließlich, wie sich aus den theoretischen Arbeiten Schreinemakers und den experimentellen von B. R. de Bruyn ergibt, in die Kurve überzugehen, die das Gleichgewicht zwischen gesättigten Lösungen und dem Salz oder festen Hydraten darstellt.

Eine Lösung, die zwischen der *X*- und *Y*-Achse und dieser Kurve liegt, ist ungesättigt; liegt aber die Lösung oberhalb der Kurve, so zerfällt sie in zwei ganz bestimmte Schichten. Die Schichten sind dadurch bestimmt, daß sie im Gleichgewicht stehen müssen, und die Verbindungslinie der beiden Punkte, durch die sie in unserem Koordinatensystem dargestellt werden, durch den Punkt gehen muß, der der Zusammensetzung der Gesamtlösung entspricht.

2. Es hat sich weiter ergeben, daß die Temperatur bei Kaliumkarbonat, Mangansulfat und Ammoniumsulfat sehr wenig Einfluß sowohl auf den Eintritt der Schichtenbildung, als auch auf die Zusammensetzung der beiden Schichten ausübt.

3. Die kritische Lösung, d. h. die Lösung, bei der die beiden Schichten einander gleich werden, die also durch den Punkt dargestellt wird, wo die beiden Kurventeile für die obere und untere Schicht zusammentreffen, hat bei Kaliumkarbonat für die untersuchten Temperaturen die gleiche Zusammensetzung.

4. Die Änderung der Schichtungskurven mit der Temperatur erfolgt bei Kaliumkarbonat derart, daß für die oberen Schichten die Schichtungskurve für eine höhere Temperatur höher liegt als für eine niedrigere Temperatur. Für die unteren Schichten mit sehr großem Salzgehalt ist dasselbe der Fall. Bei mittlerem Salzgehalt schneiden sich die Kurven und gehen dann alle durch den kritischen Punkt.

5. Sehr verschieden verhalten sich Kaliumkarbonat und Mangansulfat beim Lösen in Alkohol-Wassergemischen. Während das erstere sich auch dann noch löst, wenn bereits Schichtenbildung eingetreten ist, erhält man beim Lösen von Mangan-

sulfat niemals Schichtenbildung, indem das Salz ungelöst bleibt. Man erhält bei letzterem Schichtenbildung, indem man einer Lösung des Salzes in Wasser Alkohol zusetzt.

6. Der Bodländersche Ausdruck sowie der von W. Herz und M. Knoch zeigen sich für mittlere Alkoholgehalte ziemlich gut konstant.

7. Die Leitfähigkeitsbestimmungen ergaben, daß sich das Maximum der Leitfähigkeit, das bei Lösungen von Kaliumkarbonat und Mangansulfat in reinem Wasser auftritt, mit steigendem Alkoholgehalt zu Lösungen mit sinkendem Salzgehalt verschiebt. Die Leitfähigkeit nimmt mit wachsendem Alkoholgehalt bei gleichem Salzgehalt sehr rasch ab.

Zum Schluß möchte ich Hrn. Prof. Dr. E. Wiedemann für die Anregung und mannigfache Unterstützung bei der Ausführung meiner Arbeit meinen besten Dank aussprechen, ebenso auch Hrn. Prof. Dr. A. Wehnelt und Hrn. Prof. Dr. R. Reiger.

Erlangen, Januar 1908.

(Eingegangen 10. Januar 1908.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

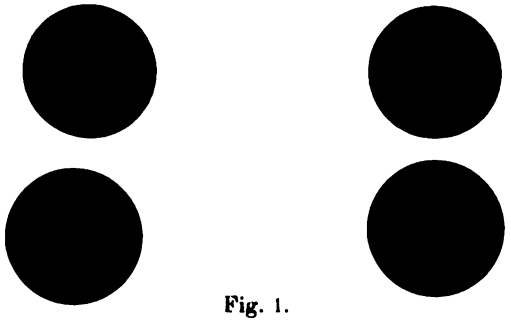


Fig. 1.

Fig. 2.

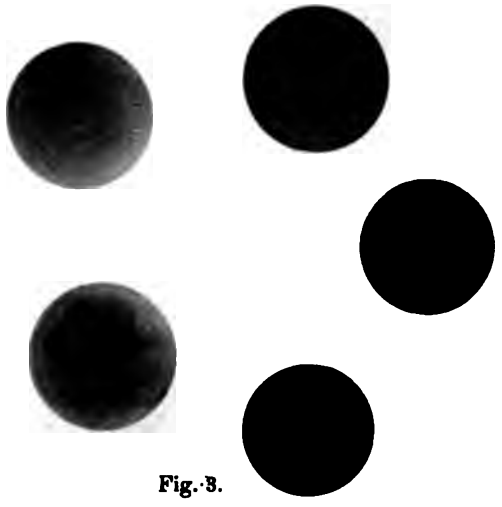
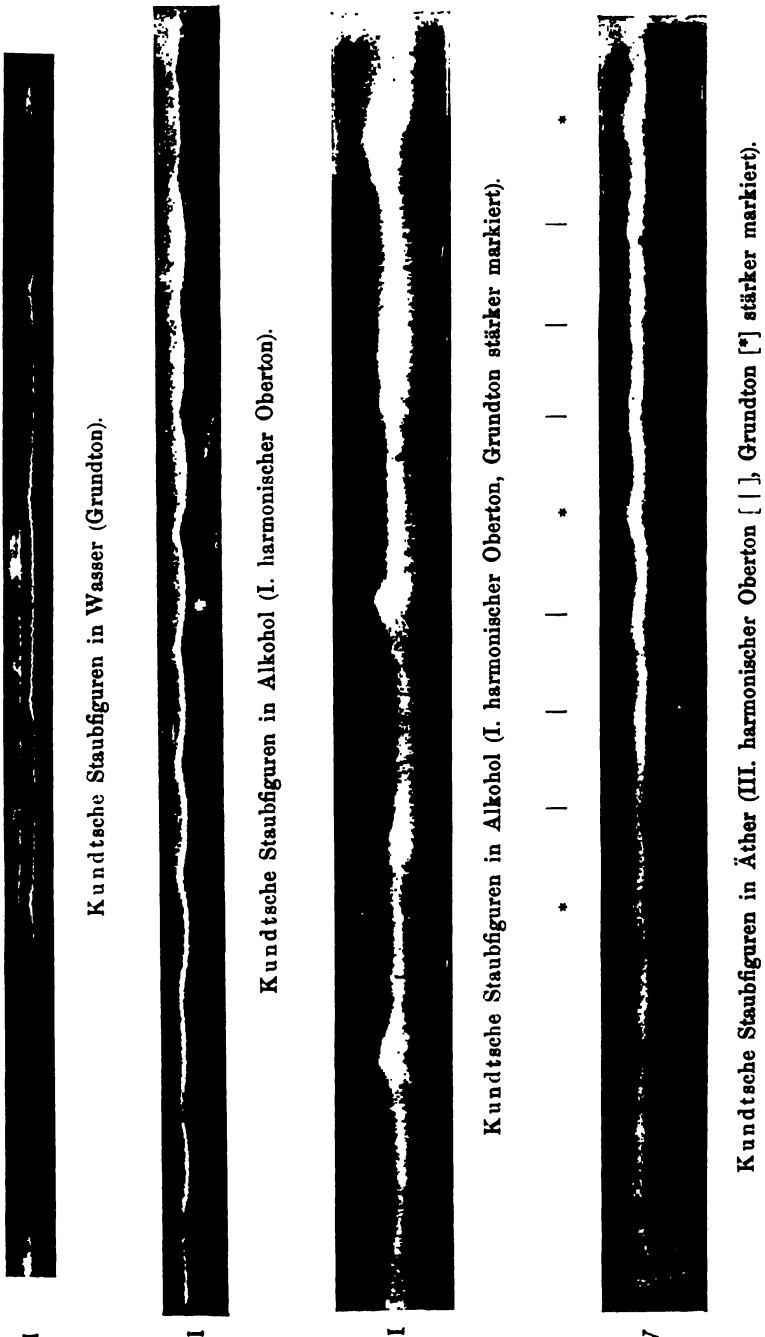


Fig. 3.

Chr. Jensen.



I Kundtsche Staubfiguren in Wasser (Grundton).

II Kundtsche Staubfiguren in Alkohol (I. harmonischer Oberton).

III Kundtsche Staubfiguren in Alkohol (I. harmonischer Oberton, Grundton stärker markiert).

IV Kundtsche Staubfiguren in Äther (III. harmonischer Oberton [|], Grundton [*] stärker markiert).

1908. № 3.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 25.

1. *Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen;* *von Gustav Mie.*

1. Die mannigfachen Färbungen der Metalle im kolloidalen Zustand haben im Laufe der Zeiten recht verschiedenartige Deutungen erfahren. Früher neigte man sehr zu der Meinung, daß die betreffenden Metalle (besonders das Silber) in mehreren verschieden gefärbten Modifikationen aufträten. Später ist die Meinung aufgekommen, daß die Farben auf optischer Resonanz beruhten. Diese Meinung ist besonders eingehend von F. Ehrenhaft[1]) begründet worden. Endlich hat neuerdings J. C. Maxwell-Garnett[2]) nachgewiesen, daß sich die Farben von kolloidalen Metallen, wenn die suspendierten Partikelchen des Metalles sehr klein sind, aus der Theorie, die L. Lorenz[3]) für optisch inhomogene Medien entwickelt hat, einwandsfrei erklären lassen. Die Theorie ergibt für eine feine Metallsuspension, in denen die Dimensionen der Teilchen im Vergleich zur Wellenlänge und außerdem zu ihren gegenseitigen Entfernungen sehr klein sind, eine ganz bestimmte Absorptionskurve, die sich aus den optischen Konstanten des Metalles vorher berechnen läßt und demnach, obwohl sie durchaus verschieden von der Absorptionskurve des soliden Metalles verläuft, doch gar nichts mit Resonanz in dem Sinne, in dem dieses Wort von Ehrenhaft, Wood u. a. gebraucht wird, zu tun hat. So konnte Maxwell-Garnett unter anderem die rote Farbe vieler Goldlösungen, die Ehrenhaft als Resonanz-

1) F. Ehrenhaft, Wiener Sitzungsber. IIa. 112. p. 181. 1903; 114. p. 1115. 1905.

2) J. C. Maxwell-Garnett, Phil. Trans. 203. p. 385. 1904; 205. p. 237. 1906. Für den Brechungsexponenten von Gelatine-Silberemulsionen wies auch F. Kirchner in seiner Leipziger Dissertation die Gültigkeit der Lorenzschen Formel nach (Ann. d. Phys. 18. p. 239. 1904).

3) L. Lorenz, Wied. Ann. 11. p. 70. 1880.

wirkung auffaßte, aus der Lorenzschen Theorie ungezwungen herleiten. Andere Farben ergibt die Theorie, wenn die Teilchen näher zusammenrücken, und man kann, wie Maxwell-Garnett durch Rechnung nachwies, alle möglichen Übergänge von der Farbe der unendlich verdünnten Metallsuspension bis zu der des soliden Metalles bekommen. So erklären sich auch in sehr einfacher Weise die interessanten Farbenumwandlungen, die F. Kirchner und R. Zsigmondy[1]) an eintrocknender Gelatine, die kolloidales Gold enthielt, beobachtet haben.

Indessen paßt diese von Maxwell-Garnett in manchen Fällen so erfolgreich durchgeführte Erklärung der eigentümlichen optischen Eigenschaften kolloidaler Metalle doch in sehr vielen anderen Fällen gar nicht. Man kann auch an *sehr verdünnten* Lösungen eines und desselben Metalles die mannigfachsten Färbungen erhalten, während sie nach der Lorenzschen Theorie stets ein und dieselbe Absorptionskurve zeigen müßten. Nun beruht aber andererseits die von Ehrenhaft vertretene Ansicht über die Resonanz der Teilchen auf der durchaus unzulässigen Annahme, daß man die Metalle auch optisch als vollkommene Leiter ansehen dürfe. Abgesehen von den Einwendungen, die gegen eine solche Annahme vom Standpunkt der Theorie[2]) erhoben werden müssen, wird ihre Unrichtigkeit direkt bewiesen erstens durch die Tatsache, daß Lösungen mit allerkleinsten Metallteilchen nicht vorwiegend violett und blau diffus reflektieren und in der Durchsicht nicht gelbrot aussehen, sondern daß sie sowohl im durchgehenden wie im auffallenden Licht andere für das betreffende Metall charakteristische Farben zeigen, zweitens durch die Tatsache, daß in Lösungen mit sehr feinen Teilchen das diffus zerstreute Licht sein Polarisationsmaximum nicht, wie die von Ehrenhaft vertretene Theorie behauptet, bei 120°, sondern genau wie in Trübungen durch nicht leitende Stoffe bei 90° hat, wo das Licht fast vollkommen polarisiert ist.

Um die Frage definitiv zu entscheiden, ob in den kolloidalen Metallösungen von verschiedener Farbe verschiedene allotrope

1) R. Zsigmondy, Ann. d. Phys. 15. p. 573. 1904.

2) Vgl. die Diskussion zwischen F. Pockels und F. Ehrenhaft in der Physik. Zeitschr. 5. p. 152, 387, 460. 1904.

Modifikationen des Stoffes auftreten, die im kompakten Zustand nicht vorkommen, oder ob man sie durch Teilchen von derselben physikalischen Beschaffenheit, die das kompakte Metall hat, die sich nur in Größe und Form voneinander unterscheiden, erklären kann, ist es unbedingt nötig, sowohl noch mehr experimentelles Material zu schaffen, als auch die Theorie in exakter Form zu entwickeln.

Es sind deswegen im Greifswalder Institut genaue Messungen an verschiedenartigen kolloidalen Goldlösungen von Hrn. Steubing ausgeführt worden. Ich habe über einen kleinen Teil dieser Messungen schon auf der Dresdener Naturforscherversammlung vorläufig berichtet. Die ausführliche Arbeit wird Hr. Steubing in allernächster Zeit veröffentlichen.

Die optische Theorie wird man jedenfalls nach mehreren Richtungen hin entwickeln müssen. Obwohl nämlich die Metalle im allgemeinen regulär kristallisieren, und zwar vorwiegend in Form von Oktaedern, so ist es doch sehr wohl möglich, daß sich bei schnellem Ausscheiden aus der Lösung sehr stark verzerrte Kristalle bilden, die als Blättchen oder Stäbchen in der Flüssigkeit schweben. Andererseits können sich aber auch sicher sehr regelmäßige Kristalle ausbilden, wie man das z. B. in dem sogenannten Avanturinglas an den schönen Kupferoktaedern beobachtet. Die Theorie wird nun für solche ringsum gleichartig ausgebildeten Kristalle, wie regelmäßige Oktaeder, Würfel u. dgl. fürs erste einfach Kugeln substituieren dürfen, ebenso für Blättchen und Stäbchen abgeflachte oder langgestreckte Ellipsoide. Ich möchte dabei aber erwähnen, daß doch von Hrn. Steubing gewisse Beobachtungen über die Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes gemacht sind, auf die ich in **20.** noch zurückkommen werde, die den Gedanken nahe legen, daß wir es nicht wirklich mit Kugeln oder ähnlich einfachen Körpern zu tun haben.

Die im folgenden vorliegende Arbeit beschäftigt sich nur mit dem einfachsten Fall, in welchem man den Teilchen Kugelform zuschreiben darf.

Polarkoordinaten.

2. Wir wollen uns die drei Koordinatenachsen (x, y, z) der Einfachheit numeriert denken (1, 2, 3). Das Koordinaten-

system sei ein Rechtssystem. Es sei ferner der Radiusvektor eines Punktes (x, y, z) mit r bezeichnet, der Winkel, den r mit der Achse 1 bildet, sei ϑ, der Winkel der Projektion von r auf die (2, 3)-Ebene mit der Achse 2 sei φ (Fig. 1). Dann sind also (r, ϑ, φ) Polarkoordinaten des Punktes. Wir wollen ferner die Komponenten der elektrischen und der magnetischen Feldintensität in diesem Polarkoordinatensystem bezeichnen mit $\mathfrak{E}_r$, $\mathfrak{E}_\vartheta$, $\mathfrak{E}_\varphi$ und $\mathfrak{H}_r$, $\mathfrak{H}_\vartheta$, $\mathfrak{H}_\varphi$. Es läßt sich dann leicht zeigen, daß die Maxwellschen Gleichungen die folgende Form annehmen:

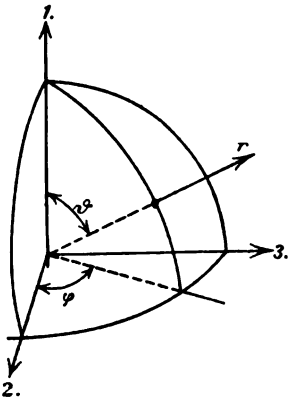


Fig. 1. Koordinatensystem.

$$
(1)\quad
\begin{cases}
r^2 \cdot \sin\vartheta \left(k \cdot \dfrac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial t} + \Lambda \cdot \mathfrak{E}_r\right) = \dfrac{\partial (r \cdot \sin\vartheta \cdot \mathfrak{H}_\varphi)}{\partial \vartheta} - \dfrac{\partial (r \cdot \mathfrak{H}_\vartheta)}{\partial \varphi}, \\
r \cdot \sin\vartheta \cdot \left(k \cdot \dfrac{\partial \mathfrak{E}_\vartheta}{\partial t} + \Lambda \cdot \mathfrak{E}_\vartheta\right) = \dfrac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial (r \cdot \sin\vartheta \cdot \mathfrak{H}_\varphi)}{\partial r}, \\
r \cdot \left(k \cdot \dfrac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial t} + \Lambda \cdot \mathfrak{E}_\varphi\right) = \dfrac{\partial (r \cdot \mathfrak{H}_\vartheta)}{\partial r} - \dfrac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \vartheta}, \\
-r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot \mu \cdot \dfrac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial t} = \dfrac{\partial (r \cdot \sin\vartheta \cdot \mathfrak{E}_\varphi)}{\partial \vartheta} - \dfrac{\partial (r \cdot \mathfrak{E}_\vartheta)}{\partial \varphi}, \\
-r \cdot \sin\vartheta \cdot \mu \cdot \dfrac{\partial \mathfrak{H}_\vartheta}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial (r \cdot \sin\vartheta \cdot \mathfrak{E}_\varphi)}{\partial r}, \\
-r \cdot \mu \cdot \dfrac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial t} = \dfrac{\partial (r \cdot \mathfrak{E}_\vartheta)}{\partial r} - \dfrac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \vartheta}.
\end{cases}
$$

Hier bedeuten k, Λ, μ Dielektrizität, Leitvermögen, Permeabilität, alle in demselben Maßsystem. In einem nicht leitenden Medium ist $k \cdot \mu = 1/v^2$, wenn v die Geschwindigkeit elektromagnetischer Wellen in dem Medium ist.

Man könnte nun leicht durch geeignete Eliminationen für $\mathfrak{E}_r$ und $\mathfrak{H}_r$ je eine Differentialgleichung zweiter Ordnung aufstellen, die die übrigen Unbekannten nicht mehr enthält. Wir wollen das aber erst ausführen, nachdem wir die Gleichungen speziell für das Problem regelmäßiger Schwingungen umgeformt haben.

Wir setzen dazu:

$$\mathfrak{E}_r = E_r \cdot e^{2\pi i n t}, \quad \mathfrak{H}_r = H_r \cdot e^{2\pi i n t} \text{ usw.}, \tag{2}$$

wo E_r und H_r nur noch von den Koordinaten, aber nicht von der Zeit abhängen, und n die Schwingungszahl in der Sekunde ist. Ferner ist:

$$4\pi^2 \cdot n^2 \cdot \mu \cdot k - 2\pi i \cdot n \cdot \mu \cdot \Delta = \frac{4\pi^2 \cdot m^2}{\lambda^2} \tag{3}$$

und zwar bedeutet hier λ die Wellenlänge der betreffenden Schwingung im Vakuum, ferner m den komplexen Brechungsexponenten des Mediums für Licht von der Wellenlänge λ. In einem nicht absorbierenden Medium (z. B. Wasser) ist m identisch mit dem gewöhnlichen Brechungsexponenten, in Metallen dagegen ist $m = \nu \cdot (1 - i \cdot \varkappa)$, wo ν die gewöhnlich als Brechungsexponent bezeichnete reelle Größe und $\varkappa$ den Absorptionskoeffizienten bedeuten.

Endlich wollen wir noch folgende Bezeichnungen einführen:

$$-\frac{i \cdot n \cdot \mu \cdot \lambda}{m} \cdot H_r = M_r \text{ usw.}, \tag{4}$$

$$\frac{2\pi m r}{\lambda} = x. \tag{5}$$

Wir bekommen dann die folgenden Gleichungen, in welchen die Größen E und M in ganz gleicher Weise eintreten:

$$\left\{\begin{aligned}
x^2 \cdot \sin\vartheta \cdot E_r &= \frac{\partial (x \cdot \sin\vartheta \cdot M_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (x \cdot M_\vartheta)}{\partial \varphi}, \\
x \cdot \sin\vartheta \cdot E_\vartheta &= \frac{\partial M_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (x \sin\vartheta \cdot M_\varphi)}{\partial x}, \\
x \cdot E_\varphi &= \frac{\partial (x \cdot M_\vartheta)}{\partial x} - \frac{\partial M_r}{\partial \vartheta}, \\
x^2 \cdot \sin\vartheta \cdot M_r &= \frac{\partial (x \sin\vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (x E_\vartheta)}{\partial \varphi}, \\
x \cdot \sin\vartheta \cdot M_\vartheta &= \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (x \cdot \sin\vartheta \cdot E_\varphi)}{\partial x}, \\
x \cdot M_\varphi &= \frac{\partial (x \cdot E_\vartheta)}{\partial x} - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta}.
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Wir denken uns nun ein kugelförmiges Partikelchen vom Radius ϱ, dessen Zentrum mit dem Koordinatenanfang zusammenfällt, außen ist das Lösungsmittel (z. B. Wasser). Wir wollen die Feldgrößen in der Kugel und im Lösungsmittel

durch die Suffixe i und a unterscheiden, die beiden Brechungsexponenten seien m und m_0. Von der Permeabilität wollen wir annehmen, daß sie innen und außen gleich sei: $\mu_i = \mu_a$. Die Variable x macht an der Kugeloberfläche einen Sprung, da

$$x_i = \frac{2\pi m}{\lambda} \cdot r, \quad x_a = \frac{2\pi m_0}{\lambda} r = \frac{2\pi}{\lambda'} \cdot r,$$

wenn λ' die Wellenlänge in dem Lösungsmittel bedeutet. An der Kugeloberfläche müssen die folgenden Grenzbedingungen erfüllt sein:

$$(7) \qquad \begin{cases} E_{\vartheta a} = E_{\vartheta i}, & E_{\varphi a} = E_{\varphi i}, \\ (x \,.\, M_\vartheta)_a = (x \,.\, M_\vartheta)_i, & (x \,.\, M_\varphi)_a = (x \,.\, M_\varphi)_i. \end{cases}$$

Lösungen der Maxwellschen Gleichungen.

3. Um die Gleichungen (6) zu lösen, hat man einfach die von Lord Rayleigh in „Theory of Sound" entwickelten Methoden anzuwenden. Es ist das beispielsweise schon von Fr. Hasenöhrl[1]) für andere Zwecke einmal ausgeführt. Ich gebe im folgenden aufs neue eine kurze Herleitung der Integrale, um möglichst übersichtlich alle zur Diskussion zu benutzenden Formeln zusammenstellen zu können.

Wie schon oben erwähnt, läßt sich durch geeignete Eliminationen aus den Gleichungen (6) für E_r und M_r je eine Gleichung zweiter Ordnung aufstellen:

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 (x^2 E_r)}{\partial x^2} + \dfrac{1}{\sin\vartheta} \cdot \dfrac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \cdot \dfrac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{\sin^2\vartheta} \cdot \dfrac{\partial^2 E_r}{\partial \varphi^2} + x^2 E_r = 0, \\ \dfrac{\partial^2 (x^2 M_r)}{\partial x^2} + \dfrac{1}{\sin\vartheta} \cdot \dfrac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \cdot \dfrac{\partial M_r}{\partial \vartheta} \right) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{\sin^2\vartheta} \cdot \dfrac{\partial^2 M_r}{\partial \varphi^2} + x^2 \,.\, M_r = 0. \end{cases}$$

Wir können jetzt alle Lösungen des Gleichungssystems (6) in drei Gruppen sondern. Die erste Gruppe stellt die Wellen dar, die durch elektrische Schwingungen der Kugel entstehen, sie ist charakterisiert durch:

$$E_r \neq 0, \quad M_r = 0.$$

1) Fr. Hasenöhrl, Wiener Ber. IIa. 111. p. 1229. 1902.

Die zweite Gruppe stellt die Wellen dar, die durch magnetische Schwingungen der Kugel entstehen. Für sie ist:

$$E_r = 0, \quad M_r \neq 0.$$

Die dritte Gruppe enthält alle Integrale der Maxwellschen Gleichungen, die regelmäßig periodische Schwingungen darstellen. Man kann sie erhalten, indem man Integrale der Gruppe I mit Integralen der Gruppe II addiert.

Vorausgesetzt, wir hätten eine Lösung der Differentialgleichung für E_r gefunden, dann erhält man die übrigen Komponenten, die dem Fall der Gruppe I entsprechen, sehr einfach durch das folgende Verfahren: Man setzt in der zweiten und dritten Gleichung des Systems (6) $M_r = 0$ ein, und substituiert dann für M_φ und M_ϑ die Werte aus der fünften und sechsten Gleichung. Man hat dann sofort die Gleichungen, die zur Berechnung von E_ϑ und E_φ aus dem bekannten E_r dienen müssen. Hat man nun E_r, E_ϑ, E_φ, so findet man natürlich M_ϑ und M_φ aus den beiden letzten Gleichungen des Systems (6). Es ergibt sich so das folgende Formelsystem:

$$(9)\quad \begin{cases} E_r, & M_r = 0, \\ \dfrac{\partial^2 (x \,.\, E_\vartheta)}{\partial x^2} + x \,.\, E_\vartheta = \dfrac{\partial^2 E_r}{\partial \vartheta \, \partial x}, & \dfrac{\partial (x \,.\, M_\vartheta)}{\partial x} = x \,.\, E_\varphi, \\ \dfrac{\partial^2 (x . \sin \vartheta \,.\, E_\varphi)}{\partial x^2} + x \sin \vartheta \,.\, E_\varphi = \dfrac{\partial^2 E_r}{\partial \varphi \, \partial x}, & \dfrac{\partial (x \, M_\varphi)}{\partial x} = - x \,.\, E_\vartheta. \end{cases}$$

Ganz analog wird die Rechnung für Gruppe II. Ferner kann man E_r allgemein berechnen als eine Summe von Gliedern, deren jedes Gleichung (8) einzeln erfüllt und ein Produkt aus einer Funktion von x mit einer Funktion der Winkel ϑ, φ ist. Das ν^{te} Glied sei:

$$E_r^{(\nu)} = \frac{K_\nu (x)}{x^2} \cdot P_\nu (\vartheta, \varphi).$$

Dann müssen K_ν und P_ν die folgenden beiden Gleichungen erfüllen:

$$(10) \qquad \frac{d^2 K_\nu}{d x^2} + \left(1 - \frac{c_\nu}{x^2}\right) K_\nu = 0,$$

$$(11) \qquad \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\sin \vartheta \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta}\right] + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 P_\nu}{\partial \varphi^2} + c_\nu \,.\, P_\nu = 0,$$

wo c_ν irgend eine reelle oder komplexe Zahl sein könnte. Wir wollen nur solche Funktionen K_ν und P_ν benutzen, für die

$$(12) \qquad c_\nu = \nu \,.\, (\nu + 1).$$

Es ist dann P_ν eine Kugelfunktion der beiden Variabeln ϑ, φ von der ganzzahligen Ordnung ν, K_ν ist eine mit den Zylinderfunktionen mit gebrochenem Index (Nenner 2) nahe verwandte Funktion. Die Gleichungen (9) ergeben nun die folgende Lösung der Maxwellschen Gleichungen:

$$(13)\quad \begin{cases} E_r^{(\nu)} = \dfrac{K_\nu(x)}{x^2} \cdot P_\nu(\vartheta, \varphi), \\ E_\vartheta^{(\nu)} = \dfrac{1}{\nu.(\nu+1)} \cdot \dfrac{K_\nu'(x)}{x} \cdot \dfrac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta}, \\ E_\varphi^{(\nu)} = \dfrac{1}{\nu.(\nu+1)} \cdot \dfrac{K_\nu'(x)}{x.\sin\vartheta} \cdot \dfrac{\partial P_\nu}{\partial \varphi}, \\ M_r^{(\nu)} = 0, \\ M_\vartheta^{(\nu)} = \dfrac{1}{\nu.(\nu+1)} \cdot \dfrac{K_\nu(x)}{x.\sin\vartheta} \cdot \dfrac{\partial P_\nu}{\partial \varphi}, \\ M_\varphi^{(\nu)} = -\dfrac{1}{\nu.(\nu+1)} \cdot \dfrac{K_\nu(x)}{x} \cdot \dfrac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta}. \end{cases}$$

Damit haben wir die Lösungen der ersten Gruppe ($M_r = 0$) gefunden. Wir können nun aber wegen der Symmetrie der Differentialgleichungen (6) in bezug auf die E und M ohne weiteres auch die Lösungen der Gruppe II ($E_r = 0$) hinschreiben, nämlich:

$$(14)\quad \begin{cases} E_r^{(\nu)} = 0, \\ E_\vartheta^{(\nu)} = \dfrac{1}{\nu.(\nu+1)} \cdot \dfrac{K_\nu(x)}{x.\sin\vartheta} \cdot \dfrac{\partial \mathfrak{P}_\nu(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi}, \\ E_\varphi^{(\nu)} = -\dfrac{1}{\nu.(\nu+1)} \cdot \dfrac{K_\nu(x)}{x} \cdot \dfrac{\partial \mathfrak{P}_\nu(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta}, \\ M_r^{(\nu)} = \dfrac{K_\nu(x)}{x^2} \cdot \mathfrak{P}_\nu(\vartheta, \varphi), \\ M_\vartheta^{(\nu)} = \dfrac{1}{\nu.(\nu+1)} \cdot \dfrac{K_\nu'(x)}{x} \cdot \dfrac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta}, \\ M_\varphi^{(\nu)} = \dfrac{1}{\nu.(\nu+1)} \cdot \dfrac{K_\nu'(x)}{x.\sin\vartheta} \cdot \dfrac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi}, \end{cases}$$

wo K_ν und $\mathfrak{P}_\nu$ irgendwelche Lösungen der Gleichungen (10) und (11) sind, in denen $c_\nu = \nu.(\nu+1)$ zu setzen ist.

Alles kommt nun darauf an, ein ebene Welle, nämlich die auf das kugelförmige Partikelchen auftreffende Welle mit Hilfe von (13) und (14) auszudrücken. Dazu müssen wir aber zunächst die wichtigsten Eigenschaften der dabei zu verwendenden Lösungen von (10) und (11) kennen.

Die Funktionen K_ν und I_ν.

4. Die Differentialgleichung (10)

$$\frac{d^2K_\nu}{dx^2} + \left(1 - \frac{\nu\,.\,(\nu+1)}{x^2}\right)\cdot K_\nu = 0$$

läßt sich für den Fall $\nu = 0$ sofort lösen. Zwei partikuläre Integrale sind:

$$K_0(x) \quad = e^{ix},$$
$$K_0(-x) = e^{-ix}.$$

Kennt man ferner eine Lösung der Gleichung von der Ordnungszahl ν, K_ν, so kann man durch Einsetzen leicht beweisen, daß eine Lösung $K_{\nu+1}$ der Gleichung von der Ordnungszahl $(\nu+1)$ folgendermaßen berechnet werden kann:

$$K_{\nu+1}(x) = i\,.\left((\nu+1)\cdot\frac{K_\nu}{x} - \frac{dK_\nu}{dx}\right). \tag{15}$$

Diese Rekursionsformel liefert, wenn man $K_0(x) = e^{ix}$ wählt:

$$K_\nu(x) = e^{ix}\,.\sum_0^\nu{}_\mu \frac{(\nu+\mu)!}{\mu!\,(\nu-\mu)!}\cdot\frac{i^\mu}{2^\mu\,.\,x^\mu}. \tag{16}$$

Aus (15) findet man, wenn man einmal differentiiert, darauf dK_ν/dx und mit Hilfe von (10) auch noch d^2K_ν/dx^2 eliminiert:

$$K_{\nu-1}(x) = -\,i\,.\left(\nu\cdot\frac{K_\nu}{x} + \frac{dK_\nu}{dx}\right). \tag{17}$$

Ferner erhält man aus (15) und (17) folgende oft zu brauchenden Relationen:

$$\begin{cases} (2\nu+1)\cdot\dfrac{K_\nu(x)}{x} = i\,.\,K_{\nu-1} + \dfrac{1}{i}\cdot K_{\nu+1} \\ (2\nu+1)\cdot\dfrac{dK_\nu}{dx} = (\nu+1)\,.\,i\,.\,K_{\nu-1} - \nu\cdot\dfrac{1}{i}\cdot K_{\nu+1}\,. \end{cases} \tag{18}$$

Eine zweite partikuläre Lösung von (10) bekommt man ohne weiteres, da in (10) nur die zweite Potenz von x bzw. dx vorkommt, wenn man in der ersten Lösung das Vorzeichen umkehrt $K_\nu(-x)$. Die allgemeine Lösung ist also:

$$A\,.\,K_\nu(x) + B\,.\,K_\nu(-x).$$

Da wir im folgenden gerade die Lösung $K_\nu(-x)$ brauchen werden, so wird es gut sein, die Relationen noch einmal hin-

zuschreiben, die man bekommt, wenn man in (15), (16), (17), (18) das Vorzeichen von x umkehrt:

$$(19) \qquad K_\nu(-x) = e^{-ix} \cdot \sum_0^\nu{}_\mu \frac{(\nu+\mu)!}{\mu!\,(\nu-\mu)!} \cdot \frac{(-i)^\mu}{2^\mu \cdot x^\mu},$$

$$(20) \qquad \begin{cases} K_{\nu+1}(-x) = -i \cdot \left((\nu+1) \cdot \dfrac{K_\nu(-x)}{x} - K_\nu'(-x)\right), \\ K_{\nu-1}(-x) = +i \cdot \left(\nu \cdot \dfrac{K_\nu(-x)}{x} + K_\nu'(-x)\right). \end{cases}$$

$$(21) \qquad \begin{cases} -(2\nu+1) \cdot \dfrac{K_\nu(-x)}{x} = i \cdot K_{\nu-1}(-x) + \dfrac{1}{i} \cdot K_{\nu+1}(-x), \\ -(2\nu+1) \cdot K_\nu'(-x) = i \cdot (\nu+1) \cdot K_{\nu-1}(-x) - \dfrac{\nu}{i} \cdot K_{\nu+1}(-x). \end{cases}$$

5. Wenn man in den Ausdrücken (16) und (19) e^{ix} und e^{-ix} in Potenzreihen entwickelt und darauf ausmultipliziert und nach Potenzen von x ordnet, so bekommt man die Potenzreihenentwickelungen für $K_\nu(x)$ und $K_\nu(-x)$, die natürlich eine endliche Anzahl von Potenzen mit negativen, ganzen Exponenten enthalten. Man bekommt nämlich:

$$K_\nu(x) = \sum_{r=-\nu}^{r=+\infty}{}_r i^r \cdot x^r \cdot \sum_0^\nu{}_\mu \frac{(\nu+\mu)!\,(-1)^\mu}{(\mu+r)!\,\mu!\,(\nu-\mu)!\,2^\mu}.$$

Nun läßt sich aber zeigen, daß:

$$\sum_0^\nu{}_\mu \frac{(-1)^\mu \cdot (\nu+\mu)!}{2^\mu \cdot (\mu+r)!\,\mu!\,(\nu-\mu)!} = \frac{(r-\nu+1)\cdot(r-\nu+3)\ldots(r+\nu-1)}{(r+\nu)!}.$$

Dieser Ausdruck ist dadurch bemerkenswert, daß er bis zu $r=\nu$ hin immer abwechselnd von Null verschieden und gleich Null ist. Bis zur Potenz x^ν hin bleiben also in der Reihe nur Glieder von der Form $x^{-\nu+2\mu}$ stehen. Setzen wir in den Koeffizienten $r = -\nu+2\mu$ ein, so bekommen wir:

$$\frac{(r-\nu+1)\cdot(r-\nu+3)\ldots(r+\nu-1)}{(r+\mu)!}$$

$$= (-1)^{\nu+\mu+1} \cdot \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2\nu-2\mu-1)\cdot1\cdot3\ldots(2\mu-1)}{(2\mu)!}.$$

Also:

$$(22)\quad \begin{cases} K_\nu(x) = -\,i^\nu \cdot \sum_0^\nu{}_\mu \dfrac{1\cdot 3\,..\,(2\nu-2\mu-1)\cdot 1\cdot 3\,..\,(2\mu-1)}{(2\mu)!}\cdot x^{-\nu+2\mu} \\ \qquad + \sum_{r=\nu+1}^{r=+\infty}{}_r \dfrac{(r-\nu+1)(r-\nu+3)\,..\,(r+\nu-1)}{(r+\nu)!}\cdot i^r \cdot x^r . \end{cases}$$

Ebenso:

$$(23)\quad \begin{cases} K_\nu(-x) \\ = -\,(-i)^\nu \cdot \sum_0^\nu{}_\mu \dfrac{1\cdot 3\,..\,(2\nu-2\mu-1)\cdot 1\cdot 3\,..\,(2\mu-2)}{(2\mu)!}\cdot x^{-\nu+2\mu} \\ \quad + \sum_{r=\nu+1}^{r=+\infty}{}_r \dfrac{(r-\nu+1)(r-\nu+3)\,..\,(r+\nu-1)}{(r+\nu)!}\cdot (-i)^r \cdot x^r . \end{cases}$$

Man sieht hieraus, daß die Differentialgleichung (10) auch *eine* Lösung hat, die um den Nullpunkt herum in eine Potenzreihe ohne negative Potenzen zu entwickeln ist. Wir wollen sie mit dem Buchstaben I_ν bezeichnen, und setzen:

$$(24)\qquad I_\nu(x) = \frac{1}{2i}\cdot\left(\frac{K_\nu(x)}{i^\nu} - \frac{K_\nu(-x)}{(-i)^\nu}\right).$$

Die Potenzreihe für I_ν hat lauter reelle Koeffizienten, sie lautet:

$$(25)\qquad I_\nu(x) = \sum_0^\infty{}_\mu \frac{(-1)^\mu \cdot x^{\nu+2\mu+1}}{(2\mu+1)!\,(2\mu+3)(2\mu+5)\,..\,(2\mu+2\nu+1)}.$$

Aus (18) und (19) ergeben sich zwei wichtige Relationen:

$$(26)\quad \begin{cases} (2\nu+1)\cdot\dfrac{I_\nu}{x} = I_{\nu-1} + I_{\nu+1}, \\ (2\nu+1)\cdot\dfrac{dI_\nu}{dx} = (\nu+1)\cdot I_{\nu-1} - \nu\cdot I_{\nu+1}. \end{cases}$$

6. Zur Berechnung der Funktionen $K_\nu(-x)$, $I_\nu(x)$ und ihrer ersten Ableitungen (die in den Schlußformeln allein vorkommen) werden wir am besten folgende Ausdrücke brauchen:

$$
(27)\quad
\begin{cases}
K_1(-x) = -\frac{i}{x}\cdot e^{-ix}\cdot(1+ix),\\
K_2(-x) = -\frac{3}{x^2}\cdot e^{-ix}\cdot\left(\left(1-\frac{1}{3}x^2\right)+i.x\right),\\
K_3(-x) = +\frac{15.i}{x^3}\cdot e^{-ix}\cdot\left(\left(1-\frac{2}{5}x^2\right)+i.x.\left(1-\frac{1}{15}x^2\right)\right),\\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
K_\nu(-x) = (-i)^\nu\frac{1.3..(2\nu-1)}{x^\nu}\cdot e^{-ix}\\
\quad\cdot\left\{\left(1+\sum_1^{\frac{\nu(-1)}{2}}{}_\sigma\frac{(\nu-\sigma)_\sigma(-1)^\sigma}{(2\nu-1)(2\nu-3)..(2\nu-2\sigma+1)}\cdot\frac{x^{2\sigma}}{1.3..(2\sigma-1)}\right)\right.\\
\quad\left.+ix.\left(1+\sum_1^{\frac{\nu(+1)}{2}-1}{}_\sigma\frac{(\nu-\sigma-1)_\sigma(-1)^\sigma}{(2\nu-1)(2\nu-3)..(2\nu-2\sigma+1)}\cdot\frac{x^{2\sigma}}{1.3..(2\sigma+1)}\right)\right\}.
\end{cases}
$$

$$
(28)\quad
\begin{cases}
K_1'(-x) = +\frac{i}{x^2}\cdot e^{-ix}\cdot\left((1-x^2)+ix\right),\\
K_2'(-x) = +\frac{6}{x^2}\cdot e^{-ix}\cdot\left(\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)+ix.\left(1-\frac{1}{6}x^2\right)\right),\\
K_3'(-x) = -\frac{45.i}{x^4}\cdot e^{-ix}\cdot\left(\left(1-\frac{7}{15}x^2+\frac{1}{45}x^4\right)+ix.\left(1-\frac{2}{15}\cdot x^2\right)\right),\\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
K_\nu'(-x) = -(-i)^\nu.\nu.\frac{1.3..(2\nu-1)}{x^{\nu+1}}\cdot e^{-ix}\\
\quad\cdot\left\{\left(1+\sum_1^{\frac{\nu(+1)}{2}}{}_\sigma(-1)^\sigma\frac{(\nu-\sigma)_\sigma+\frac{2\sigma-1}{\nu}\cdot(\nu-\sigma)_{\sigma-1}}{(2\nu-1)(2\nu-3)..(2\nu-2\sigma+1)}\cdot\frac{x^{2\sigma}}{1.3..(2\sigma-1)}\right)\right.\\
\quad\left.+i.x.\left(1+\sum_1^{\frac{\nu(-1)}{2}}{}_\sigma(-1)^\sigma\frac{(\nu-\sigma-1)_\sigma+\frac{2\sigma+1}{\nu}\cdot(\nu-\sigma-1)_{\sigma-1}}{(2\nu-1)(2\nu-3)\ldots(2\nu-2\sigma+1)}\cdot\frac{x^{2\sigma}}{1.3..(2\sigma+1)}\right)\right\}.
\end{cases}
$$

$$
(29)\quad
\begin{cases}
I_1(x) = \frac{x^2}{3}\cdot\left(1-\frac{3}{5}\cdot\frac{x^2}{3!}+\frac{3}{7}\cdot\frac{x^4}{5!}-\frac{3}{9}\cdot\frac{x^6}{7!}+\ldots\right),\\
I_2(x) = \frac{x^3}{15}\cdot\left(1-\frac{3}{7}\cdot\frac{x^2}{3!}+\frac{3.5}{7.9}\cdot\frac{x^4}{5!}-\frac{3.5}{9.11}\cdot\frac{x^6}{7!}+\ldots\right),\\
I_3(x) = \frac{x^4}{105}\cdot\left(1-\frac{3}{9}\cdot\frac{x^2}{3!}+\frac{3.5}{9.11}\cdot\frac{x^4}{5!}-\frac{3.5.7}{9.11.13}\cdot\frac{x^6}{7!}+\ldots\right),\\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
I_\nu(x) = \frac{x^{\nu+1}}{1.3..(2\nu+1)}\cdot\left(1-\frac{3}{2\nu+3}\cdot\frac{x^2}{3!}+\frac{3.5}{(2\nu+3)(2\nu+5)}\cdot\frac{x^4}{5!}\right.\\
\qquad\left.-\frac{3.5.7}{(2\nu+3)(2\nu+5)(2\nu+7)}\cdot\frac{x^6}{7!}+\ldots\right).
\end{cases}
$$

$$(30)\quad \begin{cases} I_1'(x) = \frac{2.x}{3}\cdot\left(1 - 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{x^2}{3!} + 3\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{x^4}{5!} - 4\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{x^6}{7!} + \ldots\right), \\ I_2'(x) = \frac{3.x^2}{15}\cdot\left(1 - \frac{5}{7}\cdot\frac{x^2}{3!} + \frac{5}{9}\cdot\frac{x^4}{5!} - \frac{5}{11}\cdot\frac{x^6}{7!} + \ldots\right), \\ I_3'(x) = \frac{4.x^3}{104}\cdot\left(1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{x^2}{3!} + \frac{4}{2}\cdot\frac{3.5}{9.11}\cdot\frac{x^4}{5!}\right. \\ \qquad\qquad \left. - \frac{5}{2}\cdot\frac{3.5.7}{9.11.13}\cdot\frac{x^6}{7!} + \ldots\right), \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_\nu'(x) = \frac{(\nu+1).x^\nu}{1.3..(2\nu+1)}\cdot\left(1 - \frac{\nu+3}{\nu+1}\cdot\frac{3}{2\nu+3}\cdot\frac{x^2}{3!}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{\nu+5}{\nu+1}\cdot\frac{3.5}{(2\nu+1)(2\nu+5)}\cdot\frac{x^4}{5!} - \ldots\right). \end{cases}$$

Diese Reihen sind für Zahlenrechnungen meistens weit bequemer als die endlichen Ausdrücke, die man nach (24) für I_ν und I_ν' bekommt. Für andere Zwecke muß man aber auch diese kennen:

$$(29a)\quad \begin{cases} I_1(x) = -\cos x + \frac{\sin x}{x}, \\ I_2(x) = -\sin x - \frac{3.\cos x}{x} + \frac{3.\sin x}{x^2}, \\ I_3(x) = +\cos x - \frac{6.\sin x}{x} - \frac{15.\cos x}{x^2} + \frac{15.\sin x}{x^3}, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_\nu(x) = \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2}\right) + \sum_1^\nu{}_r \sin\left(x - \frac{(\nu-r)\pi}{2}\right) \\ \qquad\qquad \cdot\frac{(\nu+r)!}{(\nu-r)!\,r!}\cdot\frac{1}{2^r.x^r}. \end{cases}$$

$$(30a)\quad \begin{cases} I_1'(x) = +\sin x + \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}, \\ I_2'(x) = -\cos x + \frac{3.\sin x}{x} + \frac{6.\cos x}{x^2} - \frac{6.\sin x}{x^3}, \\ I_3'(x) = -\sin x - \frac{6.\cos x}{x} + \frac{21.\sin x}{x^2} + \frac{45.\cos x}{x^3} - \frac{45.\sin x}{x^4}, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_\nu'(x) = \cos\left(x - \frac{\nu.\pi}{2}\right) + \sum_1^{\nu+1}{}_r \cos\left(x - \frac{(\nu-r)\pi}{2}\right) \\ \qquad\qquad \cdot\frac{(\nu+r-1)!}{(\nu-r+1)!\,r!}\cdot\frac{\left(\nu(\nu+1)+r(r-1)\right)}{2^r.x^r}. \end{cases}$$

Die Kugelfunktionen.

7. Für das vorliegende Problem sind die gewöhnlichen Kugelfunktionen, die nur von einer Variablen abhängen (die zonalen Kugelfunktionen) nicht zu verwenden. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß Funktionen von den folgenden beiden Formen zur Lösung nötig sind:

$$P_\nu(\vartheta, \varphi) = \Pi_\nu(v) \cdot \cos\vartheta, \tag{31}$$

$$\mathfrak{P}_\nu(\vartheta, \varphi) = \Pi_\nu(v) \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi, \tag{32}$$

$$v = \sin\vartheta \cdot \sin\varphi. \tag{33}$$

Die Funktion Π_ν muß, wie man durch Substitution der Ausdrücke für P_ν und $\mathfrak{P}_\nu$ in (11) erkennt, folgender Differentialgleichung gehorchen:

$$\frac{d^2}{dv^2}\left((1-v^2)\cdot\Pi_\nu\right) + \nu\cdot(\nu+1)\cdot\Pi_\nu = 0. \tag{34}$$

Die geometrische Bedeutung der drei in (31), (32), (33) vorkommenden Winkelfunktionen:

$$\cos\vartheta, \quad \sin\vartheta\cdot\sin\varphi, \quad \sin\vartheta\cdot\cos\varphi$$

ist wohl ohne weiteres klar. Nennen wir die Winkel, die der Radiusvektor des betrachteten Punktes mit den Achsen 1, 2, 3 bildet (vgl. 2.), $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, so ist, wie man aus Fig. 2 sofort sehen kann:

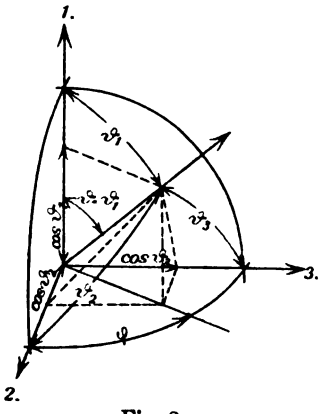


Fig. 2.
Trigonometrische Beziehungen.

$$\begin{cases} \cos\vartheta_1 = \cos\vartheta, \\ \cos\vartheta_2 = \sin\vartheta\cdot\cos\varphi, \\ \cos\vartheta_3 = \sin\vartheta\cdot\sin\varphi = v. \end{cases} \tag{35}$$

Wir wollen jetzt noch die wichtigsten Formeln für die Funktionen Π_ν zusammenstellen. Bekanntlich ist eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung der Kugelfunktionen rational und ganz in den trigonometrischen Funktionen der Winkelkoordinaten ϑ, φ. Nur diese Lösung interessiert uns. Haben wir sie für eine Ordnungszahl (z. B. $\nu = 1$) gefunden, so können wir sie für alle anderen Ordnungszahlen mit Hilfe der folgenden Rekursionsformel berechnen:

$$\frac{d\,\Pi_{\nu+1}}{dv} = v\cdot\frac{d\,\Pi_\nu}{dv} + (\nu+2)\cdot\Pi_\nu. \tag{36}$$

Diese Formel kann man durch Einsetzen in (34) ohne weiteres verifizieren. Eine Lösung von (34) für den Fall $\nu = 1$ ist nun:

$$\Pi_1(v) = 1 . \tag{37}$$

Daraus ergibt sich durch Anwendung von (36):

$$\left\{\begin{array}{l} \Pi_0(v) = 0 , \quad \Pi_1(v) = 1 , \\ \Pi_2 = 3v , \\ \Pi_3 = \frac{15}{2} \cdot v^2 - \frac{3}{2} , \\ \Pi_4 = \frac{35}{2} v^3 - \frac{15}{2} v , \\ \Pi_\nu = \frac{1}{2^\nu} \cdot \sum_0^{\frac{\nu(+1)}{2}-1} (-1)^s \cdot \frac{(2\nu - 2s)!}{(\nu - s)!\, s!} \cdot \frac{v^{\nu-2s-1}}{(\nu - 2s - 1)!} . \end{array}\right. \tag{38}$$

Eine andere Reihenentwickelung für Π_ν ist die folgende:

$$\Pi_\nu = \sum_0^{\frac{\nu(+1)}{2}-1} (-1)^s \cdot \frac{(\nu+1)!}{s!\,(s+1)!} \cdot \frac{v^{\nu-2s-1} \cdot (1 - v^2)^s}{(\nu - 2s - 1)!\, 2^{2s+1}} . \tag{39}$$

Für den speziellen Wert $v = 0$ ergibt (38):

$$\left\{\begin{array}{l} \Pi_\nu(0) = 0 , \quad \text{wenn } \nu \text{ eine gerade Zahl ist,} \\ \Pi_\nu(0) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \cdot \frac{(\nu+1)!}{2^\nu \left(\frac{\nu+1}{2}\right)! \left(\frac{\nu-1}{2}\right)!} , \quad \text{wenn } \nu \text{ ungerade ist,} \end{array}\right. \tag{40}$$

und für die erste Ableitung:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{d\Pi_\nu}{dv}\right)_{v=0} = (-1)^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot \frac{(\nu+1)!}{2^{\nu-1} \left(\frac{\nu}{2}\right)! \left(\frac{\nu}{2} - 1\right)!} , \quad \text{wenn } \nu \text{ gerade,} \\ \left(\frac{d\Pi_\nu}{dv}\right)_{v=0} = 0, \text{ wenn } \nu \text{ ungerade.} \end{array}\right. \tag{41}$$

Ähnlich kann man aus (39) die Werte der Funktion Π_ν und ihrer Ableitungen für $v = 1$ berechnen.

8. Gerade so, wie es bei den oben besprochenen Funktionen K_ν und I_ν war, gibt es auch für die Π_ν außer der Rekursionsformel (36) noch eine zweite Relation, die sich ähnlich wie (36) beweisen läßt:

$$\frac{d\Pi_{\nu-1}}{dv} = v \cdot \frac{d\Pi_\nu}{dv} - (\nu - 1) \cdot \Pi_\nu . \tag{42}$$

Aus (36) und (42) folgen die beiden oft sehr nützlichen Formeln:

$$(43)\quad \begin{cases} (2\nu+1).\,\Pi_\nu = \dfrac{d\,\Pi_{\nu+1}}{d\,v} - \dfrac{d\,\Pi_{\nu-1}}{d\,v}, \\ (2\nu+1).\,v.\,\Pi_\nu = \nu.\,\Pi_{\nu+1} + (\nu+1).\,\Pi_{\nu-1}. \end{cases}$$

9. Endlich seien auch noch die in den Formeln (13) und (14) vorkommenden Differentialquotienten von P_ν und $\mathfrak{P}_\nu$ hier notiert.

$$(44)\quad \begin{cases} P_\nu = \Pi_\nu.\cos\vartheta, \\ \dfrac{\partial P_\nu}{\partial\vartheta} = -\dfrac{d(v.\,\Pi_\nu)}{d\,v}.\sin\vartheta + \dfrac{d\,\Pi_\nu}{d\,v}.\sin\varphi, \\ \dfrac{1}{\sin\vartheta}.\dfrac{\partial P_\nu}{\partial\varphi} = \dfrac{d\,\Pi_\nu}{d\,v}.\cos\vartheta.\cos\varphi. \end{cases}$$

$$(45)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_\nu = \Pi_\nu.\sin\vartheta.\cos\varphi, \\ \dfrac{\partial\mathfrak{P}_\nu}{\partial\vartheta} = \dfrac{d(v.\,\Pi_\nu)}{d\,v}.\cos\vartheta.\cos\varphi. \\ \dfrac{1}{\sin\vartheta}.\dfrac{\partial\mathfrak{P}_\nu}{\partial\varphi} = -\dfrac{d(v.\,\Pi_\nu)}{d\,v}.\sin\varphi + \dfrac{d\,\Pi_\nu}{d\,v}.\sin\vartheta. \end{cases}$$

Speziell für die ersten beiden Ordnungszahlen haben wir:

$$P_1 = \cos\vartheta, \qquad P_2 = 3.\sin\vartheta.\cos\vartheta.\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial\vartheta} = -\sin\vartheta, \qquad \frac{\partial P_2}{\partial\vartheta} = 3.\cos 2\vartheta.\sin\varphi,$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}.\frac{\partial P_1}{\partial\varphi} = 0, \qquad \frac{1}{\sin\vartheta}.\frac{\partial P_2}{\partial\varphi} = 3.\cos\vartheta.\cos\varphi,$$

$$\mathfrak{P}_1 = \sin\vartheta.\cos\varphi, \qquad \mathfrak{P}_2 = 3.\sin^2\vartheta.\sin\varphi.\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial\mathfrak{P}_1}{\partial\vartheta} = \cos\vartheta.\cos\varphi, \qquad \frac{\partial\mathfrak{P}_2}{\partial\vartheta} = 3.\sin 2\vartheta.\sin\varphi.\cos\varphi,$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}.\frac{\partial\mathfrak{P}_1}{\partial\varphi} = -\sin\varphi, \qquad \frac{1}{\sin\vartheta}.\frac{\partial\mathfrak{P}_2}{\partial\varphi} = 3.\sin\vartheta.\cos 2\varphi.$$

Integralwerte der Kugelfunktionen.

10. Im folgenden wird die Aufgabe gelöst werden müssen, die gesamte Strahlung, die von der Kugel reflektiert wird, zu berechnen. Wir werden sehen, daß diese Aufgabe darauf hinauskommt, die Oberflächenintegrale

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} P_\nu.P_\mu.\sin\vartheta.d\vartheta.d\varphi \quad \text{und} \quad \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \mathfrak{P}_\nu.\mathfrak{P}_\mu.\sin\vartheta.d\vartheta.d\varphi$$

zu finden. Man kann diese Integrale sehr leicht beispiels-

weise nach einer in Maxwells Treatise on Electricity[1]) angegebenen Methode ausrechnen. Es ergibt sich:

$$(46)\begin{cases}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_\nu \,.\, P_\mu \,.\sin\vartheta\,.\,d\vartheta\,.\,d\varphi = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{P}_\nu \,.\, \mathfrak{P}_\mu \,.\sin\vartheta\,.\,d\vartheta\,.\,d\varphi = 0\,,\\ \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_\nu^2 \,.\sin\vartheta\,.\,d\vartheta\,.\,d\varphi = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{P}_\nu^2 \,.\sin\vartheta\,.\,d\vartheta\,.\,d\varphi = 2\pi\cdot\frac{\nu\,.\,(\nu+1)}{2\nu+1}\,.\end{cases}$$

Ebene Welle.

11. Das vorliegende Problem ist als gelöst zu betrachten, sobald es gelingt, die ebene Welle, die auf die Kugel auftrifft, in Ausdrücke von der Form (13) und (14) zu zerlegen.

Als Fortschreitungsrichtung der ebenen Welle wollen wir die Achse 3, und zwar im negativen Sinne wählen. Das Licht sei geradlinig polarisiert, und zwar sei Achse 1 die Richtung der elektrischen Schwingung, also Achse 2 die der magnetischen.

Nennen wir die Koordinate eines Punktes in der Richtung der Achse 3 vorübergehend wieder z, so ist nach (35):

$$z = r\,.\cos\vartheta_3 = r\,.\,v\,.$$

Die ebene Welle wird also durch folgende Größen repräsentiert:

$$\mathfrak{E}_1 = e^{2\pi i n t + \frac{2\pi i z}{\lambda'}}\,,\quad \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_3 = 0\,,$$

$$\mathfrak{H}_1 = 0\,,\quad \mathfrak{H}_2 = -\sqrt{\frac{k}{\mu}}\cdot e^{2\pi i n t + \frac{2\pi i z}{\lambda'}}\,,\quad \mathfrak{H}_3 = 0\,.$$

Hier sind k und μ Dielektrizität und Permeabilität in dem in (1) gebrauchten Sinn, das Leitvermögen des von dem Strahl durchlaufenen Mediums (des Wassers) haben wir als Null angenommen, λ' ist die Wellenlänge in dem Medium (Wasser). Setzt man nun (vgl. (5))

$$\frac{2\pi i z}{\lambda'} = \frac{2\pi i\,.\,r\,.\,v}{\lambda'} = i\,.\,x\,.\,v\,,$$

so kann man ohne weiteres die Größen $E_r, \ldots$ und $M_r, \ldots$, die früher (Formel (2) und (4)) eingeführt wurden, hinschreiben:

$$(47)\quad \begin{cases} E_r = e^{i\,.\,x\,.\,v}\,.\cos\vartheta\,, & M_r = i\,.\,e^{i\,.\,x\,.\,v}\,.\sin\vartheta\,.\cos\varphi\,,\\ E_\vartheta = -\,e^{i\,.\,v\,.\,x}\,.\sin\vartheta\,, & M_\vartheta = i\,.\,e^{i\,.\,x\,.\,v}\,.\cos\vartheta\,.\cos\varphi\,,\\ E_\varphi = 0\,, & M_\varphi = -\,i\,.\,e^{i\,.\,x\,.\,v}\,.\sin\varphi\,.\end{cases}$$

1) Bd. I p. 200 der deutschen Übersetzung.

Nun kann man aber die hier vorkommende Exponentialfunktion leicht nach I- und Π-Funktionen entwickeln. Es ist nämlich:

$$e^{i x v} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (2\nu+1) \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_\nu(x)}{x^2} \cdot \Pi_\nu(v). \tag{48}$$

Man kann die Richtigkeit dieser Formel am leichtesten durch Differenzieren nach x und nach v beweisen. Es ist nämlich, wenn wir die Reihe zunächst einmal $f(x, v)$ nennen, nach (26) und (43):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2} \cdot \left\{ \sum_1^\infty \nu \, i^{\nu-1} \cdot (2\nu+1) \cdot \left(\frac{d I_\nu}{d x} - 2 \cdot \frac{I_\nu}{x} \right) \cdot \Pi_\nu(v) \right\},$$

$$= \frac{i}{x^2} \cdot \sum_1^\infty \nu \left((\nu-1) \cdot i^{\nu-2} \cdot I_{\nu-1} + (\nu+2) \cdot i^\nu \cdot I_{\nu+1} \right) \cdot \Pi_\nu(v),$$

$$= i \cdot \sum_1^\infty \nu \, i^{\nu-1} \cdot \frac{I_\nu}{x^2} \cdot \left(\nu \cdot \Pi_{\nu+1} + (\nu+1) \cdot \Pi_{\nu-1} \right),$$

$$= i \cdot v \cdot \sum_1^\infty \nu (2\nu+1) \, i^{\nu-1} \cdot \frac{I_\nu}{x^2} \cdot \Pi_\nu(v),$$

$$= i \cdot v \cdot f(x, v).$$

Ebenso kann man zeigen, daß:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = i \cdot x \cdot f(x, v).$$

Endlich ist:

$$\left(f(x, v)\right)_{x=0} = 1.$$

Also

$$f(x, v) = e^{i x v}.$$

Demnach haben wir für E_r und M_r die gesuchte Reihenentwickelung:

$$E_r = \sum_1^\infty \nu (2\nu+1) \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_\nu}{x^2} \cdot P_\nu,$$

$$M_r = \sum_1^\infty \nu (2\nu+1) \cdot i^\nu \cdot \frac{I_\nu}{x^2} \cdot \mathfrak{P}_\nu,$$

wo P_ν und $\mathfrak{P}_\nu$ die in (31) und (32) definierten Funktionen sind.

Man kann nun von dem gefundenen Wert E_r ausgehend, mit Hilfe der Formeln (13) eine Lösung der Gruppe I bilden, ferner von M_r ausgehend unter Benutzung von (14) eine Lösung der Gruppe II, die Summe dieser beiden Lösungen muß dann dasjenige Integral der Maxwellschen Gleichungen sein, das die ebene Welle wiedergibt. Man kann sich leicht durch direkte Rechnung überzeugen, daß die so erhaltenen Reihenentwickelungen in der Tat identisch sind mit den Ausdrücken (47).

Man kann nämlich aus den Relationen (26) und (43), wenn man dazu noch die Differentialgleichung (10)

$$\frac{1}{\nu\,.\,(\nu+1)}\cdot\left(\frac{d^2 I_\nu}{d x^2}+I_\nu\right)=\frac{I_\nu}{x^2}$$

beachtet, die folgenden beiden Gleichungen ableiten:

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_1^\infty \frac{2\nu+1}{\nu\,.\,(\nu+1)}\left(i^{\nu-1}\,.\,I_\nu\,.\,\frac{d(v\,\Pi_\nu)}{d v}+i^\nu\,.\,\frac{d I_\nu}{d x}\,.\,\frac{d\,\Pi_\nu}{d v}\right)=0,\\
&\sum_1^\infty \frac{2\nu+1}{\nu\,.\,(\nu+1)}\cdot\left(i^{\nu-1}\,.\,I_\nu\,.\,\frac{d\,\Pi_\nu}{d v}+i^\nu\,.\,\frac{d I_\nu}{d x}\,.\,\frac{d(v\,.\,\Pi_\nu)}{d v}\right)\\
&\qquad=\sum_1^\infty(2\nu+1)\,.\,i^{\nu-1}\,.\,\frac{I_\nu}{x^2}\,.\,\frac{d\,\Pi_\nu}{d v},\\
&\qquad=\sum_1^\infty(2\nu+1)\,.\,i^\nu\,.\,\frac{I_\nu}{x}\,.\,\Pi_\nu,\\
&\qquad=i\,.\,x\,.\,e^{ixv}.
\end{aligned}\right.\tag{49}$$

Bildet man nun nach Vorschrift der Formeln (13) und (14) z. B.:

$$E_\vartheta=\sum_1^\infty\frac{2\nu+1}{\nu\,.\,(\nu+1)}\,.\,i^{\nu-1}\,.\,\frac{I_\nu'}{x}\,.\,\frac{\partial P_\nu}{\partial\vartheta}+\sum_1^\infty\frac{2\nu+1}{\nu\,.\,(\nu+1)}\,.\,i^\nu\,.\,\frac{I_\nu}{x\,.\,\sin\vartheta}\,.\,\frac{\partial\mathfrak{P}_\nu}{\partial\varphi},$$

so ergibt sich mit Benutzung der Formeln (44), (45) und (49):

$$E_\vartheta=-\,e^{ixv}\,.\,\sin\vartheta\,.$$

Ebenso wird:

$$E_\varphi = \sum_1^\infty \frac{2\nu+1}{\nu.(\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_\nu}{x.\sin\vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} - \sum_1^\infty \frac{2\nu+1}{\nu.(\nu+1)} \cdot i^\nu \cdot \frac{I_\nu}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta} = 0.$$

Ähnlich M_ϑ und M_φ. Man kann also für die ebene Welle, anstatt der Ausdrücke (47) auch die folgenden brauchen:

$$(50)\quad \begin{cases} E_r = \sum_1^\infty (2\nu+1) \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_\nu}{x^2} \cdot P_\nu, \\ E_\vartheta = \sum_1^\infty \frac{2\nu+1}{\nu.(\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_\nu'}{x} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \sum_1^\infty \frac{2\nu+1}{\nu.(\nu+1)} \cdot i^\nu \cdot \frac{I_\nu}{x.\sin\vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi}, \\ E_\varphi = \sum_1^\infty \frac{2\nu+1}{\nu.(\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_\nu'}{x.\sin\vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} - \sum_1^\infty \frac{2\nu+1}{\nu.(\nu+1)} \cdot i^\nu \cdot \frac{I_\nu}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta}, \\ M_r = \sum_1^\infty (2\nu+1) \cdot i^\nu \cdot \frac{I_\nu}{x^2} \cdot P_\nu, \\ M_\vartheta = \sum_1^\infty \frac{2\nu+1}{\nu.(\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_\nu}{x.\sin\vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} + \sum_1^\infty \frac{2\nu+1}{\nu.(\nu+1)} \cdot i^\nu \cdot \frac{I_\nu'}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta}, \\ M_\varphi = -\sum_1^\infty \frac{2\nu+1}{\nu.(\nu+1)} \cdot i^{\nu-1} \cdot \frac{I_\nu}{x} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \sum_1^\infty \frac{2\nu+1}{\nu.(\nu+1)} \cdot i^\nu \cdot \frac{I_\nu'}{x.\sin\vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Gebrochene und reflektierte Welle.

12. Wenn wir nun dazu übergehen, auch die Welle im Innern der Kugel und die von ihr nach außen ausstrahlende Welle durch Ausdrücke von der Form (13) und (14) wiederzugeben, so müssen wir dabei beachten: Erstens, daß im Innern der Kugel nur das mit I_ν bezeichnete Integral der Gleichung (10) zu verwenden ist, weil alle anderen partikulären Integrale für $x = 0$, d. h. im Zentrum der Kugel, unendlich werden müßten; zweitens, daß im Außenraum $K_\nu(-x)$ zu verwenden ist, weil nur dieses den Faktor

$$e^{-ix} = e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda'}}$$

hat, so daß die Komponenten der elektrischen und magnetischen Kräfte, die Zeit lediglich in der Kombination:

$$e^{2\pi i\left(nt-\frac{r}{\lambda'}\right)}$$

enthalten, was das Charakteristikum einer von der Kugel ausgehenden Strahlung ist.

Die Strahlung im Innern der Kugel läßt sich also folgendermaßen darstellen:

$$(51)\quad \begin{cases} E_{ri} = \sum_1^\infty \nu \cdot i \cdot b_\nu \cdot \frac{I_\nu}{x^2} \cdot P_\nu, \\ E_{\vartheta i} = \sum_1^\infty \nu \left(\frac{b_\nu\, i}{\nu.(\nu+1)} \cdot \frac{I_\nu'}{x} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \frac{q_\nu}{\nu.(\nu+1)} \cdot \frac{I_\nu}{x.\sin\vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi} \right), \\ E_{\varphi i} = \sum_1^\infty \nu \left(-\frac{b_\nu . i}{\nu.(\nu+1)} \cdot \frac{I_\nu'}{x.\sin\vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} - \frac{q_\nu}{\nu.(\nu+1)} \cdot \frac{I_\nu}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta} \right), \\ M_{ri} = \sum_1^\infty \nu\, q_\nu \cdot \frac{I_\nu}{x^2} \cdot \mathfrak{P}_\nu, \\ M_{\vartheta i} = \sum_1^\infty \nu \left(\frac{b_\nu . i}{\nu.(\nu+1)} \cdot \frac{I_\nu}{x.\sin\varphi} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \frac{q_\nu}{\nu.(\nu+1)} \cdot \frac{I_\nu'}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta} \right), \\ M_{\varphi i} = \sum_1^\infty \nu \left(-\frac{b_\nu . i}{\nu.(\nu+1)} \cdot \frac{I_\nu}{x} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \frac{q_\nu}{\nu.(\nu+1)} \cdot \frac{I_\nu'}{x.\sin\vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi} \right). \end{cases}$$

Die Koeffizienten b_ν und q_ν, deren einem der Faktor i zugefügt ist, nur, damit die späteren Formeln etwas eleganter werden, sind nebst den in den folgenden Ausdrücken (52) vorkommenden a_ν und p_ν aus den Grenzbedingungen (7) zu ermitteln.

Im Außenraum kommt zu der ebenen Welle (50), die auf die Welle auftrifft, noch die reflektierte Strahlung:

$$
(52)\quad \left\{\begin{aligned}
E_{ra} &= \sum_1^\infty {}_\nu\, a_\nu\, i \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x^2} \cdot P_\nu\,,\\
E_{\vartheta a} &= \sum_1^\infty {}_\nu \left(\frac{a_\nu \cdot i}{\nu.(\nu+1)} \cdot \frac{K_\nu'(-x)}{x} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \frac{p_\nu}{\nu.(\nu+1)} \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x.\sin\vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi} \right),\\
E_{\varphi a} &= \sum_1^\infty {}_\nu \left(\frac{a_\nu \cdot i}{\nu.(\nu+1)} \cdot \frac{K_\nu'(-x)}{x.\sin\vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} - \frac{p_\nu}{\nu.(\nu+1)} \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta} \right),\\
M_{ra} &= \sum_1^\infty {}_\nu\, p_\nu \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x^2} \cdot \mathfrak{P}_\nu\,,\\
M_{\vartheta a} &= \sum_1^\infty {}_\nu \left(\frac{a_\nu \cdot i}{\nu.(\nu+1)} \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x.\sin\vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} + \frac{p_\nu}{\nu.(\nu+1)} \cdot \frac{K_\nu'(-x)}{x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta} \right),\\
M_{\varphi a} &= \sum_1^\infty {}_\nu \left(-\frac{a_\nu \cdot i}{\nu.(\nu+1)} \cdot \frac{K_\nu(-x)}{x} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \frac{p_\nu}{\nu.(\nu+1)} \cdot \frac{K_\nu'(-x)}{x.\sin\vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi} \right).
\end{aligned}\right.
$$

Ermittelung der Koeffizienten.

13. Den Radius der kleinen Kugel haben wir mit ϱ bezeichnet, den Brechungsexponenten des Mediums (Wassers) mit m_0, den komplexen Brechungsexponenten des Materials der Kugel mit m. Weiter wollen wir die Größen x_a und x_i für den speziellen Wert $r = \varrho$ mit α und β bezeichnen, ferner den relativen Brechungsexponenten m/m_0 mit m'

$$
(53)\quad \left\{\begin{aligned}
\alpha &= \frac{2\pi \cdot m_0 \cdot \varrho}{\lambda} = \frac{2\pi\varrho}{\lambda'}\,,\\
\beta &= \frac{2\pi \cdot m \cdot \varrho}{\lambda} = \frac{m}{m_0} \cdot \alpha = m' \cdot \alpha\,.
\end{aligned}\right.
$$

Endlich wollen wir noch die Abkürzungen brauchen:

$$
(54)\quad \left\{\begin{aligned}
I_\nu(\alpha) &= A_\nu \qquad I_\nu'(\alpha) = A_\nu',\\
I_\nu(\beta) &= B_\nu \qquad I_\nu'(\beta) = B_\nu',\\
K_\nu(-\alpha) &= C_\nu \qquad K_\nu'(-\alpha) = C_\nu'.
\end{aligned}\right.
$$

Wir setzen nun in die Grenzbedingungen:

$$
\begin{aligned}
(E_\vartheta + E_{\vartheta a})_{r=\varrho} &= (E_{\vartheta i})_{r=\varrho}\,,\\
(E_\varphi + E_{\varphi a})_{r=\varrho} &= (E_{\varphi i})_{r=\varrho}\,,\\
\alpha \cdot (M_\vartheta + M_{\vartheta a})_{r=\varrho} &= \beta \cdot (M_{\vartheta i})_{r=\varrho}\,,\\
\alpha \cdot (M_\varphi + M_{\varphi a})_{r=\varrho} &= \beta \cdot (M_{\varphi i})_{r=\varrho}\,,
\end{aligned}
$$

die Ausdrücke (50), (52), (51) ein und erhalten, da zwei Paare dieser Gleichungen sich als identisch erweisen, für a_ν, b_ν, p_ν, q_ν die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned}
-(2\nu+1)\cdot i^\nu\cdot\frac{A_\nu'}{\alpha}+a_\nu\cdot\frac{C_\nu'}{\alpha}&=b_\nu\cdot\frac{B_\nu'}{\beta},\\
-(2\nu+1)\cdot i^\nu\cdot A_\nu+a_\nu\cdot C_\nu&=b_\nu\cdot B_\nu,\\
(2\nu+1)\cdot i^\nu\cdot\frac{A_\nu}{\alpha}+p_\nu\cdot\frac{C_\nu}{\alpha}&=q_\nu\cdot\frac{B_\nu}{\beta},\\
(2\nu+1)\cdot i^\nu\cdot A_\nu'+p_\nu\cdot C_\nu'&=q_\nu\cdot B_\nu'.
\end{aligned}$$

Daraus berechnen sich:

$$(55)\qquad \begin{cases} a_\nu=+(2\nu+1)\cdot i^\nu\cdot\dfrac{A_\nu'\cdot B_\nu\cdot\beta-B_\nu'\cdot A_\nu\cdot\alpha}{C_\nu'\cdot B_\nu\cdot\beta-B_\nu'\cdot C_\nu\cdot\alpha},\\ p_\nu=-(2\nu+1)\cdot i^\nu\cdot\dfrac{A_\nu\cdot B_\nu'\cdot\beta-B_\nu\cdot A_\nu'\cdot\alpha}{C_\nu\cdot B_\nu'\cdot\beta-B_\nu\cdot C_\nu'\cdot\alpha}. \end{cases}$$

Formeln zum praktischen Rechnen.

14. So einfach die Formeln (55) auf den ersten Anblick auch erscheinen, so schwierig ist es, sie zu diskutieren. Besonders erschwerend ist in dem Falle metallischer Kügelchen, daß β und damit zugleich B_ν, B_ν' komplexe Größen sind. Aber auch im Falle nicht absorbierender Kügelchen, wo β reell ist, bleiben noch zwei unter allen Umständen komplexe Größen, nämlich C_ν und C_ν' in den Ausdrücken stehen.

Für nicht sehr große Kügelchen wird man stets am bequemsten mit den Formeln (27), (28), (29), (30) rechnen. Danach können wir setzen:

$$(56)\qquad \begin{cases} A_\nu=\dfrac{\alpha^{\nu+1}}{1\cdot3\,..\,(2\nu+1)}\cdot f_\nu,\\ B_\nu=\dfrac{\beta^{\nu+1}}{1\cdot3\,..\,(2\nu+1)}\cdot g_\nu,\\ C_\nu=(-i)^\nu\dfrac{1\cdot3\,..\,(2\nu-1)}{\alpha^\nu}\cdot e^{-i\alpha}\cdot(h_\nu+i\alpha\cdot k_\nu);\\ A_\nu'=\dfrac{(\nu+1)\cdot\alpha^\nu}{1\cdot3\,..\,(2\nu+1)}\cdot f_\nu',\\ B_\nu'=\dfrac{(\nu+1)\cdot\beta^\nu}{1\cdot3\,..\,(2\nu+1)}\cdot g_\nu',\\ C_\nu'=-\nu\cdot(-i)^\nu\dfrac{1\cdot3\,..\,(2\nu-1)}{\alpha^{\nu+1}}\cdot e^{-i\alpha}\cdot(h_\nu'+i\alpha\cdot k_\nu'). \end{cases}$$

Die Faktoren f_ν, f_ν' sind rasch konvergierende Potenzreihen in α^2; g_ν, g_ν' dieselben Reihen in β^2; h_ν, k_ν, h_ν', k_ν' sind endliche Potenzsummen in α^2, also alles Ausdrücke, die verhältnismäßig leicht zu berechnen sind. Man kann sie direkt aus den Formeln (27) bis (30) entnehmen. Alle diese Summen f_ν, f_ν' usw. fangen mit dem Glied 1 an, für Kügelchen, deren Durchmesser gegen die Wellenlänge des Lichtes innen und außen klein ist, nähern sie sich also alle sehr dem Wert 1, und man bekommt für A_ν, A_ν' usw. sehr einfache Ausdrücke. Setzt man (56) in (55) ein und schreibt zur Abkürzung:

$$(57)\quad u_\nu = e^{i\alpha}\frac{f_\nu'}{h_\nu' + i\alpha \cdot k_\nu'}, \quad v_\nu = \frac{f_\nu}{f_\nu'}\cdot\frac{g_\nu'}{g_\nu}, \quad w_\nu = \frac{h_\nu + i\alpha \cdot k_\nu}{h_\nu' + i\alpha \cdot k_\nu'}\cdot\frac{g_\nu'}{g'},$$

$$(58)\quad \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{m^2}{m_0^2} = m'^2,$$

so ergeben sich folgende praktische Formeln:

$$(59)\quad \begin{cases} a_\nu = (-1)^{\nu-1}\cdot\dfrac{\nu+1}{\nu}\cdot\dfrac{\alpha^{2\nu+1}}{1^2\cdot 3^2\ldots(2\nu-1)^2}\cdot u_\nu \cdot \dfrac{m'^2 - v_\nu}{m'^2 + \dfrac{\nu+1}{\nu}\cdot w_\nu}, \\ p_\nu = (-1)^\nu \quad \cdot\dfrac{\nu+1}{\nu}\cdot\dfrac{\alpha^{2\nu+1}}{1^2\cdot 3^2\ldots(2\nu-1)^2}\cdot u_\nu \cdot \dfrac{1 - v_\nu}{1 + \dfrac{\nu+1}{\nu}\cdot w_\nu}. \end{cases}$$

15. Es ist nicht schwierig, ungefähr zu beurteilen, wie a_ν sich mit wachsender Teilchengröße ändert. Für kleine α werden die f_ν, g_ν usw. alle ziemlich genau gleich 1 und folglich kann man die Näherungsgleichung benutzen:

$$(60)\quad \begin{cases} a_\nu \sim \alpha^{2\nu+1}\cdot\dfrac{\nu+1}{\nu}\cdot\dfrac{C_\nu}{1^2\cdot 3^2\ldots(2\nu-1)^2}, \\ C_\nu = \dfrac{m'^2 - 1}{m'^2 + \dfrac{\nu+1}{\nu}}\cdot(-1)^{\nu-1}. \end{cases}$$

Hier ist C_ν eine komplexe Zahl, deren absoluter Betrag nicht allzu weit von 1 abliegt.[1]) Während a_ν, wie (60) zeigt, zunächst mit der $(2\nu+1)^{\text{ten}}$ Potenz von α steigt, biegt bei größeren Werten von α die Kurve der a_ν-Werte ab und geht niemals über eine bestimmte Größe hinaus. Man sieht das, wenn man

1) Bei Goldkügelchen liegt beispielsweise der absolute Betrag von C_1 zwischen 0,9 und 2,5, je nach der Farbe des Lichtes.

aus (29a) und (19) die Werte für I_ν und K_ν für sehr große Argumente nimmt. Da α reell und $\beta = \beta' - i.\beta''$ komplex, so hat man:

$$K_\nu(-\alpha) \sim e^{-i\alpha}, \quad K_\nu'(-\alpha) \sim -i.e^{-i\alpha},$$

$$I_\nu(\alpha) \sim \sin\left(\alpha - \frac{\nu\pi}{2}\right), \quad I_\nu'(\alpha) \sim \cos\left(\alpha - \frac{\nu\pi}{2}\right),$$

$$I_\nu(\beta) \sim -\frac{i}{2}\cdot e^{\beta''}\cdot e^{i\cdot\left(\beta' - \frac{\nu\pi}{2}\right)}, \quad I_\nu'(\beta) \sim \frac{1}{2}\cdot e^{\beta''}\cdot e^{i\left(\beta' - \frac{\nu\pi}{2}\right)}.$$

Also, wenn man dies in (55) einsetzt, so bekommt man als Grenzwert für sehr große α:

$$(61)\quad \begin{cases} a_\nu \sim (2\nu+1).c_\nu, \\ c_\nu = \dfrac{i^\nu.e^{i\alpha}}{1+m'}\cdot\left(\sin\left(\alpha - \dfrac{\nu\pi}{2}\right) + i.m'.\cos\left(\alpha - \dfrac{\nu\pi}{2}\right)\right). \end{cases}$$

c_ν ist hier eine komplexe, periodisch mit α veränderliche Größe, deren absoluter Betrag immer in der Gegend von 1 bleibt.

Da in (60) die Potenz $\alpha^{2\nu+1}$ steht, außerdem aber der Nenner schnell mit ν zunimmt, so muß zuerst a_1 alle anderen Koeffizienten weit überragen. Wenn aber a_1 seinem Grenzwert (61) zustrebt, schließt sich ihm als zweites a_2 an, während alle folgenden noch klein bleiben. Später gesellt sich den beiden ersten auch a_3 zu und so fort. Aus den Formeln für f_ν, g_ν usw. ist ferner zu sehen, daß die Formel (60) für die später folgenden Koeffizienten immer länger annähernd gültig bleibt.

Aus dieser Betrachtung geht hervor, daß, wie groß auch α sein möge, doch immer von einem bestimmten ν an alle Koeffizienten so klein gegen die ersten bleiben, daß man sie ganz außer acht lassen darf.

Die von einer kleinen Kugel reflektierte Strahlung setzt sich im wesentlichen stets aus einer endlichen Zahl von Partialwellen zusammen, aber die Zahl der Partialwellen nimmt zu, wenn die Kugel größer wird.

Dieser Satz ist zunächst nur für die „elektrischen Schwingungen" des Teilchens bewiesen, denen die Koeffizienten a_ν entsprechen, er wird sich aber auch für die „magnetischen Schwingungen", die die auftreffende Welle erregt, d. h. die Koeffizienten p_ν bestätigt finden, die wir in 17. diskutieren werden.

In dem Zahlenbeispiel, das ich unten bringe, um der Erklärung der optischen Eigenschaften kolloidaler Metallösungen näher zu kommen, werde ich bis zu einem Wert des Durchmessers $2\varrho = 180\ \mu\mu$ gehen. Dieser Wert liegt schon an der Grenze der mikroskopischen Auflösbarkeit, entspricht also wohl der äußersten Größe der Teilchen kolloidaler Lösungen. *Auch bei dem großen Durchmesser* $2\varrho = 180\ \mu\mu$, *sind schon von* $\nu = 3$ *an alle höheren „elektrischen Partialschwingungen" gegen die beiden ersten ganz verschwindend klein, wir brauchen also nur* a_1 *und* a_2 *zu berechnen.*

Dagegen müßte man z. B. bei dem Regenbogenproblem, das man auch mit der hier angewendeten Methode in Angriff nehmen könnte, eine ziemlich große Zahl Partialwellen berücksichtigen und würde auf sehr große rechnerische Schwierigkeiten stoßen.

Die beiden ersten Koeffizienten sind:

$$(62)\qquad \begin{cases} a_1 = 2\,.\,\alpha^3\,.\,u_1\,.\,\dfrac{m'^2 - v_1}{m'^2 + 2\,w_1}\,, \\ a_2 = -\dfrac{1}{6}\,.\,\alpha^5\,.\,u_2\,.\,\dfrac{m'^2 - v_2}{m'^2 + \dfrac{3}{2}\,w_2}\,. \end{cases}$$

Wird α sehr klein, so kann man die u, v, w gleich 1 rechnen und bekommt:

$$(63)\qquad \begin{cases} a_1 = 2\,.\,\alpha^3\,\dfrac{m'^2 - 1}{m'^2 + 2}\,, \\ a_2 = -\dfrac{1}{6}\,\alpha^5\,\dfrac{m'^2 - 1}{m'^2 + \dfrac{3}{2}}\,. \end{cases}$$

Natürlich ist für kleine α auch schon a_2 gegen a_1 verschwindend klein, und es bleibt nur jene erste Partialwelle übrig, deren Existenz zuerst von Lord Rayleigh theoretisch bewiesen worden ist, die ich deswegen manchmal auch kurz *die Rayleighsche Strahlung* nennen werde.

16. Es sei auch noch der Spezialfall kurz erledigt, daß das Kügelchen aus einem vollkommen leitenden Material besteht. Bekanntlich ist dieser Fall zuerst von J. J. Thomson diskutiert und F. Ehrenhaft hat gemeint, die von Thomson entwickelte Theorie auf die Optik der kolloidalen Lösungen anwenden zu können. Obwohl dies aus den in Abschnitt **1.**

genannten Gründen nicht geht, hat der Fall doch ein gewisses historisches und allgemein theoretisches Interesse. Wir setzen:

$$m'^2 = -i \cdot \infty \quad \text{(vgl. (3))},$$

und vernachlässigen demgemäß in den Formeln (55) die Glieder mit dem Faktor α gegen die mit dem Faktor β. Es ergibt sich so:

$$a_\nu = (2\nu + 1) \cdot i^\nu \cdot \frac{A_\nu'}{C_\nu'}.$$

Für kleine α ist also:

$$a_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\nu+1}{\nu} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+1}}{1^2 \cdot 3^2 \ldots (2\nu-1)^2} \cdot e^{i\alpha} \cdot \frac{f_\nu'}{h_\nu' + i\alpha \cdot k_\nu'}.$$

Für große α ergeben (19) und (30a):

$$a_\nu = (2\nu + 1) \cdot i^{\nu+1} \cdot e^{i\alpha} \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\nu-1}{2}\pi\right).$$

Der absolute Betrag dieses Wertes schwankt regelmäßig periodisch zwischen 0 und $(2\nu + 1)$ hin und her.

Von besonderem Interesse ist auch hier die Rayleighsche Welle. Der genaue Wert von a_1 ist:

$$a_1 = 3 \cdot e^{i\alpha} \frac{\alpha \cdot \cos\alpha - (1 - \alpha^2) \cdot \sin\alpha}{i\alpha + (1 - \alpha^2)}. \tag{64}$$

Für unendlich kleine α ergibt sich:

$$a_1 = 2 \cdot \alpha^3. \tag{65}$$

Der charakteristische Unterschied dieser Formel gegen (63) ist, daß dort noch der Faktor $(m'^2 - 1)/(m'^2 + 2)$ hinzukommt, den man, wie wir noch sehen werden, bei Metallen auch nicht annähernd gleich 1 setzen darf, und der vor allen Dingen mit der Wellenlänge sehr stark variiert. Ein anderer sehr wichtiger Unterschied ist, daß in (65) a_1 eine rein reelle Größe ist, während das richtige aus (63) berechnete a_1 einen sehr beträchtlichen imaginären Teil hat. Dieser Teil bedingt, wie wir noch sehen werden, die Absorption in den kolloidalen Metallösungen.

17. Wir gehen nun über zur Diskussion der „magnetischen Schwingungen", d. h. der Koeffizienten p_ν. Für äußerst

kleine Teilchen ist Formel (59) nicht zu gebrauchen, da $(1 - v_\nu)$ sich dann der Null nähert. Nach (57), ferner (29) und (30) ist:

$$1 - v_\nu = \frac{1}{f_\nu' \cdot g_\nu} \cdot (f_\nu' \cdot g_\nu - f_\nu \cdot g_\nu'),$$

$$(66)\quad \left\{ \begin{aligned} 1 - v_\nu &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\nu+1)(2\nu+3)} \cdot \frac{1}{f_\nu' \cdot g_\nu} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\nu+5} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3}{(2\nu+5)(2\nu+7)} \cdot \frac{\alpha^4 + 2\,\frac{2\nu+5}{2\nu+3}\,\alpha^2\beta^2 + \beta^4}{4!} - \cdots + \cdots \right) \\ &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\nu+1)(2\nu+3)} \cdot \frac{l_\nu}{f_\nu' \cdot g_\nu}. \end{aligned} \right.$$

Hier bedeutet also l_ν ganz ähnlich wie die f_ν, f_ν' usw. eine schnell konvergierende Potenzreihe in α^2 und β^2, die für kleine Teilchendurchmesser gleich 1 wird. Wir setzen nun weiter:

$$(67)\qquad s_\nu = e^{i\alpha} \cdot \frac{l_\nu}{g_\nu} \cdot \frac{1}{h_\nu' + i\alpha k_\nu'} = u_\nu \cdot \frac{l_\nu}{f_\nu' \cdot g_\nu},$$

dann gibt die Formel (59) für p_ν:

$$(68)\qquad p_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu \cdot (2\nu+3)} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+3}}{1^2 \cdot 3^2 \cdots (2\nu-1)^2} s_\nu \frac{m'^2 - 1}{1 + \frac{\nu+1}{\nu} \cdot w_\nu}.$$

Für sehr kleine Durchmesser kann man annähernd setzen:

$$(69)\qquad p_\nu = \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)(2\nu+3)} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+3}}{1^2 \cdot 3^2 \cdots (2\nu-1)^2} \cdot (m'^2 - 1).$$

Für große Durchmesser liefert (55), wenn man die Größen A_ν, A_ν' usw. (54) nach (29a) und (19) berechnet:

$$(70)\qquad p_\nu \sim (2\nu+1) \cdot i^\nu \cdot e^{i\alpha} \cdot \frac{m' \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\nu\pi}{2}\right) + i \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\nu\pi}{2}\right)}{m'+1}.$$

Man kann also den Verlauf von p_ν ganz ebenso beschreiben, wie es in (15) mit den a_ν gemacht wurde.

Bei kleinen Teilchen wächst mit steigender Teilchengröße p_ν ungefähr wie:

$$(71)\quad \left\{ \begin{aligned} p_\nu &\sim \alpha^{2\nu+3} \cdot \frac{C_\nu'}{1^2 \cdot 3^2 \cdots (2\nu-1)^2 \cdot (2\nu+1)(2\nu+3)}, \\ C_\nu' &= (m'^2 - 1) \cdot (-1)^\nu. \end{aligned} \right.$$

Der absolute Betrag von C_ν' ist nicht sehr weit von 1 entfernt. Bei größeren Werten von α biegt die Kurve der p_ν-Werte ab und ändert sich schließlich bei sehr großen α mit weiter wachsendem Teilchendurchmesser periodisch:

$$p_\nu \sim (2\nu + 1) . c_\nu'. \tag{72}$$

c_ν' ist eine komplexe, periodisch sich ändernde Zahl, deren Amplitude nicht weit von 1 abliegt.

Für die magnetischen Partialschwingungen gelten dieselben Sätze, wie für die elektrischen und zwar läuft die ν-te magnetische Schwingung ungefähr parallel mit der $(\nu + 1)$ten elektrischen.

Durch Vergleichung der Formeln (69) und (70) mit (60) und (61) sieht man, daß der absolute Betrag von p_ν im allgemeinen etwas unter dem von $a_{\nu+1}$ liegt.

Die erste magnetische Partialschwingung ist z. B. für alle Teilchengrößen stets von derselben Größenordnung, wie die zweite elektrische.

Sehr kleine Teilchen strahlen seitlich stets nur die Rayleighsche Welle aus, bei den ganz groben Teilchen in kolloidaler Lösung kommt noch die zweite elektrische und die erste magnetische Partialschwingung hinzu.

Ich werde also in dem unten zu bringenden Zahlenbeispiel im ganzen nur drei Koeffizienten, nämlich: a_1, a_2, p_1 zu berücksichtigen haben. Und zwar werde ich p_1 für gröbere Teilchen nach der folgenden Formel berechnen:

$$p_1 = -\,2 . \alpha^3 . u_1 \frac{1 - v_1}{1 + 2w_1}, \tag{73}$$

wo u_1, v_1, w_1 ganz dieselben Größen sind, wie in (62). Für kleine Teilchen gilt die Näherungsformel:

$$p_1 = -\frac{\alpha^5}{15} \cdot (m^2 - 1). \tag{74}$$

18. Während die Annahme einer vollkommenen Leitfähigkeit bei den elektrischen Partialschwingungen zu Resultaten führte, die sich immerhin noch mit denen der exakten Theorie vergleichen ließen, liefert sie für die magnetischen Schwingungen völlig abweichende Resultate. Setzen wir in (55) β unendlich groß, so bekommen wir:

$$p_\nu = -\,(2\nu + 1) . i^\nu \cdot \frac{A_\nu}{C_\nu}.$$

Also für kleine Durchmesser nach (27) und (29):

$$p_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+1}}{1^2 \cdot 3^2 \ldots (2\nu-1)^2} e^{i\alpha} \cdot \frac{f_\nu}{h_\nu + i\alpha \cdot k_\nu},$$

ein Wert, der von ganz derselben Größenordnung ist, wie der unter der gleichen Annahme gefundene Wert von a_ν.

Nehmen wir an, daß die in dem Medium suspendierten Kügelchen vollkommene Leiter sind, so kommen wir dem verkehrten Resultat, daß die magnetische Partialschwingung ν-ter Ordnung parallel geht mit der elektrischen Partialschwingung derselben Ordnungszahl (statt der nächsthöheren Ordnungszahl). Speziell für sehr feine Teilchen kommen wir so zu dem falschen Resultat, daß neben der Rayleighschen Welle die erste magnetische Schwingung ungefähr in derselben Größenordnung auftritt.

J. J. Thomson, der zuerst den letzten Teil dieses Satzes bewies, zeigte bekanntlich schon, daß die Untersuchung der Polarisation des von kolloidalen Metallösungen seitlich zerstreuten Lichtes ergibt, daß das Resultat falsch ist. Die eigentümlichen Polarisationserscheinungen, die F. Ehrenhaft[1]) und E. Müller[2]) später beobachtet haben, deuten keineswegs auf eine teilweise Gültigkeit der Annahme einer vollkommenen Leitfähigkeit hin. Wir werden weiter unten sehen, daß die exakte Theorie sie ganz ungezwungen erklärt.

Wir wollen, wegen der später folgenden zahlenmäßigen Diskussion, noch den Wert von p_1 notieren:

$$p_1 = 3 \cdot e^{i\alpha} \frac{\sin\alpha - \alpha \cdot \cos\alpha}{1 + i\alpha}. \tag{75}$$

Für sehr kleine Werte von α wird:

$$p_1 = \alpha^3. \tag{76}$$

Vergleichen wir (76) mit (65), so sehen wir, daß die Amplitude der magnetischen Schwingung bei sehr kleinen, vollkommen leitenden Partikelchen gerade die Hälfte der elektrischen sein müßte.

Die Partialwellen.

19. Für das folgende wird es nützlich sein eine Vorstellung zu haben, wie Intensität und Schwingungsrichtung

1) F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys. 11. p. 489. 1903.
2) E. Müller, Ann. d. Phys. 24. p. 1. 1907.

der einzelnen Partialwellen (speziell der ersten) sich auf einer großen Kugel, in deren Zentrum das betrachtete Partikelchen liegt, von Punkt zu Punkt zu Punkt ändern.

Die Komponenten $\mathfrak{E}_r$ und $\mathfrak{H}_r$ brauchen wir nicht zu berücksichtigen, weil sie bei der Übertragung der Energie in den Außenraum nach dem Poyntingschen Satz gar nicht beteiligt sind. Es bleiben also nur die auf der Kugelfläche tangential verlaufenden Komponenten. Nun gilt aber nach (13) und (14) für jede Partialwelle:

$$E_\vartheta . M_\vartheta + E_\varphi . M_\varphi = 0,$$

d. h. die magnetischen Kraftlinien auf der Kugelfläche laufen überall senkrecht zu den elektrischen. Es genügt deshalb, um eine deutliche Vorstellung von der Strahlung zu bekommen, wenn man den Verlauf der elektrischen Kraftlinien auf der Kugelfläche angibt.

In den Figg. 3—10 sind die elektrischen Feldlinien auf einer das Teilchen umgebenden Kugelfläche für die vier

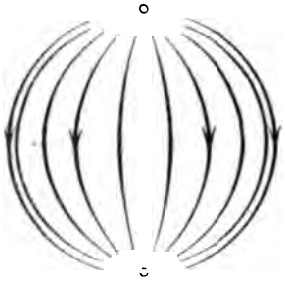


Fig. 3. Erste elektrische Partialschwingung.

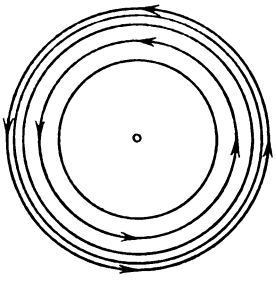


Fig. 4. Erste magnetische Partialschwingung.

ersten elektrischen und die vier ersten magnetischen Partialschwingungen gezeichnet. Als Ebene der Zeichnung ist die Ebene (1. 3.), d. h. die Schwingungsebene des Lichtstrahles gewählt, der die Wellen erregt. Es ist das eine Symmetrieebene des Vorganges, und man kann sich leicht zu der in den Figuren dargestellten vorderen Halbkugel die hinter der Zeichenebene liegende ergänzen, da die Kurven auf beiden ganz kongruent verlaufen. Bei den magnetischen Schwingungen ist $E_r = 0$, die Linien verlaufen also als geschlossene sphärische

Kurven, und zwar gibt es auf jeder der beiden Halbkugeln auf dem Äquator ($\vartheta = \pi/2$) ν Zentralpunkte, in denen die Kraft Null ist und um die sich die Feldlinien, in ν ver-

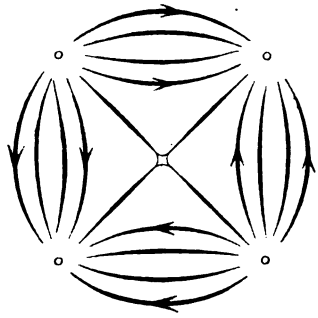


Fig. 5. Zweite elektrische Partialschwingung.

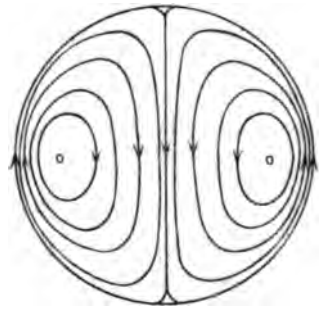


Fig. 6. Zweite magnetische Partialschwingung.

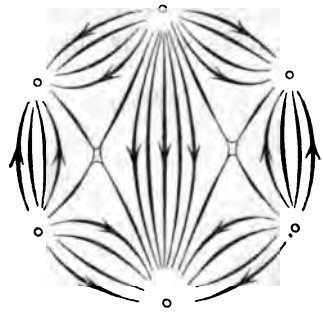


Fig. 7. Dritte elektrische Partialschwingung.

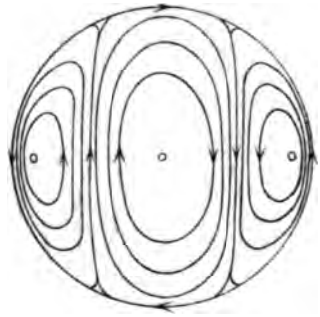


Fig. 8. Dritte magnetische Partialschwingung.

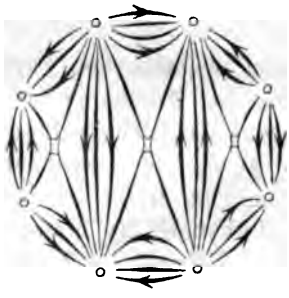


Fig. 9. Vierte elektrische Partialschwingung.

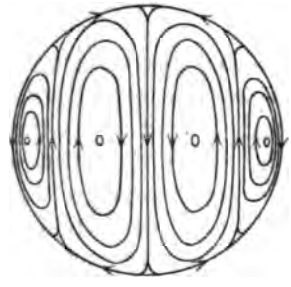


Fig. 10. Vierte magnetische Partialschwingung.

schiedenen Gruppen, herumschlingen. Bei den elektrischen Schwingungen verlaufen die Feldlinien dagegen in gewissen Kegelflächen, die alle durch ν in der Zeichenebene liegende Kegeldurchmesser gehen. Die gezeichneten Kurven sind die Schnittkurven dieser Kegelflächen auf der Kugel. Diese Kurven laufen alle nach den ν Polen aus, die durch die ν Durchmesser ausgestochen werden. In Wirklichkeit biegen sich die Feldlinien aus der Kugeloberfläche heraus, um sich, je nach der Phase der Schwingung entweder im Innenraum oder im Außenraum zu schließen, da sie natürlich nicht Anfang und Ende haben können (abgesehen von den Linien unmittelbar am strahlenden Partikelchen).

Man kann sich nun auch leicht ein Bild von den magnetischen Feldlinien machen. Die Abbildungen Gruppe I geben ohne weiteres die magnetischen Feldlinien der Gruppe II und umgekehrt, wenn man sie um 90° dreht, d. h. Achse 1 und 2 vertauscht.

Die diffuse seitliche Strahlung.

20. Beobachtet wird in einer unendlichen Entfernung vom Teilchen, wir haben also in (52) einzusetzen:

$$K_\nu(-x) = e^{-ix},$$

wie aus Formel (19) hervorgeht. Dann ist weiter:

$$K_\nu'(-x) = -i.e^{-ix},$$

also:

$$(77)\quad \begin{cases} E_{\vartheta a} = +i.M_{\varphi a} = -i.\dfrac{\lambda'}{2\pi}.\dfrac{e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda'}}}{r} \\ \qquad .\sum_1^\infty\left(\dfrac{a_\nu}{\nu.(\nu+1)}.\dfrac{\partial P_\nu}{\partial\vartheta}+\dfrac{p_\nu}{\nu.(\nu+1)}.\dfrac{1}{\sin\vartheta}.\dfrac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial\varphi}\right), \\ E_{\varphi a} = -i.M_{\vartheta a} = -i.\dfrac{\lambda'}{2\pi}.\dfrac{e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda'}}}{r} \\ \qquad .\sum_1^\infty\left(\dfrac{a_\nu}{\nu.(\nu+1)}.\dfrac{1}{\sin\vartheta}.\dfrac{\partial P_\nu}{\partial\varphi}-\dfrac{p_\nu}{\nu.(\nu+1)}.\dfrac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial\vartheta}\right). \end{cases}$$

Dabei ist angenommen, daß das durch die Lösung hindurchgehende Licht geradlinig polarisiert ist, und zwar so,

daß die elektrische Schwingungsrichtung die Achse 1 bildet. Nach (47) ist:

$$E_1 = -i \cdot M_1 = e^{\frac{2\pi i z}{\lambda}} .$$

Bezogen auf die Intensität des durchgehenden Lichtes als Einheit ist die Intensität des diffus zerstreuten Lichtes:

$$(78)\quad \begin{cases} J_\vartheta = \dfrac{\lambda'^2}{4\pi^2 \cdot r^2} \cdot \left| \sum_1^\infty \left(\dfrac{a_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \dfrac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} + \dfrac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \dfrac{1}{\sin\vartheta} \cdot \dfrac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi} \right) \right|^2 , \\ J_\varphi = \dfrac{\lambda'^2}{4\pi^2 \cdot r^2} \cdot \left| \sum_1^\infty \left(\dfrac{a_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \dfrac{1}{\sin\vartheta} \cdot \dfrac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} - \dfrac{p_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \dfrac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta} \right) \right|^2 . \end{cases}$$

In diesen Formeln soll durch die geraden Striche angedeutet werden, daß von der zwischen ihnen stehenden komplexen Größe der absolute Betrag zu nehmen ist. Man erkennt aus (78), was ja von vornherein klar ist, daß die Intensität umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung r ist. Die beiden Intensitäten J_ϑ und J_φ bedeuten die der zum Meridian (J_ϑ) und die der zum Breitenkreis (J_φ) parallel schwingenden Komponente. Beide Komponenten haben im allgemeinen einen ganz bestimmten Phasenunterschied, den man finden kann, wenn man in der bekannten Weise die Phasen der beiden komplexen Größen in Formel (77) berechnet. Sieht man also beliebig schief zum durchgehenden Strahl auf die Lösung, so muß man im allgemeinen elliptisch polarisiertes Licht bekommen, vorausgesetzt, daß der durchgehende Strahl geradlinig polarisiert ist und daß die suspendierten Partikelchen so groß sind, daß außer der (für sich allein geradlinig polarisierten) Rayleighschen Strahlung auch noch höhere Partialwellen bemerkbar sind.

Auszunehmen sind hiervon aber alle Richtungen, die in den beiden Symmetrieebenen 1. 3. und 2. 3. liegen. Aus den Figuren des Abschnittes **19.** kann man ohne weiteres ententnehmen:

Beleuchtet man die kolloidale Lösung mit geradlinig polarisiertem Licht und beobachtet in einer Richtung, die zu seiner elektrischen Schwingung senkrecht steht, so ist das seitlich zerstreute Licht geradlinig polarisiert, und zwar ist seine elektrische Schwin-

gungsrichtung parallel zu der des durch die Lösung gehenden Strahles. Dreht man bei unveränderter Visionsrichtung die Schwingungsrichtung des durchgehenden Strahles um 90°, so bekommt man wieder geradlinig polarisiertes Licht, aber seine Schwingungsrichtung ist ebenfalls um 90° gegen die frühere gedreht.

Der erste Fall wird in unseren Formeln charakterisiert durch $\vartheta = \pi/2$, der zweite durch $\varphi = \pm \pi/2$.

So einfach der eben ausgesprochene Satz auch erscheinen mag, so wichtig kann er trotzdem vielleicht werden. Die Beobachtungen, die Hr. Steubing (vgl. 1.) über die Polarisation des seitlich zerstreuten Lichtes angestellt hat, haben nämlich ergeben, daß, auch wenn man in der vorgeschriebenen Weise mit vollkommen geradlinig polarisiertem Licht beleuchtet, die seitliche Ausstrahlung immer noch einen allerdings sehr kleinen Betrag unpolarisierten Lichtes neben dem überwiegenden linear polarisierten enthält. Ich neige sehr dazu, hieraus zu schließen, *daß die in kolloidalen Lösungen suspendierten Partikelchen keine Kugeln sein können, selbst wenn auch die übrigen optischen Eigenschaften mit dieser Annahme in Einklang sein mögen.*

Der Fall, daß man mit unpolarisiertem Licht beleuchtet, läßt sich nunmehr schnell erledigen. Man kann sich das unpolarisierte Licht einfach in zwei inkohärente Strahlen von gleicher Intensität zerlegt denken, die geradlinig polarisiert sind, und zwar den einen so, daß seine elektrische Schwingungsrichtung senkrecht auf der durch die Richtung des Strahles und den Visionsradius bestimmten Ebene steht, den anderen so, daß seine elektrische Schwingung in diese Ebene fällt. Man bekommt dann im ausgestrahlten Licht ebenfalls zwei inkohärente, senkrecht zueinander linear polarisierte Komponenten, aber im allgemeinen von verschiedener Intensität. Das heißt also: das ausgestrahlte Licht ist teilweise linear polarisiert.

Geht durch die kolloidale Lösung ein unpolarisierter Lichtstrahl, so ist das seitlich zerstreute Licht stets teilweise linear polarisiert (niemals elliptisch). Und zwar ist die elektrische Schwingungsrichtung des polarisierten Anteils entweder senkrecht zu der durch Richtung des Strahles und Visionsradius bestimmten Ebene, oder sie fällt in diese Ebene, je nach der Größe der Teilchen und der Visionsrichtung.

Dieser Satz ist hier natürlich nur unter der Annahme kugelförmiger Teilchen bewiesen, aber es ist wohl nicht zweifelhaft, daß er in dem Fall amorpher (also nicht dichroitischer) kolloidaler Lösungen stets gilt.

Bei Lösungen mit sehr kleinen Teilchen wird bekanntlich nur die zuerst genannte Polarisationsrichtung beobachtet, bei groben Teilchen kann aber, wie wir noch sehen werden, auch die zweite vorkommen.

Intensität des senkrecht zum durchgehenden Strahl zerstreuten Lichtes.

21. Da man im allgemeinen mit unpolarisiertem Licht beobachtet, so haben nur die beiden Hauptfälle: I. $\vartheta = \pi/2$, II. $\varphi = \pm \pi/2$ für uns Interesse. In beiden Fällen ist $E_\varphi = M_\vartheta = 0$, es bleibt also nur J_ϑ, das wir in den zwei Fällen als J_I und J_II unterscheiden wollen. J_I ist die Intensität der Strahlung, deren Schwingungsrichtung senkrecht steht zur Visionsebene, wie wir kurz sagen wollen. J_II die Intensität des in der Visionsebene schwingenden Strahles. Zunächst ergeben (44) und (45) für die beiden Fälle:

$$(79)\quad \left\{\begin{array}{c} \text{I.}\quad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \sin\varphi = v, \\ \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} = -\,\Pi_\nu(v), \quad \frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta} = (1-v^2)\,.\,\Pi_\nu'(v) - v\,.\,\Pi_\nu)(v). \end{array}\right.$$

$$(80)\quad \left\{\begin{array}{c} \text{II.}\quad \varphi = \pm\,\frac{\pi}{2}, \quad \sin\vartheta = \pm\, v, \\ \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} = \pm\,\{(1-v^2)\,.\,\Pi_\nu'(v) - v\,\Pi_\nu(v)\}, \quad \frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi} = \mp\,\Pi_\nu(v). \end{array}\right.$$

Das ist in (78) einzusetzen. Wir wollen uns nun zuerst noch weiter beschränken auf den Fall, daß nur senkrecht zum Strahl beobachtet wird. Wir setzen also $v = 0$ und wenden nun die Formeln (40), (41) an. Es ergibt sich:

$$(81)\quad \left\{\begin{array}{l} J_\mathrm{I} = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2}\cdot\left(-\frac{a_1}{2} + \sum_1^\infty{}_\sigma\,(-1)^{\sigma+1}\cdot\frac{(2\sigma)_\sigma}{2^{2\sigma}}\cdot\left(\frac{a_{2\sigma+1}}{2(\sigma+1)} + p_{2\sigma}\right)\right)^2, \\ J_\mathrm{II} = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2}\cdot\left(\sum_1^\infty{}_\sigma\,(-1)^{\sigma+1}\cdot\frac{(2\sigma)_\sigma}{2^{2\sigma}}\cdot\left(a_{2\sigma} - \frac{p_{2\sigma-1}}{2\sigma-1}\right)\right)^2. \end{array}\right.$$

Diese Formeln sind so geschrieben, daß in jedem Summanden zwei Koeffizienten von gleicher Größenordnung

stehen (vgl. 17.). In dem Zahlenbeispiel kann ich mich, wie schon öfter erwähnt, auf die Koeffizienten a_1, a_2, p_1 beschränken. Ich werde also mit folgenden Formeln rechnen:

$$(82)\qquad \begin{cases} J_{\mathrm{I}} = \dfrac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \cdot \left| \dfrac{a_1}{2} \right|^2, \\ J_{\mathrm{II}} = \dfrac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2} \cdot \left| \dfrac{a_2 - p_1}{2} \right|^2. \end{cases}$$

J_{II} hat nur bei den allergröbsten Teilchen einen merklichen Wert und auch da überwiegt immer noch J_{I}. Es ist das die Intensität der Rayleighschen Strahlung, und zwar im rechten Winkel zu der sie erregenden elektrischen Schwingung, wo sie gerade ihr Maximum hat. Unter anderen Winkeln ist ihre Intensität:

$$J = J_1 \cdot \sin^2 \vartheta$$

und ihre Gesamtstrahlung ist demnach:

$$R = J_1 \cdot 2\pi r^2 \cdot \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta \cdot d\vartheta = \frac{8\pi}{3} \cdot r^2 \cdot J_1 .$$

Danach kann man also, wenn man die Rayleighsche Strahlung in der Hauptrichtung mißt (J_1), ihren Gesamtbetrag, d. h. also den Verlust, den der durchgehende Lichtstrahl durch sie erfährt, berechnen. Wir werden im folgenden stets die Größe:

$$(83)\qquad R = \frac{2}{3\pi} \cdot \lambda'^2 \cdot \left| \frac{a_1}{2} \right|^2$$

angeben, die zugleich auch das Maß für J_1 ist:

$$(84)\qquad J_1 = \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{R}{r^2} .$$

Wie man den Gesamtbetrag der Strahlung II findet, werden wir in **26.** sehen.

Strahlung vieler Partikelchen.

22. Wir haben uns bisher immer noch auf die Berechnung des von einem einzelnen Kügelchen diffus zerstreuten Lichtes beschränkt. Wir wollen nun weiter zu dem Fall übergehen, daß sehr viele Kügelchen in dem Medium fein verteilt sind, alle von demselben Durchmesser 2ϱ und von demselben optischen

Verhalten m'. Es trifft dann auf jedes einzelne Kügelchen nicht bloß der gerade durchgehende Strahl, sondern auch das von den anderen Kügelchen diffus zerstreute Licht. Der Einfluß dieser zweiten Ätherschwingung auf den Vorgang in jedem Kügelchen und die dadurch bewirkte Veränderung der ganzen seitlichen Ausstrahlung ist für äußerst kleine Teilchen von L. Lorenz theoretisch untersucht worden und J. C. Maxwell-Garnett hat die Konsequenzen der Lorenzschen Theorie für die Optik der kolloidalen Metallösungen rechnerisch verfolgt (vgl. Abschnitt 1). Es ergibt sich da, daß die suspendierten Teilchen doch schon sehr eng beisammen liegen müssen, damit die Rückwirkung der seitlichen Ausstrahlung auf den Strahlungsvorgang selber bemerkbar sein soll.

Die wässerigen kolloidalen Lösungen der Metalle werden wir im folgenden als optisch unendlich verdünnt betrachten, und die ganze seitliche Ausstrahlung einfach durch Multiplikation der Strahlung, die beim Vorhandensein eines einzigen Teilchens diffus zerstreut würde, mit der Zahl der vorhandenen Teilchen berechnen.

Wenn man übrigens Bedenken gegen die Zulässigkeit dieser Annahme hätte, so könnte man sie leicht experimentell prüfen, indem man die Lösung etwas weiter verdünnte. Ist unsere Annahme richtig, so muß die Farbe der Lösung dabei unverändert bleiben, die Absorption in allen Teilen des Spektrums sich als proportional der Konzentration erweisen. Wäre dagegen die Annahme falsch, so müßte dabei ein Farbenumschlag eintreten, wie ihn Kirchner und Zsigmondy an konzentrierten Goldlösungen in Gelatine beobachtet haben (vgl. Abschnitt 1). Soviel ich weiß, ist es bisher noch nicht gelungen, derartig konzentrierte wässerige Lösungen zu bekommen. Jedenfalls beschränke ich mich auf die gewöhnlichen verdünnten Lösungen.

Wir wollen im folgenden die Konzentration der Lösung angeben in Kubikmillimetern des Metalles pro Kubikmillimeter Wasser. Ist die Zahl der Teilchen im Kubikmillimeter N, ihr Durchmesser 2ϱ, also das Volumen $V = 4\pi\varrho^3/3$, so ist die Konzentration:

$$C = N.V = \frac{\lambda'^3}{6\pi^2} \cdot N.\alpha^3. \tag{85}$$

Andererseits ist nach (83) der Gesamtbetrag der Rayleighschen Strahlung:

$$R = N \cdot \frac{2}{3\pi} \cdot \lambda'^2 \cdot \left|\frac{a_1}{2}\right|^2,$$

also:

(86) $$R = F_1 \cdot C,$$

wo F_1 eine Größe bedeutet, die von der Konzentration unabhängig ist, aber wohl von der Teilchengröße und der Wellenlänge abhängt. Wir werden für diese Größe F_1 zwei verschiedene Formeln brauchen, je nachdem die Teilchen klein oder groß sind:

(87) $$F_1 = \frac{24\pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot \left|\frac{a_1}{2\alpha^3}\right|^2,$$

(88) $$F_1 = \frac{4\pi}{\lambda'} \cdot \frac{1}{\alpha^3} \cdot \left|\frac{a_1}{2}\right|^2.$$

Die erste Formel ist deswegen besonders bequem für kleine Teilchen, weil, wie wir schon wissen, für sehr kleine Kügelchen a_1 proportional mit α^3 zunimmt. Nach (62) ist:

$$\frac{a_1}{2\alpha^3} = u_1 \frac{m'^2 - v_1}{m'^2 + 2w_1},$$

wo u_1, v_1, w_1 für sehr kleine Teilchendurchmesser den Wert 1 annehmen. Es ist also:

(89) $$F_1 = \frac{24\pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot \left|u_1 \frac{m'^2 - v_1}{m'^2 + 2w_1}\right|^2$$

und für äußerst kleine Teilchen:

(90) $$F_1 = \frac{24\pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot \left|\frac{m'^2 - 1}{m'^2 + 2}\right|^2.$$

Diese Formel (90) ist nichts anderes als die bekannte Rayleighsche Formel.[1]) Sie sagt aus, daß bei konstant gehaltener Konzentration die Strahlung einer Lösung um so größer ist, je gröber die Teilchen sind. Und zwar ist die Intensität der Strahlung dem Teilchenvolumen direkt proportional. Außerdem überwiegen im allgemeinen die kurzwelligen Strahlen, *wenn der von den optischen Eigenschaften der Kügelchen abhängige Faktor* $(m'^2 - 1)/(m'^2 + 2)$ *nicht sehr mit der Farbe des Lichtes variiert.* Diese letzte Voraussetzung trifft nun allerdings bei den Metallen durchaus nicht zu, das Licht, das

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 47. p. 379. 1899.

kolloidale Metallösungen mit feinsten Teilchen diffus ausstrahlen, ist deswegen im allgemeinen nicht blau, wie das von anderen trüben Lösungen, sondern hat eine für das betreffende Metall charakteristische Farbe. Ist $(m'^2-1)/(m'^2+2)$ konstant, so gilt das bekannte Rayleighsche Gesetz, daß für verschiedene Farben unter sonst gleichen Umständen die Strahlung proportional mit λ'^{-4} ist.

Die Formel (88) kann uns dazu dienen, die Gesetze der Rayleighschen Strahlung bis in das Gebiet der sehr groben Teilchen zu verfolgen. Wie wir gesehen haben (im Abschnitt 15) ändert sich a_1 bei sehr groben Teilchen als eine periodische Funktion des Teilchendurchmessers mit konstanter Amplitude. Aus (88) folgt demnach, daß bei konstanter Konzentration die Rayleighsche Strahlung mit wachsendem Teilchendurchmesser abnimmt, sobald die Teilchen grob sind. Und zwar ist die Rayleighsche Strahlung schließlich, abgesehen von periodischen Schwankungen, dem Teilchenvolumen umgekehrt proportional.

I. *Bei konstant bleibender Konzentration nimmt die Rayleighsche Strahlung bei sehr feiner Verteilung zu, wenn der Teilchendurchmesser wächst, und zwar ungefähr proportional dem Teilchenvolumen, sie erreicht aber, nachdem die Teilchen schon ziemlich grob geworden sind, ein Maximum und nimmt von da an dauernd schnell ab, wenn die Verteilung noch gröber wird; wobei allerdings immer schwächer und schwächer werdende Maxima sich periodisch einstellen können.*

II. *Bestehen die Kügelchen aus vollkommen leitendem oder überhaupt vollkommen weißem Material, so ist der Teilchendurchmesser, bei welchem das Maximum der Strahlung erreicht wird, proportional der Wellenlänge, und der Maximalwert der Strahlung selber ist umgekehrt proportional der Wellenlänge.*

Der zweite Satz, der unmittelbar aus Formel (88) abzulesen ist, gilt natürlich für kolloidale Metallösungen nicht.

Man könnte das Auftreten dieses Strahlungsmaximums, das auch bei Trübungen durch nicht leitende Körper (Mastixtrübung, Dampfstrahl usw.) auftreten muß, allerdings an einer anderen Stelle, wie bei Leitern, mit einigen Vorbehalten vielleicht als *optische Resonanz* bezeichnen. Man muß dabei aber ja im Auge behalten, daß diese „optische Resonanz" nur ganz flache Maxima mit sich bringt, und daß demgemäß das

Energiespektrum der diffusen Strahlung auch bei genauer Gleichheit aller trübenden Teilchen nur geringe Erhebungen über einen Durchschnittswert zeigen wird, wenn die Teilchen groß geworden sind. Das ausgestrahlte Licht wird daher bei trüben Körpern mit nicht leitenden Partikelchen (Dampfstrahl, Mastixtrübung) schließlich nahezu weiß, mit einer nur schwach hervortretenden Farbennuance. Ähnlich verhalten sich auch die kolloidalen Metallösungen; wie wir sehen werden, tritt z. B. bei Gold im allgemeinen das Gelb etwas hervor, entsprechend der gelben Eigenfarbe.

Rayleighsche Strahlung von Goldlösungen.

23. Ich beginne nun, die optischen Eigenschaften einer Suspension winzig kleiner Goldkügelchen in Wasser zu berechnen, zunächst die Rayleighsche Strahlung. Ich lege folgende Zahlen zugrunde, die sich ergeben, wenn man durch die von Hagen und Rubens[1]) gemessenen Zahlenwerte eine möglichst glatte Kurve zieht. Nur den Wert des Reflexionsvermögens im Violett, der von Hagen und Rubens sicher zu klein angegeben wird[2]), habe ich etwas verändert.

λ	R (H. u. R.)	$\nu \cdot \varkappa$ (H. u. R.)	R ang.	$\nu \cdot \varkappa$ ang.	m	m'^2	λ'
420	0,293	1,72	0,332	1,70	$1{,}70 - i \cdot 1{,}70$	$0{,}00 - i \cdot 3{,}20$	313
450	0,331	1,73	0,338	1,72	$1{,}73 - i \cdot 1{,}72$	$-0{,}017 - i \cdot 3{,}32$	336
500	0,470	2,07	0,480	2,02	$1{,}10 - i \cdot 2{,}02$	$-1{,}60 - i \cdot 2{,}49$	374
525	—	—	0,613	2,23	$0{,}79 - i \cdot 2{,}23$	$-2{,}45 - i \cdot 1{,}98$	393
550	0,740	2,32	0,730	2,45	$0{,}57 - i \cdot 2{,}45$	$-3{,}20 - i \cdot 1{,}57$	412
600	0,844	2,91	0,850	2,96	$0{,}38 - i \cdot 2{,}96$	$-4{,}84 - i \cdot 1{,}26$	450
650	0,889	3,58	0,888	3,54	$0{,}41 - i \cdot 3{,}54$	$-6{,}97 - i \cdot 1{,}63$	487

In dieser Tabelle enthält die erste Kolumne die Wellenlänge der betreffenden Farbe im Vakuum, die zwei folgenden das Reflexions- und das Absorptionsvermögen nach Hagen und Rubens, die dritte und vierte Kolumne die von mir zur Berechnung gewählten Zahlen, m ist der daraus berechnete komplexe Brechungsexponent des Goldes, bezogen auf das Vakuum, m'^2 das Quadrat des komplexen Brechungsexponenten,

1) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. p. 1 u. 432. 1903.
2) Vgl. E. Hagen u. H. Rubens, l. c. p. 458.

bezogen auf Wasser ($m'^2 = m^2/m_0^2$), endlich λ' die Wellenlänge in Wasser.

Ferner will ich im folgenden noch eine praktische Abkürzung einführen:

$$\frac{a_1}{2a^3} = \mathfrak{a}_1 . \tag{91}$$

Die Rayleighsche Strahlung berechnet sich dann nach (87) als:

$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{24\pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot |\mathfrak{a}_1|^2, \\ \mathfrak{a}_1 = u_1 \cdot \dfrac{m'^2 - v_1}{m'^2 + 2w_1} . \end{cases} \tag{92}$$

Die Strahlung für unendlich feine Partikelchen ergibt sich, wenn man u_1, v_1, w_1 alle drei gleich 1 setzt. Für Gold bekommt man folgende Werte für $(\mathfrak{a}_1)_0 = (m'^2 - 1)/(m'^2 + 2)$:

$\lambda =$	420	450	500	525
	$0{,}579 - i \,.\, 0{,}675$	$0{,}602 - i \,.\, 0{,}666$	$0{,}807 - i \,.\, 1{,}180$	$1{,}330 - i \,.\, 1{,}440$

$\lambda =$	550	600	650
	$1{,}925 - i \,.\, 1{,}211$	$1{,}880 - i \,.\, 0{,}391$	$1{,}545 - i \,.\, 0{,}180$

also jedenfalls ganz andere, als man bei unendlich großer Leitfähigkeit finden würde. Für vollkommene Leiter ergibt nämlich die Formel (65):

$$(\mathfrak{a}_1)_0 = 1$$

ganz unabhängig von der Wellenlänge. Allgemein hat für Metalle $\mathfrak{a}_1$ die Form:

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1' - i \,.\, \mathfrak{a}_1''$$

und es ist $|\mathfrak{a}_1|^2 = \mathfrak{a}_1'^2 + \mathfrak{a}_1''^2$. Um den Unterschied gegen vollkommene Leiter, für die $|\mathfrak{a}_1|^2 = 1$ wäre, gerade im Fall der Strahlung recht deutlich hervortreten zu lassen, will ich auch noch die Werte $|\mathfrak{a}_1|^2$ für Gold hinschreiben:

420	450	500	525	550	600	650
0,790	0,805	2,05	3,84	5,18	3,70	2,42

Wir können uns nun schon ein Bild von dem Energiespektrum der seitlichen Ausstrahlung von sehr kleinen Teilchen machen, da sie ja gleich dem Produkt aus Konzentration, Teilchenvolumen und der Größe $24\pi^3 \,.\, |\mathfrak{a}_1|^2/\lambda'^4$ ist.

Die folgende Tabelle gibt diese Größe sowohl für vollkommen leitende Kügelchen als auch für Goldkügelchen:

	420	450	500	525
$\frac{24\,\pi^3}{\lambda'^4}\cdot 1$	$7{,}76\,.\,10^{16}$	$5{,}85\,.\,10^{16}$	$3{,}81\,.\,10^{16}$	$3{,}13\,.\,10^{16}$
$\frac{24\,.\,\pi^3}{\lambda'^4}\cdot\lvert a_1\rvert^2$	$6{,}12\,.\,10^{16}$	$4{,}71\,.\,10^{16}$	$7{,}77\,.\,10^{16}$	$11{,}95\,.\,10^{16}$

	550	600	650
$\frac{24\,\pi^3}{\lambda'^4}\cdot 1$	$2{,}59\,.\,10^{16}$	$1{,}82\,.\,10^{16}$	$1{,}315\,.\,10^{16}$
$\frac{24\,.\,\pi^3}{\lambda'^4}\cdot\lvert a_1\rvert^2$	$13{,}37\,.\,10^{16}$	$6{,}70\,.\,10^{16}$	$3{,}17\ .\,10^{16}$

Als Längeneinheit habe ich hier, was ich auch stets im folgenden tun werde, das Millimeter gewählt.

Mit Ausnahme des äußersten Blau und des Violett ist die Strahlung der Goldkügelchen stärker als die von vollkommen leitenden Kügelchen sein würde.

Man könnte also vielleicht sagen, daß die Goldatome auf die Lichtwellen resonieren, und zwar am besten auf grüngelb. Man müßte dann aber annehmen, daß sie in größeren Teilchen besser mit dem schwingenden Äther gekoppelt sind, als in kleinen, weil die Ausstrahlung mit dem Volumen der Teilchen wächst.

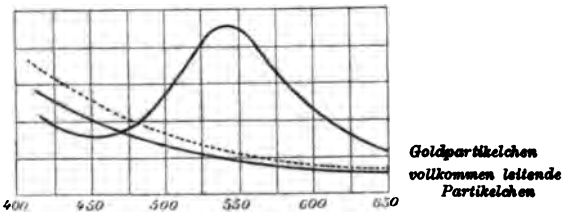


Fig. 11. Ausstrahlung einer unendlich feinen Suspension.

Die Fig. 11 stellt die Ausstrahlung kleiner Goldteilchen und kleiner vollkommen leitender Partikelchen noch einmal graphisch dar. (Die punktierte Kurve gibt die Ausstrahlung der letzteren nach Hinzufügung der ersten magnetischen Schwingung (vgl. 18.) wieder). Die zuletzt genannte Strahlung folgt ganz genau dem Rayleighschen Gesetz (proportional λ'^{-4}).

Um die Strahlung auch für gröbere Verteilungen zu finden, mußte ich u_1, v_1, w_1 berechnen, die sich aus Reihen nach α^3 (bzw. $\beta^3 = m'^3\,.\,\alpha^3$) zusammensetzen. Ich führte die Rechnung für die in der ersten Kolumne der folgenden Tab. I verzeichneten Werte von α^3 aus, zugleich berechnete ich a_1 auch für den Fall eines vollkommenen Leiters für dieselben α^3.

Tabelle I.

Werte des Koeffizienten $a_1 = a_1 / 2\,\alpha^3$.

α^2	Vollkommener Leiter	Gold 420	Gold 450	Gold 500	Gold 525
0	1,00	0,579 − i . 0,675	0,602 − i . 0,666	0,807 − i . 1,180	1,330 − i . 1,440
0,2	1,04 − i . 0,065	0,484 − i . 0,755	0,505 − i . 0,743	0,528 − i . 1,312	0,850 − i . 1,823
0,4	1,04 − i . 0,188	0,343 − i . 0,750	0,368 − i . 0,757	0,216 − i . 1,211	0,268 − i . 1,640
0,6	0,961 − i . 0,318	0,224 − i . 0,699	0,244 − i . 0,706	0,042 − i . 1,029	−0,028 − i . 1,347
0,8	0,831 − i . 0,410	0,145 − i . 0,632	0,156 − i . 0,640	−0,047 − i . 0,849	−0,114 − i . 1,061
1,0	0,688 − i . 0,437	0,094 − i . 0,559	0,100 − i . 0,566	−0,056 − i . 0,715	−0,126 − i . 0,855
1,5	0,405 − i . 0,366	0,038 − i . 0,401	0,043 − i . 0,406	−0,044 − i . 0,480	−0,075 − i . 0,554
2,0	0,265 − i . 0,256	0,028 − i . 0,297	0,031 − i . 0,299	−0,015 − i . 0,349	−0,029 − i . 0,395
2,6	0,190 − i . 0,176	0,026 − i . 0,225	—	—	—

α^2	Gold 550	Gold 600	Gold 650
0	1,925 − i . 1,211	1,880 − i . 0,891	1,545 − i . 0,180
0,2	1,602 − i . 2,050	2,190 − i . 0,977	1,920 − i . 0,515
0,4	0,975 − i . 2,040	1,750 − i . 1,874	1,767 − i . 1,080
0,6	0,057 − i . 1,719	0,807 − i . 1,980	1,288 − i . 1,492
0,8	−0,107 − i . 1,306	0,160 − i . 1,612	0,678 − i . 1,431
1,0	−0,134 − i . 1,014	0,095 − i . 1,240	0,353 − i . 1,191
1,5	−0,079 − i . 0,627	0,009 − i . 0,721	0,124 − i . 0,718
2,0	−0,022 − i . 0,485	0,032 − i . 0,479	0,096 − i . 0,471
2,5	—	—	—

Ich habe darauf die Strahlung berechnet (87):

$$F_1 = \frac{24 \cdot \pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot \left|\frac{a_1}{2\,\alpha^3}\right|^2 = \frac{4\,\pi}{\lambda'} \cdot \alpha^3 \cdot |a_1|^2.$$

Die zu jedem Wert von α^3 gehörenden Teilchendurchmesser:

$$2\,\varrho = \frac{\lambda'}{\pi} \cdot \sqrt{\alpha^3}$$

kann man aus folgender Tabelle entnehmen:

α^3	λ = 420	450	500	525	550	600	650
0,2	44,6	47,8	53,2	55,9	58,6	64,0	69,3
0,4	63,1	67,6	75,2	79,1	82,9	90,5	98,1
0,6	77,3	82,9	92,2	96,8	101,5	110,8	120,1
0,8	89,3	95,8	106,5	111,8	117,2	128,0	138,7
1,0	99,8	107,0	119,0	125,0	131,0	143,0	155,0
1,5	122,2	131,1	145,8	153,1	160,5	175,2	190,0
2,0	141,1	151,3	168,3	176,8	185,3	202,2	219,2
2,5	157,7	169,1					

Teilchendurchmesser in $\mu\mu$.

Die Kurven, die die Abhängigkeit der Strahlung vom Teilchendurchmesser wiedergeben, sind in Fig. 12 ausgeführt.

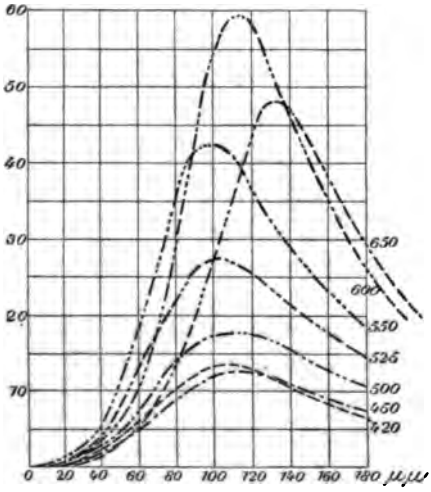


Fig. 12. „Optische Resonanz" von Goldkügelchen.

Die Abszissen sind die Teilchendurchmesser in $\mu\mu$, die Ordinaten geben die Gesamtstärke der Strahlung R, die von einem

Kubikmillimeter einer Lösung von der Konzentration 10^{-6} (1 cbmm Gold pro Liter Wasser) ausgeht, und zwar in Promille der Stärke des durch einen Quadratmillimeter hindurchgehenden Lichtbündels.

Die Größe F_1 bekommt man also aus den durch die Ordinaten dargestellten Zahlen durch Multiplikation mit 10^3. Zum Vergleich habe ich in Fig. 13 die entsprechenden Kurven (lediglich der Rayleighschen Strahlung) in demselben Maßstab auch für Kügelchen eines vollkommenen Leiters gezeichnet. Die Durchmesser, bei denen das Maximum der Strahlung erreicht wird, sind hier den Wellenlängen λ' proportional, und zwar ist:

$$2\varrho_{\text{Max.}} = 0{,}324 \,.\, \lambda'.$$

Die Maxima nehmen mit wachsender Wellenlänge wie $1/\lambda'$ ab.

Die Ausstrahlung der Goldteilchen ist, abgesehen von Blau und Violett, durchweg bedeutend größer als die der vollkommen leitenden Teilchen. Es ist, wie schon oben gesagt wurde, als ob zu der „Resonanz" der Teilchen noch die Resonanz der Goldatome im Gelb hinzukäme. Am höchsten geht

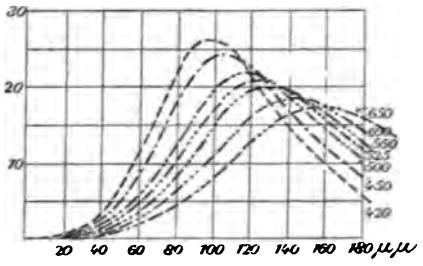


Fig. 13. „Optische Resonanz" von vollkommen leitenden Kügelchen.

die Kurve für 600 $\mu\mu$ (also Orangegelb) hinauf. Die Durchmesser der stärkst strahlenden Teilchen sind:

	420	450	500	525	550	600	650
$2\varrho_{\text{Max.}}$	105	111	110	100	96	113	131
λ'	113	336	374	393	412	450	487
$\frac{2\varrho_{\cdot\,\text{Max.}}}{\lambda'}$	0,336	0,331	0,294	0,255	0,233	0,252	0,269

Also $2\varrho_{\text{Max.}}$ liegt im allgemeinen zwischen $\lambda'/4$ und $\lambda'/3$.

Aus den Kurven Fig. 12 kann man leicht die Energiespektra der Ausstrahlungen bei bestimmten Teilchengrößen gewinnen. Man kann aus den Kurven folgende Zahlen entnehmen:

2ϱ	420	450	500	525	550	600	650
20	0,262	0,199	0,338	0,546	0,637	0,299	0,139
40	2,10	1,60	2,72	4,62	5,90	2,92	1,35
60	6,2	5,0	8,0	13,7	19,7	12,3	5,9
80	10,4	9,1	14,1	22,9	37,8	33,0	14,7
100	13,2	12,0	17,2	27,1	42,8	55,5	29,0
120	12,5	12,0	17,1	25,0	36,0	57,5	45,0
140	10,0	10,5	15,0	20,8	27,9	44,5	46,2
160	7,9	8,5	12,4	17,1	22,5	33,3	36,8
180	6,3	7,2	10,4	13,8	17,7	25,0	28,0

Mit diesen Zahlen sind die Kurven in Fig. 14 konstruiert. Man sieht aus ihnen:

Kleine kugelförmige Goldpartikelchen müssen im Ultramikroskop gelbgrün aussehen. Je größer sie werden, um so mehr verändert sich ihre Farbe zu Gelb und zu Rotgelb. Bei konstant gehaltener Konzentration strahlen am stärksten Lösungen, deren Teilchendurchmesser zwischen 100 und 140 μμ liegt, ihre Partikelchen senden hauptsächlich orangefarbenes Licht aus. Die stärkststrahlenden Lösungen sind deswegen im auffallenden Licht braun.

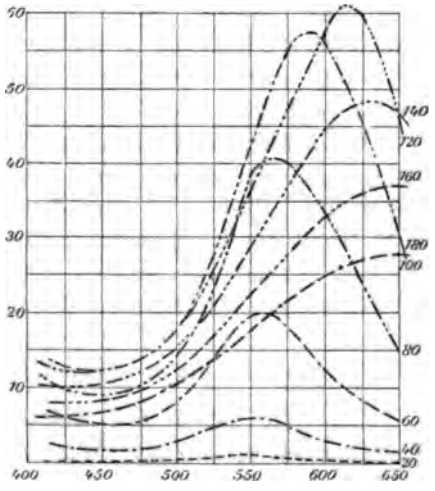


Fig. 14. Ausstrahlung kolloidaler Goldlösungen.

Daß diese Farbenerscheinungen durch das spezielle optische Verhalten des Goldes bedingt sind, sieht man, wenn man sich aus den „Resonanzkurven" vollkommen leitender Kügelchen die entsprechenden Strahlungskurven konstruiert. Ich habe das in Fig. 15 für die Teilchengrößen $2\varrho = 100$, 120, 140,

160, 180 $\mu\mu$ getan. Es sind das also alles schon recht grobe Trübungen. Während bei $2\varrho = 100$ die Kurve noch recht stark gegen Violett ansteigt, flacht sie sich mit wachsender Teilchendicke immer mehr ab und zeigt ein ganz schwaches Maximum, das bei 180 $\mu\mu$ schon bei einer Wellenlänge, die größer als 650 $\mu\mu$ ist, liegt. Das ausgestrahlte Licht ist also bei Teilchen, die größer als 100 $\mu\mu$ sind, in der Tat ziemlich weiß, mit einem schwachen Farbenton, der je nach der Größe der Teilchen blau, grün, gelb, rot sein kann. Bei 180 $\mu\mu$ müßte allerdings nach Fig. 15 Orange ziemlich deutlich sein; indessen liegt das nur daran, daß wir uns hier auf die Rayleigh sche Strahlung beschränkt haben. Würde man auch die folgenden Partialwellen berücksichtigen, so würden, wie eine leichte Überschlagsrechnung lehrt, alle Kurven und besonders die letzte noch weiter verflacht.

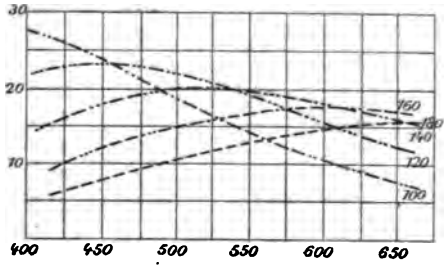


Fig. 15. Ausstrahlung von groben, vollkommen leitenden Kügelchen.

Ganz ähnliche Farben, wie bei den fingierten vollkommen leitenden Teilchen, wird man auch bei farblosen Partikelchen bekommen. Man wird aus den von mir benutzten Formeln z. B. leicht die Erscheinungen des farbigen Dampfstrahles berechnen können und wird da ähnliche Kurven bekommen, wie in Fig. 15 nur bei anderen Teilchengrößen.

Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes von Goldlösungen.

24. Wir gehen nun weiter über zur Berechnung der Koeffizienten a_2 und p_1. Wir führen auch hier zur Bequemlichkeit neue Bezeichnungen ein:

$$\mathfrak{a}_2 = -\frac{a_2}{2\alpha^3}, \quad \mathfrak{p}_1 = \frac{p_1}{2\alpha^3}. \tag{93}$$

Aus (62), (73), (74) folgt:

$$\mathfrak{a}_2 = \frac{\alpha^2}{12} \cdot u_2 \frac{m'^2 - v_2}{m'^2 + 1{,}5 \cdot w_2}, \quad \mathfrak{p}_1 = u_1 \cdot \frac{v_1 - 1}{1 + 2w_1}, \tag{94}$$

und für kleine Werte von α:

$$(95) \qquad a_2 = \frac{\alpha^2}{12} \cdot \frac{m'^2 - 1}{m'^2 + 1{,}5}, \quad \mathfrak{p}_1 = \frac{\alpha^2}{30} \cdot (1 - m'^2).$$

Hier sind u_1, v_1, w_1 die schon bei der Berechnung von a_1 benutzten Funktionen von α^2; u_2, v_2, w_2 sind aus den Formeln (57) und (27) bis (30) zu entnehmen.

Aus den in Tab. II u. III (p. 426) verzeichneten Werten von a_2 und $\mathfrak{p}_1$ ersieht man, daß die zweite elektrische und die erste magnetische Partialwelle erst bei sehr grober Verteilung gegen die Rayleighsche Strahlung aufkommen können. Am stärksten treten sie ungefähr bei 550 $\mu\mu$ hervor. Berechnet man nach (82) für 550 $\mu\mu$ das Verhältnis J_{II}/J_I für die senkrecht zum durchgehenden Strahl austretende Strahlung:

$$(96) \qquad \frac{J_{II}}{J_I} = \frac{|a_2 - p_1|^2}{a_1|^2} = \frac{|a_2 + \mathfrak{p}_1|^2}{a_1|^2},$$

so ergibt sich:

α^2	klein	1	2
J_{II}/J_I	$0{,}016 \cdot \alpha^4$	0,059	0,642
2ϱ	—	131 $\mu\mu$	185,3 $\mu\mu$

Mit Hilfe dieser Zahlen ist die eine Kurve Fig. 16 konstruiert. Man kann nun auch, wie es gewöhnlich geschieht, den Gehalt der Strahlung an polarisiertem Licht in Prozenten angeben, er ist:

$$P = \frac{J_I - J_{II}}{J_I + J_{II}}.$$

In unserem Beispiel ist:

α^2	1	2
P	0,885	0,22
2ϱ	131 $\mu\mu$	185,3 $\mu\mu$

Die Größe P wird durch die zweite Kurve in Fig. 16 dargestellt.

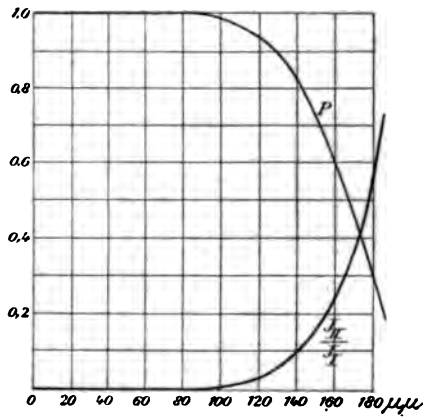


Fig. 16. Polarisation des unter 90° ausgestrahlten Lichtes von 550 $\mu\mu$ Wellenlänge.

Wenn die Strahlung einer kolloidalen Goldlösung unter 90° zum hindurchgehenden Strahl nicht vollständig polarisiert ist, so folgt daraus, daß die Lösung Teilchen enthält, deren Durchmesser weit über 100 $\mu\mu$ liegen. Bei einer Teilchengröße von 130 $\mu\mu$ beträgt die Polarisation noch ungefähr 90 Proz.

Tabelle II.

Werte von $a_2 = -\frac{a_2}{2 \cdot \alpha^3}$.

α^2	420	450	500	525	550	600	650
klein	$\alpha^2 \times$ $0{,}058 - i.0{,}053$	$\alpha^2 \times$ $0{,}060 - i.0{,}052$	$\alpha^2 \times$ $0{,}087 - i.0{,}084$	$\alpha^2 \times$ $0{,}124 - i.0{,}085$	$\alpha^2 \times$ $0{,}149 - i.0{,}061$	$\alpha^2 \times$ $0{,}138 - i.0{,}021$	$\alpha^2 \times$ $0{,}118 - i.0{,}010$
1	$0{,}047 - i.0{,}059$	$0{,}049 - i.0{,}058$	$0{,}068 - i.0{,}101$	$0{,}102 - i.0{,}124$	$0{,}152 - i.0{,}114$	$0{,}157 - i.0{,}043$	$0{,}132 - i.0{,}028$
2	$0{,}053 - i.0{,}118$	$0{,}057 - i.0{,}119$	$0{,}038 - i.0{,}188$	$0{,}052 - i.0{,}258$	$0{,}108 - i.0{,}322$	$0{,}264 - i.0{,}261$	$0{,}260 - i.0{,}151$
2,5	$0{,}039 - i.0{,}140$						

Tabelle III.

Werte von $b_1 = \frac{b_1}{2 \cdot \alpha^3}$.

α^2	420	450	500	525	550	600	650
klein	$\alpha^2 \times$ $0{,}038 + i.0{,}107$	$\alpha^2 \times$ $0{,}034 + i.0{,}111$	$\alpha^2 \times$ $0{,}087 + i.0{,}083$	$\alpha^2 \times$ $0{,}115 + i.0{,}066$	$\alpha^2 \times$ $0{,}140 + i.0{,}052$	$\alpha^2 \times$ $0{,}195 + i.0{,}042$	$\alpha^2 \times$ $0{,}266 + i.0{,}054$
1	$0{,}045 + i.0{,}065$	$0{,}045 + i.0{,}066$	$0{,}068 + i.0{,}042$	$0{,}072 + i.0{,}031$	$0{,}081 + i.0{,}025$	$0{,}100 + i.0{,}020$	$0{,}117 + i.0{,}021$
2	$0{,}064 + i.0{,}072$	$0{,}065 + i.0{,}073$	$0{,}078 + i.0{,}051$	$0{,}087 + i.0{,}042$	$0{,}094 + i.0{,}037$	$0{,}110 + i.0{,}036$	$0{,}123 + i.0{,}041$
1,5	$0{,}065 + i.0{,}071$						

Die Lösungen, deren Teilchen über 100 $\mu\mu$ dick sind, sind nun gerade die, die hauptsächlich gelb und rot strahlen. Wir werden im folgenden noch sehen, daß sie stets blau-durchsichtig sind.

Nur die Teilchen von blauen Goldlösungen strahlen Licht aus, das unter 90° gegen den durchgehenden Strahl nur wenig polarisiert ist.

Dieser Satz ist allerdings mit einem Vorbehalt auszusprechen, da er unter der Annahme kugelförmiger Teilchen abgeleitet ist. Es gibt jedenfalls auch blaue Lösungen, die unter 90° so gut wie vollständig polarisiertes Licht ausstrahlen. Aber sicher kann man wohl sagen, daß es keine roten Lösungen geben kann, die nicht unter 90° vollständig polarisiertes Licht geben. Wenn Beobachtungen ein anderes Resultat liefern[1]), so folgt daraus mit Sicherheit, daß die angewandten Lösungen inhomogen waren, daß sie viele schwach strahlende, aber stark absorbierende Rotteilchen und verhältnismäßig wenige, stark strahlende Blauteilchen enthielten.

25. Wir wollen nun weiter dazu übergehen, die Polarisation des Lichtes bei verschiedenen Winkeln gegen den durchgehenden Strahl zu berechnen. Wir wollen den Winkel gegen die Richtung, von der der Strahl herkommt, mit γ bezeichnen. In den beiden Hauptfällen I und II (Abschnitt 21) ist dann:

$$\text{I.}\quad \vartheta = \frac{\pi}{2},\quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma,\quad v = \cos\gamma$$

$$J_{\text{I}} = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2}\cdot\left|\sum_1^\infty \left\{\frac{a_\nu}{\nu\,.\,(\nu+1)}\cdot \Pi_\nu + \frac{p_\nu}{\nu\,(\nu+1)}\cdot(v\,.\,\Pi_\nu - (1-v^2)\,.\,\Pi_\nu')\right\}\right|^2.$$

$$\text{II.}\quad \varphi = \frac{\pi}{2},\quad \vartheta = \frac{\pi}{2} - \gamma,\quad v = \cos\gamma.$$

$$J_{\text{II}} = \frac{\lambda'^2}{4\pi^2 r^2}\cdot\left|\sum_1^\infty \left\{\frac{a_\nu}{\nu\,.\,(\nu+1)}\cdot(v\,.\,\Pi_\nu - (1-v^2)\,.\,\Pi_\nu') + \frac{p_\nu}{\nu\,.\,(\nu+1)}\cdot \Pi_\nu\right\}\right|^2.$$

Da es uns im folgenden nur auf den relativen Wert $J_{\text{II}} : J_{\text{I}}$ ankommt, so wollen wir nur die Größen:

$$\mathfrak{J}_{\text{I}} = \frac{4\pi^2\,.\,r^2}{\lambda'^2}\,\frac{J_{\text{I}}}{a^6},\quad \mathfrak{J}_{\text{II}} = \frac{4\pi^2 r^2}{\lambda'^2}\cdot\frac{J_{\text{II}}}{a^6}$$

1) Vgl. z. B. E. Müller, Ann. d. Phys. 24. p. 18, 16. 1907.

berechnen. Ferner beschränken wir uns wie immer auf die ersten Glieder. Es ergibt sich:

$$(97) \qquad \begin{cases} \mathfrak{J}_{\mathrm{I}} = |a_1 - (a_2 - b_1) \cdot \cos\gamma|^2, \\ \mathfrak{J}_{\mathrm{II}} = |a_1 \cdot \cos\gamma - a_2 \cdot \cos 2\gamma + b_1|^2. \end{cases}$$

Hier sind a_1, a_2, b_1 die Größen, deren Werte aus den Tabb. I, II, III zu entnehmen sind. Durch graphische Interpolation findet man aus diesen Tabellen:

$2\varrho =$	$160\ \mu\mu$	$180\ \mu\mu$
$a_1 =$	$-0{,}08 - i \cdot 0{,}63$	$-0{,}03 - i \cdot 0{,}47$
$a_2 =$	$0{,}15 - i \cdot 0{,}22$	$0{,}12 - i \cdot 0{,}30$
$b_1 =$	$0{,}09 + i \cdot 0{,}03$	$0{,}09 + i \cdot 0{,}03$

für $\lambda = 550\ \mu\mu$.

Setzt man dies in (97) ein, so gibt $\mathfrak{J}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{J}_{\mathrm{II}}$ die Gesamtstrahlung in ihrer Abhängigkeit vom Winkel γ, $\mathfrak{J}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{J}_{\mathrm{II}}$ den Überschuß des polarisierten Lichtes über das unpolarisierte, $P = (\mathfrak{J}_{\mathrm{I}} - \mathfrak{J}_{\mathrm{II}})/\mathfrak{J}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{J}_{\mathrm{II}})$ ist der prozentuale Gehalt an polarisiertem Licht. Da es uns nur auf relative Werte ankommt, habe ich die einzelnen Werte $\mathfrak{J}$ durch $(\mathfrak{J}_{\mathrm{I}} + \mathfrak{J}_{\mathrm{II}})_{90°}$ dividiert; d. h. ich habe alles auf die unter $\gamma = 90°$ stattfindende Strahlung als Einheit bezogen. Die berechneten Zahlen sind:

$2\varrho = 160\ \mu\mu$.

	0°	20°	40°	60°	80°	90°
Gesamte Strahlung	0,64	0,67	0,75	0,88	0,97	1,00
Polarisiert	0	0,02	0,06	0,18	0,44	0,62
P	0	0,03	0,09	0,21	0,46	0,62
	100°	120°	140°	160°	180°	
Gesamte Strahlung	1,06	1,35	2,01	2,76	3,17	
Polarisiert	0,80	0,97	0,72	0,29	0	
P	0,76	0,72	0,36	0,10	0	

$2\varrho = 180\ \mu\mu$.

	0°	20°	40°	60°	80°	90°
Gesamte Strahlung	0,12	0,17	0,37	0,68	0,95	1,00
Polarisiert	0	−0,02	−0,10	−0,15	+0,06	0,31
P	0	−0,11	−0,27	−0,22	+0,06	0,31
	100°	120°	140°	160°	180°	
Gesamte Strahlung	1,04	1,33	2,16	3,30	3,85	
Polarisiert	0,62	1,10	0,65	0,35	0	
P	0,60	0,82	0,30	0,10	0	

In beiden Fällen ist das Maximum der Polarisation also von 90° nach der Seite des wachsenden γ verschoben, und zwar im einen Fall ($2\varrho = 160\ \mu\mu$) etwa nach $\gamma = 110°$, im anderen Fall ($180\ \mu\mu$) nach $\gamma = 120°$. Daß gerade diese Winkel herauskommen, liegt wahrscheinlich an der speziellen

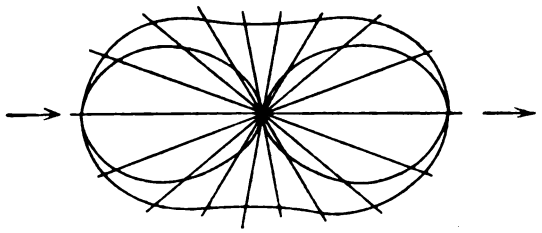


Fig. 17. Strahlungsdiagramm eines unendlich kleinen Goldkügelchens.

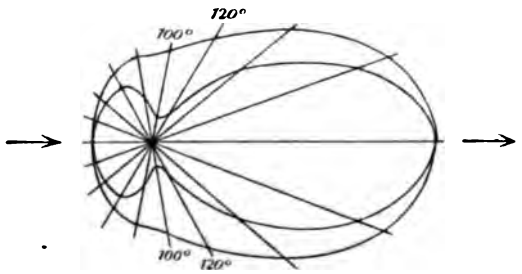


Fig. 18. Strahlungsdiagramm eines Goldkügelchens von 160 $\mu\mu$ Durchm.

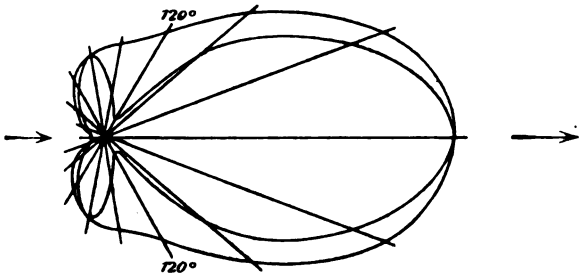


Fig. 19. Strahlungsdiagramm eines Goldkügelchens von 180 $\mu\mu$ Durchm.

optischen Natur des Goldes, da für andere Metalle experimentell meistens kleinere Winkel gefunden worden sind. Das negative Vorzeichen vor einigen Zahlen im Falle $2\varrho = 180\ \mu\mu$ bedeutet, daß hier ein Überschuß von polarisiertem Licht vorhanden ist, das *senkrecht zur Rayleighschen Strahlung* schwingt.

Das Auffälligste an den gefundenen Zahlen ist aber die große Veränderlichkeit der Werte mit dem Strahlungswinkel. Es überwiegt bei den großen Teilchen ganz außerordentlich stark die Ausstrahlung nach der Seite hin, nach welcher der durch die Lösung gehende Lichtstrahl hingeht. Ich habe diese Verhältnisse durch einige Strahlungsdiagramme anschaulich zu machen versucht, indem ich die Intensität der Strahlung als Länge auf die von dem Teilchen ausgehenden Radienvektoren abtrug. Die äußeren Kurven in den Figg. 17—20 schneiden

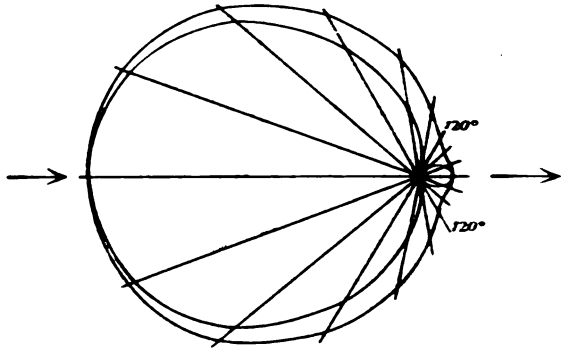


Fig. 20. Strahlungsdiagramm eines fingierten vollkommen leitenden, unendlich kleinen Kügelchens.

von den Radien Stücke ab, die der Intensität der gesamten Strahlung proportional sind, die inneren Kurven geben ebenso die *unpolarisierte* Strahlung, das Zwischenstück des Radiusvektors ist also der polarisierten Strahlung proportional.

Zusammenfassend können wir sagen:

Ist das Polarisationsmaximum des seitlich zerstreuten Lichtes einer trüben Lösung von 90^0 nach der Seite der wachsenden γ verschoben, so ist das ein sicheres Zeichen, daß die Lösung sehr grobe Teilchen enthält. Zugleich muß dann die seitliche Strahlung nach der Seite hin, nach welcher der sie erregende Lichtstrahl geht ($\gamma > 90^0$) ganz außerordentlich viel intensiver sein, als nach der anderen Seite ($\gamma < 90^0$).

Ich habe zum Vergleich noch das Strahlungsdiagramm für sehr feine Teilchen, und auch das für sehr feine Teilchen eines fingierten vollkommenen Leiters konstruiert (Figg. 17, 20).

Sieht man das letztere an, so bemerkt man, daß die Intensitätsverhältnisse gerade die umgekehrten sind, wie bei den groben Goldteilchen. Sollte also noch irgend ein Zweifel möglich sein,

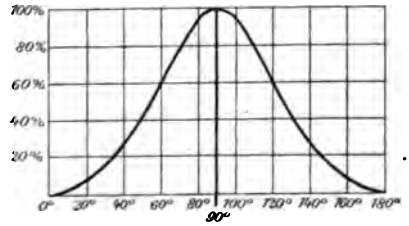


Fig. 21. Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes bei unendlich feinen Teilchen.

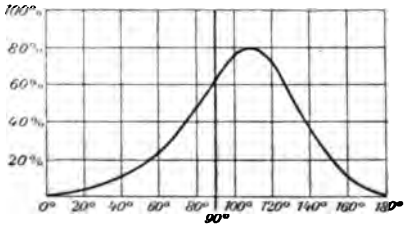


Fig. 22. Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes bei der Teilchengröße 160 $\mu\mu$.

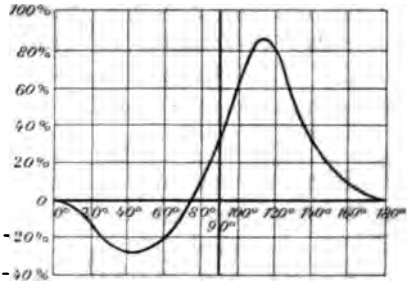


Fig. 23. Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes bei der Teilchengröße 180 $\mu\mu$.

daß die hier gebrachte Erklärung der von Herrn F. Ehrenhaft[1]) und Herrn E. Müller[2]) beobachteten Polarisationserscheinungen richtig ist, so könnte man die Frage durch Ver-

1) F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys. 11. p. 489. 1903.
2) E. Müller, Ann. d. Phys. 24. p. 1. 1907.

gleichung der unter verschiedenen Winkeln ausgestrahlten Intensitäten wahrscheinlich schon mit bloßem Auge sehr leicht entscheiden.

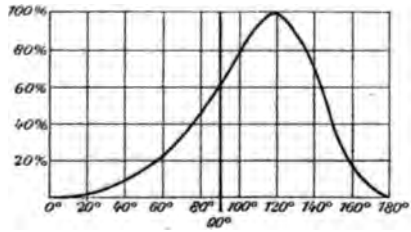


Fig. 24. Polarisation des diffus zerstreuten Lichtes von fingierten vollkommen leitenden, unendlich feinen Teilchen.

Die Kurven der Größe P (Fig. 21—24) bedürfen keiner weiteren Erläuterung.

Die Absorption trüber Medien.

26. Um die Absorption zu berechnen, werden wir untersuchen, wieviel Energie ein Teilchen verzehren würde, wenn es allein vorhanden wäre. Den Absorptionskoeffizienten der Lösung bekommt man daraus durch Multiplikation mit der Zahl der Teilchen im Kubikmillimeter.

Wir denken uns um das Zentrum des Kügelchens eine Kugelfläche vom Radius r geschlagen, und zwar sei $x = 2\pi r/\lambda'$ eine sehr große Zahl. Die Stromdichte des Energiestromes durch diese Kugeloberfläche nach außen ist in jedem Moment:

$$\mathfrak{E}_\vartheta . \mathfrak{H}_\varphi - \mathfrak{E}_\varphi . \mathfrak{H}_\vartheta .$$

Wir müssen nun diesen momentanen Energiestrom über die Dauer einer Sekunde integrieren, um die Intensität des Lichtes zu bekommen. Es ist aber nach (2):

$$\mathfrak{E}_\vartheta = \Re [E_\vartheta . e^{2\pi i n t}], \qquad \mathfrak{H}_\vartheta = \Re [H_\vartheta . e^{2\pi i n t}] \text{ usw.}$$

$\Re$ [ ] gleich: „reeller Teil von". Setzt man dies ein, so bekommt man das gesuchte Zeitintegral:

$$\int_{t=0}^{t=1} (\mathfrak{E}_\vartheta . \mathfrak{H}_\varphi - \mathfrak{E}_\varphi . \mathfrak{H}_\vartheta) . dt = \tfrac{1}{2} [(E_\vartheta . H_\varphi) - (E_\varphi . H_\vartheta)] .$$

Es soll hier durch die runden Klammern angedeutet werden, daß das „skalare Produkt" der beiden komplexen

Faktoren zu bilden ist, d. h. das Produkt der beiden absoluten Beträge mit dem Kosinus der Phasendifferenz. Ist:

$$E_\vartheta = E'_\vartheta + i\,.\,E''_\vartheta, \qquad H_\varphi = H'_\varphi + i\,.\,H''_\varphi,$$

wo E'_ϑ, E''_φ usw. reelle Größen bedeuten sollen, so ist:

$$(E_\vartheta\,.\,H_\varphi) = E'_\vartheta\,.\,H'_\varphi + E''_\vartheta\,.\,H''_\varphi.$$

Da für die skalare Multiplikation zweier Größen genau dieselben Regeln gelten, wie für die gewöhnliche Multiplikation, so wollen wir im folgenden die runden Klammern einfach weglassen. Wo zwei komplexe Größen E und H miteinander multipliziert werden, soll im folgenden stets das skalare Produkt gemeint sein. Wir können nach (4) die komplexen Größen H_ϑ und H_φ ersetzen durch $i\,.\,M_\vartheta$ und $i\,.\,M_\varphi$. Die Intensität der normalen Komponente des durch die Kugeloberfläche hindurchtretenden Lichtes ist dann bis auf einen Zahlenfaktor:

$$E_\vartheta\,.\,i\,M_\varphi - E_\varphi\,.\,i\,M_\vartheta.$$

Dieser Zahlenfaktor ist so gewählt, daß die Intensität des durch die Lösung hindurchgehenden Strahles gleich 1 ist. Wir haben für E_ϑ, M_φ usw. aus (51) und (52) die Werte $E_\vartheta + E_{\vartheta a}$, $M_\varphi + M_{\varphi a}$ usw. einzusetzen. Es zerfällt dann das Integral über die Kugelfläche, das die gesamte Lichtmenge darstellt, die durch die Kugelfläche nach außen geht, in drei Teile:

$$\mathrm{I} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (E_\vartheta\,.\,i\,M_\varphi - E_\varphi\,.\,i\,M_\vartheta)\,.\,r^2\,.\,\sin\vartheta\,.\,d\vartheta\,.\,d\varphi,$$

$$\mathrm{II} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (E_{\vartheta a}\,.\,iM_\varphi + E_\vartheta\,.\,iM_{\varphi a} - E_{\varphi a}\,.\,iM_\vartheta - E_\varphi\,.\,iM_{\vartheta a})r^2 \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi,$$

$$\mathrm{III} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (E_{\vartheta a}\,.\,i\,M_{\varphi a} - E_{\varphi a}\,.\,i\,M_{\vartheta a})r^2\,.\,\sin\vartheta\,.\,d\vartheta\,.\,d\varphi.$$

Teil I enthält den Energiestrom des durchgehenden Lichtstrahles, wenn er durch das Partikelchen gar nicht beeinflußt würde, es ist von vornherein klar, daß sich für I Null ergeben muß; Teil III ist eine positive Größe, nämlich der Gesamtbetrag der seitlich ausgestrahlten Energie, er gibt also auch den Teil des Absorptionskoeffizienten, der auf Rechnung der diffusen Strahlung zu setzen ist. Teil II ist negativ, nämlich

der ganze Energieverlust des durchgehenden Strahles, er gibt also den ganzen Absorptionskoeffizienten, der sowohl durch die diffuse Strahlung als auch durch die wirkliche Absorption strahlender Energie im Partikelchen bedingt ist.

Da wir angenommen haben, daß $x = 2\pi r/\lambda'$ unendlich groß gegen 1 ist, so können wir nach (29a) und (19) setzen:

$$I_\nu(x) = \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2}\right), \qquad I_\nu'(x) = \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2}\right);$$

$$K_\nu(-x) = e^{-ix}, \qquad K_\nu'(-x) = -i\,.\,e^{-ix}.$$

Führen wir ferner vorübergehend die folgenden Abkürzungen ein:

$$A_\nu = \frac{\lambda'}{2\pi}\cdot\frac{2\nu+1}{\nu\,.\,(\nu+1)}\cdot i^{\nu-1}\cdot\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2}\right),$$

$$B_\nu = -\frac{\lambda'}{2\pi}\cdot\frac{2\nu+1}{\nu\,.\,(\nu+1)}\cdot i^{\nu}\cdot\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2}\right),$$

$$C_\nu = \frac{\lambda'}{2\pi}\cdot\frac{a_\nu}{\nu\,.\,(\nu+1)}\cdot e^{-ix},$$

$$D_\nu = -\frac{\lambda'}{2\pi}\cdot\frac{p_\nu}{\nu\,.\,(\nu+1)}\cdot e^{-ix},$$

so ergibt sich für die Faktoren der zu berechnenden skalaren Produkte:

$$E_\vartheta + E_{\vartheta a} = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{A_\nu + C_\nu}{r}\cdot\frac{\partial P_\nu}{\partial\vartheta} - \sum_1^\infty{}_\nu \frac{B_\nu + D_\nu}{r}\cdot\frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial\varphi},$$

$$E_\varphi + E_{\varphi a} = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{A_\nu + C_\nu}{r}\cdot\frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial P_\nu}{\partial\varphi} + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{B_\nu + D_\nu}{r}\cdot\frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial\vartheta},$$

$$-i\,.\,(M_\vartheta + M_{\vartheta a}) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{B_\nu + C_\nu}{r}\cdot\frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial P_\nu}{\partial\varphi} + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{A_\nu + D_\nu}{r}\cdot\frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial\vartheta},$$

$$i\,.\,(M_\varphi + M_{\varphi a}) = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{B_\nu + C_\nu}{r}\cdot\frac{\partial P_\nu}{\partial\vartheta} - \sum_1^\infty{}_\nu \frac{A_\nu + D_\nu}{r}\cdot\frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial\varphi}.$$

Die Lichtintensität selber berechnet sich nun:

$$(E_\vartheta + E_{\vartheta a}) \cdot i(M_\varphi + M_{\varphi a}) - (E_\varphi + E_{\varphi a}) \cdot (i(M_\vartheta + M_{\vartheta a})$$

$$= \sum_1^\infty{}_\nu \sum_1^\infty{}_\mu \frac{(A_\nu + C_\nu)(B_\mu + C_\mu)}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \varphi} \right)$$

$$- \sum_1^\infty{}_\nu \sum_1^\infty{}_\mu \frac{(A_\nu + C_\nu)(A_\mu + D_\mu) + (B_\nu + C_\nu)(B_\mu + D_\mu)}{r^2} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta}$$

$$\cdot \left(\frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\mu}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\mu}{\partial \vartheta} \right)$$

$$+ \sum_1^\infty{}_\nu \sum_1^\infty{}_\mu \frac{(B_\nu + D_\nu) \cdot (A_\mu + D_\mu)}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\mu}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\nu}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathfrak{P}_\mu}{\partial \varphi} \right).$$

Wir können nun die Integration über die Kugeloberfläche ausführen. Es ist:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \vartheta} \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_\nu \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \vartheta} \right) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\vartheta \cdot d\varphi}{\sin \vartheta} = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_\nu \cdot \frac{\partial^2 P_\mu}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{d\vartheta \cdot d\varphi}{\sin \vartheta}.$$

Mit Benutzung der Gleichung (11) ergibt sich:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial P_\mu}{\partial \varphi} \right) \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$$

$$= \mu \cdot (\mu + 1) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P_\nu \cdot P_\mu \cdot \sin \vartheta \, d\vartheta \cdot d\varphi.$$

Also nach (46):

$$= 0, \quad \nu \neq \mu$$

$$= 2\pi \cdot \frac{\nu^2 \cdot (\nu + 1)^2}{2\nu + 1}, \quad \nu = \mu.$$

Ganz dasselbe bekommt man, wenn man für P_ν, P_μ substituiert $\mathfrak{P}_\nu$, $\mathfrak{P}_\mu$. Endlich ist:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial P_\nu}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\mu}{\partial \varphi} - \frac{\partial P_\nu}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\mu}{\partial \vartheta} \right) \cdot d\vartheta \cdot d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[P_\nu \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\mu}{\partial \varphi} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \cdot d\varphi - \int_0^{\pi} \left[P_\nu \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_\mu}{\partial \vartheta} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \cdot d\vartheta = 0.$$

Der aus der Kugeloberfläche heraustretende Energiestrom ist demnach:

$$2\pi \cdot \sum_1^\infty \left((A_\nu + C_\nu)\cdot(B_\nu + C_\nu) + (A_\nu + D_\nu)\cdot(B_\nu + D_\nu)\right) \frac{\nu^2\cdot(\nu+1)^2}{2\nu+1}.$$

Dieser Ausdruck zerfällt nun in die oben besprochenen drei Teile:

$$\mathrm{I} = 4\pi \cdot \sum_1^\infty (A_\nu \cdot B_\nu)\cdot \frac{\nu^2\cdot(\nu+1)^2}{2\nu+1} = 0,$$

$$\mathrm{II} = 2\pi \cdot \sum_1^\infty (A_\nu + B_\nu)\cdot(C_\nu + D_\nu)\cdot \frac{\nu^2\cdot(\nu+1)^2}{2\nu+1}$$

$$= \frac{\lambda'^2}{2\pi}\cdot \sum_1^\infty (-1)^{\nu-1}\cdot \left(i e^{-ix} \times (a_\nu - p_\nu)\, e^{-ix}\right)$$

$$= \frac{\lambda'^2}{2\pi}\cdot \Im\mathrm{m}\left(\sum_1^\infty (-1)^{\nu-1}\cdot(a_\nu - p_\nu)\right).$$

$$\mathrm{III} = 2\pi \cdot \sum_1^\infty (C_\nu^2 + D_\nu^2)\cdot \frac{\nu^2\cdot(\nu+1)^2}{2\nu+1} = \frac{\lambda'^2}{2\pi}\cdot \sum_1^\infty \frac{|a_\nu|^2 + |p_\nu|^2}{2\nu+1}.$$

Ist die Zahl der Teilchen im Kubikmillimeter N, so gibt II als Absorptionskoeffizienten der Lösung pro Millimeter:

$$k = N\cdot \frac{\lambda'^2}{2\pi}\cdot \Im\mathrm{m}\left(\sum_1^\infty (-1)^\nu \cdot (a_\nu - p_\nu)\right). \tag{98}$$

Der Verlust durch Strahlung allein beträgt pro Millimeter nach III:

$$k' = N\cdot \frac{\lambda'^2}{2\pi}\cdot \sum_1^\infty \frac{|a_\nu|^2 + |p_\nu|^2}{2\nu+1}. \tag{99}$$

Das Symbol $\Im\mathrm{m}\,(\,)$ in (98) bedeutet, das von der eingeklammerten komplexen Zahl der imaginäre Teil zu nehmen ist. Die senkrechten Striche in (99) bedeuten, daß von der zwischen ihnen stehenden Größe der absolute Betrag zu bilden ist.

Absorption kolloidaler Goldlösungen.

27. Für die kolloidalen Lösungen können wir uns auf die Koeffizienten a_1, a_2, p_1 beschränken. Wir wollen ferner, wie oben, die drei Größen

$$\mathfrak{a}_1 = \frac{a_1}{2\alpha^3}, \quad \mathfrak{a}_2 = -\frac{a_2}{2\alpha^3}, \quad \mathfrak{p}_1 = \frac{p_1}{2\alpha^3}$$

einführen. Da weiter die Konzentration der Lösung ist:

$$C = N.V, \quad V = \frac{4\pi\varrho^3}{3} = \frac{\alpha^3.\lambda'^3}{6\pi^3},$$

so ergibt sich:

$$(100) \qquad \begin{cases} k = C.K, \\ K = \frac{6\pi}{\lambda'} . \Im\mathfrak{m}(-\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{p}_1). \end{cases}$$

Die Größe K ändert sich bei sehr kleinen Teilchendurchmessern nur langsam, wenn die Teilchen größer werden.

Bei sehr feiner Verteilung des Metalles in der Lösung ist die Farbe unabhängig von der Teilchengröße, der Absorptionskoeffizient ist der Konzentration der Lösung einfach proportional.

Dieser Satz kann natürlich nur bis zu einer gewissen unteren Grenze in der Kleinheit der Teilchen Gültigkeit haben, da die Goldatome sich sicher optisch anders verhalten als kleine Goldkügelchen. Es wäre daher wahrscheinlich sehr interessant, die Absorption der Lösungen mit allerkleinsten amikroskopischen Teilchen zu untersuchen und gewissermaßen optisch den Vorgang zu verfolgen, wie sich die Goldteilchen aus den Atomen aufbauen.

Werden die Goldteilchen größer als etwa 10 $\mu\mu$, so gilt der Satz nicht mehr. Ich habe aus den Tabellen I, II, III die Werte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{p}_1$ genommen und mit ihnen für jede Farbe die Kurve konstruiert, die die Abhängigkeit der Absorption vom Teilchendurchmesser darstellt (ähnlich den Strahlungskurven in Fig. 12). Aus diesem Diagramm habe ich dann die Absorptionskoeffizienten für die in der folgenden Tabelle aufgeführten Teilchendurchmesser abgelesen. Die Zahlen sind in ganz derselben Einheit angegeben, wie oben (p. 421) die ausgestrahlte Energie. Sie bedeuten also den Lichtverlust auf dem Wege 1 mm durch eine Lösung von der Konzentration 10^{-6} (1 cbmm Gold in 1 Liter Wasser), und zwar in Promille. Die Größe K bekommt man also aus ihnen durch Multiplikation mit 10^3.

Absorption kolloidaler Goldlösungen.

2ϱ	420	450	500	525	550	600	650
0	40,5	37,4	59,6	69,0	55,5	16,4	7,0
20 $\mu\mu$	42,7	38,8	62,2	76,6	61,6	18,5	8,0
40 „	46,5	42,0	66,0	86,5	77,7	25,0	11,3
60 „	48,8	45,4	67,4	88,4	96,1	37,3	16,4
80 „	46,5	44,8	62,5	81,0	97,0	65,0	27,1
100 „	41,0	41,0	52,2	66,3	82,2	85,0	44,5
120 „	34,6	34,8	42,8	51,2	61,0	77,5	58,7
140 „	29,4	29,7	35,9	41,9	48,6	57,0	56,1
160 „	25,7	26,1	30,8	36,0	41,2	45,1	45,6
180 „	24,0	24,8	28,0	33,0	37,0	37,7	36,5

Diese Zahlenreihen sind in Fig. 25 graphisch wiedergegeben als die Absorptionsspektren bei verschiedenen Teilchengrößen.

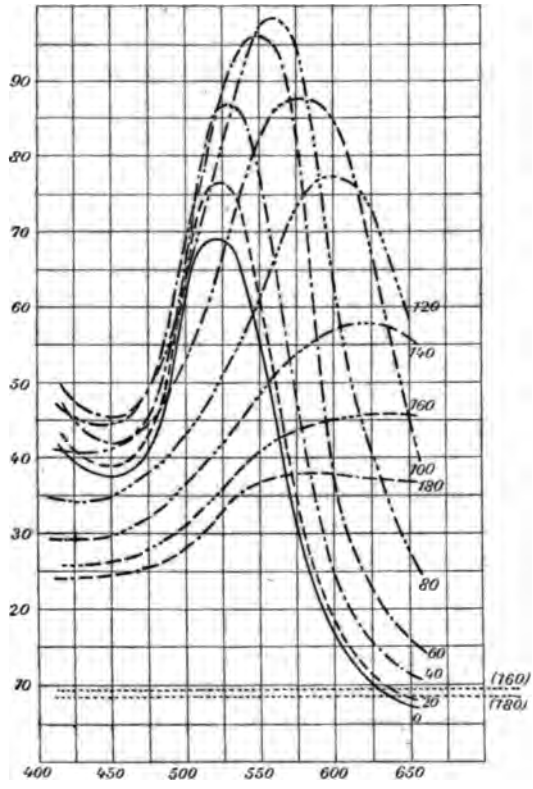


Fig. 25. Absorption kolloidaler Goldlösungen.

Man sieht bei feinen Verteilungen das bekannte steile Absorptionsmaximum der rubinroten Goldlösungen im Grün bei ca. 525 $\mu\mu$ Wellenlänge. Nimmt die Teilchengröße zu, so wächst bei konstanter Konzentration zunächst im ganzen Spektrum die Absorption, die Farbe ändert sich wenig, bekommt aber allmählich einen Stich ins bläuliche, indem das Maximum etwas nach rechts hin rückt. Eine starke Veränderung findet erst statt, wenn der Teilchendurchmesser ca. 100 $\mu\mu$ wird. Bei dieser Teilchengröße ist die Lösung violett. Bei 120 und 140 sehen wir schon die charakteristischen Spektra von tiefblauen Goldlösungen, bei 160 das einer indigoblauen, bei 180 das einer grünlichblauen. Man bekommt also in der Tat bei veränderter Teilchengröße alle an den kolloidalen Goldlösungen beobachteten Farben.

28. Es ist von vornherein klar, daß die Farbe der Goldlösungen in erster Linie auf der eigentlichen Absorption des Lichtes in den Goldteilchen selber beruht. Mit vollkommen leitenden Teilchen würde man sie niemals beobachten. Hier würde der Lichtverlust ganz allein auf der seitlichen Lichtzerstreuung beruhen und die Absorptionskurven würden deswegen identisch sein mit den früher gezeichneten Strahlungskurven Fig. 15 (wenn man noch die den nächst höheren Partialwellen, also den Koeffizienten p_1, a_2, p_2 entsprechenden Verluste hinzufügte). Diese Kurven sehen durchaus anders aus, wie die Absorptionskurven der Goldlösungen, sie würden stets nur ganz matte Farben darstellen, und bei unendlich feiner Verteilung wäre die Absorption überhaupt Null.

Indessen bestimmt bei größeren Teilchendurchmessern der Lichtverlust durch seitliche Ausstrahlung doch auch die Farbe der Goldlösungen mit. Die blauen Lösungen sind zugleich die, die eine starke rotgelbe Ausstrahlung zeigen. Es ist jedenfalls von Interesse, die beiden Summanden des Absorptionskoeffizienten auch einzeln zu berechnen. Für die praktische Rechnung ergibt sich aus (99) die Formel:

$$(101)\qquad \begin{cases} k' = C.K', \\ K' = \frac{4\pi}{\lambda'} \cdot a^3 \cdot \left(|a_1|^2 + |b_1|^2 + \frac{3}{5} \cdot |a_2|^2 \right) \\ \quad = \frac{24\pi^3}{\lambda'^4} \cdot V \cdot \left(|a_1|^2 + |b_1|^2 + \frac{3}{5} \cdot |a_2|^2 \right). \end{cases}$$

Bis etwa $2\varrho = 100\,\mu\mu$ ist K' identisch mit der in **23.** berechneten Größe F_1 (Fig. 14). Bei größeren Teilchendurchmessern treten noch die Koeffizienten $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ hervor, obwohl die Rayleighsche Strahlung bis $180\,\mu\mu$ doch noch immer überwiegt. Ich habe für die gröberen Teilchen die Größen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ durch graphische Interpolation aus den Tabb. II und III gewonnen, und K' für dieselben Teilchengrößen berechnet, für die wir K schon kennen. Es ist dann

$$K'' = K - K' \tag{102}$$

das Maß für den in den Teilchen selbst verloren gehenden Bruchteil des Lichtes. In der folgenden Tabelle sind die so berechneten Werte von K'', wieder abgesehen vom Faktor 10^3, aufgeführt.

Koeffizienten der reinen Absorption.

2ϱ	420	450	500	525	550	600	650
0	40,5	37,4	59,6	69,0	55,5	16,4	7,0
20 $\mu\mu$	42,4	38,6	61,9	76,1	61,0	18,2	7,9
40 „	44,4	40,4	63,3	81,9	71,8	22,1	9,9
60 „	42,6	40,4	59,4	74,7	76,4	25,0	10,5
80 „	35,9	35,6	48,3	58,1	59,2	32,0	12,4
100 „	27,4	28,7	34,9	39,0	39,8	29,5	25,5
120 „	21,1	22,0	25,2	25,6	24,5	19,7	13,6
140 „	17,2	18,0	20,1	19,9	19,1	11,9	9,6
160 „	14,0	14,8	16,4	16,1	15,2	10,0	8,1
180 „	11,9	12,9	14,1	14,3	13,3	8,8	6,5

Diese Zahlenreihen sind in den Kurven der Fig. 26 graphisch dargestellt. Diese Kurven der reinen Absorption haben ihr Maximum stets im Grün zwischen $\lambda = 525$ und $\lambda = 550$. Vergleicht man Fig. 26 mit Fig. 14, so ist immerhin ein gewisser Parallelismus zwischen Absorption und Ausstrahlung nicht zu verkennen. So steigt bei kleinen Teilchengrößen, wo die Ausstrahlung ihr Maximum noch im Grüngelb hat, die Ausstrahlung mit zunehmender Teilchengröße sehr schnell, die Absorption zeigt zugleich ein schwaches Anwachsen. Später geht, während das Maximum der Ausstrahlung nach rechts rückt, auch das Maximum der reinen Absorption ein wenig nach rechts, obwohl es stets im Grün bleibt. Aber zu diesen

verhältnismäßig geringfügigen Änderungen kommt eine andere, die offenbar nicht von der speziellen Natur des Goldes abhängt, und die schließlich alles andere überwiegt: Je gröber die Teilchen werden, je niedriger und flacher verlaufen die Kurven. Das ist auch von vornherein klar; denn wenn die Teilchen einigermaßen dick sind, so sind sie schließlich für alle Farben undurchsichtig, und je dicker sie werden, um so kleiner wird die Summe der schattenwerfenden Querschnitte.

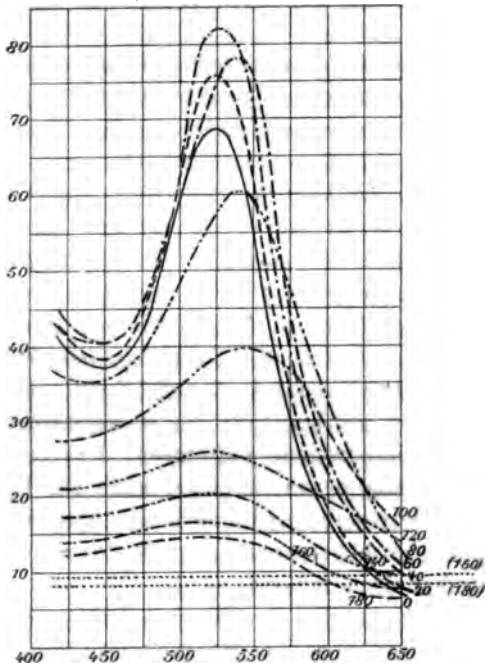


Fig. 26. „Reine Absorption" in kolloidalen Goldlösungen.

Würde man die Wirkung der Beugung ganz außer acht lassen, also nur den geometrischen Schatten rechnen, so wäre der Absorptionskoeffizient $k_0 = N.q$, wo bei der Konzentration 10^{-6}:

$$N = \frac{10^{-6}}{\frac{4\pi}{3}\varrho^3}, \quad q = \pi . \varrho^2,$$

also:

$$k_0 = N.q = \frac{3}{4\varrho} . 10^{-6}.$$

So würde sich für $2\varrho = 180$ berechnen: $k_0 = 8{,}3$ Promille; für $2\varrho = 160$: $k_0 = 9{,}4$ Promille. Ich habe diese beiden Werte k_0 ebenfalls in den Figg. 25, 28 eingetragen, als gerade Linien natürlich, weil k_0 von der Farbe nicht abhängt. Man sieht, daß die Beugung bewirkt, daß die Absorption beträchtlich viel größer wird. Ferner wird im Gelb und Rot bei weitem der größte Teil des Lichtes von den Teilchen durch Reflexion entfernt, während in der linken Hälfte des Spektrums ungefähr die Hälfte des verloren gehenden Lichtes in den Teilchen absorbiert wird.

Die Farben der kolloidalen Goldlösungen erklären sich durch das Zusammenwirken zweier Eigenschaften der Goldteilchen. Die Goldteilchen haben nämlich ein recht scharfes Maximum des Absorptionsvermögens im Grün, und zweitens ein Maximum des Reflexionsvermögens im Rotgelb. Sehr kleine Teilchen reflektieren schwach und absorbieren stark, sie machen die Lösung daher rubinrot. Große Teilchen reflektieren stark, zugleich wird die Kurve der reinen Absorption für sie niedriger und flacher, sie machen die Lösung demgegen blau. Für die Farbe der allergrößten Lösungen ist allein die Eigenschaft des Goldes, den rotgelben Teil des Spektrums stark zu reflektieren, ausschlaggebend, dadurch kommt ihre weniger satte blaugrüne Farbe zustande.

Dieser Satz ist freilich nur unter der Annahme kugelförmiger Partikelchen bewiesen. Aber auch für blättchen- und stäbchenförmige Partikeln wird man in analoger Weise zwischen dem Absorptionsvermögen und dem Reflexionsvermögen der Teilchen unterscheiden müssen.

Die Vergleichung der in dieser Arbeit enthaltenen theoretischen Ergebnisse mit den Messungsresultaten behalte ich mir bis nach dem Erscheinen der Arbeit des Hrn. Steubing vor. Es sei aber schon hier ausgesprochen, daß aus diesen Messungen hervorzugehen scheint, daß in der Tat die bekannten optischen Eigenschaften des Goldes auch für die ultramikroskopischen Teilchen erhalten bleiben und zur Erklärung der optischen Eigenschaften der kolloidalen Lösungen völlig hinreichen, daß aber andererseits die Theorie doch noch einer Ergänzung bedarf, um alles zu erklären, und zwar wahrscheinlich, indem man sie weiter auch für ellipsoidische Teilchen (Blättchen oder Stäbchen) entwickelt.

Resultate.

1. Das Problem, die optischen Eigenschaften trüber Medien zu berechnen, ist unter zwei vereinfachenden Annahmen gelöst: erstens, daß die Teilchen als kugelförmig angesehen werden dürfen, zweitens, daß die Trübung optisch unendlich dünn ist. Die zweite Annahme ist bei den gewöhnlichen kolloidalen Lösungen sicher zutreffend.

2. Das von den kleinen Teilchen ausgestrahlte Licht läßt sich als eine Reihe von „Partialwellen" berechnen, und zwar gibt es zwei Gruppen von Partialwellen, die den elektrischen und den magnetischen Schwingungen der Teilchen entsprechen. Von diesen Partialwellen braucht auch bei noch so großen Teilchen nur eine endliche Zahl berücksichtigt zu werden, und zwar geht mit der ν^{ten} elektrischen die $(\nu - 1)^{\text{te}}$ magnetische Schwingung parallel.

Bei den kolloidalen Lösungen mit sehr feinen Teilchen hat nur die erste elektrische Schwingung, der die „Rayleighsche Strahlung" entspricht, einen merklichen Betrag. Bei gröberen kolloidalen Lösungen tritt noch die zweite elektrische und die erste magnetische Schwingung hinzu.

3. Die Annahme einer vollkommenen Leitfähigkeit der Kugeln, die zu ganz unzulässigen Vereinfachungen der Formeln Veranlassung gibt, führt zu einem anderen Resultat, nämlich daß die ν^{te} magnetische Schwingung mit der ν^{ten} elektrischen parallel geht. Es müßte danach auch bei feinsten Trübungen außer der Rayleighschen Strahlung noch die erste magnetische Schwingung bemerkbar sein, und es würde sich dann der Thomsonsche Satz von dem Polarisationsmaximum bei 120° ergeben. Da die Voraussetzung falsch ist, kann man natürlich auch das Resultat nicht empirisch bestätigt finden.

4. Läßt man durch die trübe Lösung einen unpolarisierten Lichtstrahl gehen, so ist das seitlich ausgestrahlte Licht ganz oder teilweise linear polarisiert (niemals elliptisch polarisiert).

5. Bis zu einer Teilchengröße von ca. 100 $\mu\mu$ ist das von Goldkügelchen seitlich zerstreute Licht fast nur die Rayleighsche Strahlung, die bei 90° ihr Polarisationsmaximum (und zwar 100 Proz.) hat. Werden die Teilchen größer, so wächst sehr schnell der Betrag des unpolarisierten Lichtes bei

90° und das Polarisationsmaximum rückt nach vorne, bei der Teilchengröße 160 und 180 $\mu\mu$ liegt es bei 110° und 120°. Zugleich wird durch die Interferenz der Partialwellen miteinander die anfängliche Symmetrie der Rayleighschen Strahlung gestört, bei weitem der größte Teil der diffusen Strahlung geht nach der Seite hinüber, nach welcher der erregende Lichtstrahl fortschreitet. In letzter Beziehung würde sich das von fingierten sehr kleinen, vollkommen leitenden Kügelchen reflektierte Licht gerade umgekehrt verhalten. Die großen Goldkügelchen, die diese anomalen Polarisationsverhältnisse zeigen, haben eine rotgelbe diffuse Strahlung und färben die Lösung blau. Es kann keine rotfärbenden Partikelchen geben, die sich so verhalten.

6. Bei konstant gehaltener Konzentration ist die diffuse Strahlung von sehr feinen Trübungen proportional mit dem Volumen eines Partikelchens. In gröberen Trübungen wächst sie mit zunehmender Teilchengröße langsamer und erreicht schließlich ein Maximum, dessen Lage von der Wellenlänge abhängt. Und zwar ist in einer Trübung von fingierten vollkommen leitenden Kügelchen der Teilchendurchmesser, dem die maximale Strahlung entspricht, proportional der Wellenlänge (0,324 λ'), bei Goldkügelchen gilt kein so einfaches Gesetz, doch liegt der betreffende Teilchendurchmesser immer zwischen $\lambda'/4$ und $\lambda'/3$.

7. Die Farbe des diffus zerstreuten Lichtes ist bei den fingierten vollkommen leitenden Kügelchen, sowie überhaupt bei vollkommen weißen Kügelchen, wenn sie sehr klein sind, blauviolett, entsprechend dem Rayleighschen Gesetz (Strahlung proportional λ'^{-4}). Größere Kügelchen würden ein nahezu weißes Licht aussenden, mit einer schwachen, matten Farbentönung, die von der Größe des Teilchens abhängt. Eine optische Resonanz, die eine bestimmte Farbe kräftig heraushöbe, ist, wenigstens bei kugelförmigen Teilchen, ausgeschlossen, und eine Erklärung der lebhaften Färbungen kolloidaler Lösungen durch Resonanz ist unmöglich.

8. Die diffuse Strahlung von Goldpartikelchen ist im allgemeinen viel stärker als die von gleich großen vollkommen leitenden Kügelchen sein würde. Außerdem zeigt sie bei den feinsten Verteilungen ein recht scharfes Maximum im Grün-

gelb. Später steigt das Strahlungsmaximum besonders hoch im Rotgelb. Wollte man von Resonanz sprechen, so müßte man schon von einer Resonanz der Goldatome auf Gelb sprechen, die sich über der an farblosen leitenden Partikelchen zu erwartenden Erscheinung überlagert.

9. Schon unendlich feine Trübungen durch Goldpartikelchen zeigen (im schärfsten Kontrast zu dem, was man von vollkommen leitenden Teilchen zu erwarten hätte) eine charakteristische Absorption, die nur von der Menge des suspendierten Metalls (der Konzentration), nicht aber von dem Feinheitsgrad der Verteilung abhängt. Es wäre interessant experimentell zu untersuchen, wie sich das schließlich bei äußerst feinen Teilchen, die nur noch einige Atome enthalten, ändern mag.

10. Allgemein hängt die Absorption der kolloidalen Goldlösungen von zwei Eigenschaften des metallischen Goldes ab: dem Absorptionsvermögen und dem Reflexionsvermögen. Lösungen, in denen die diffuse Reflexion zurücktritt gegen die eigentliche Absorption, zeigen das Absorptionsmaximum der Goldteilchen, das im Grün liegt, sie sind daher rubinrot. Lösungen, die starke diffuse Reflexion zeigen, sind dagegen blau-durchsichtig, weil Gold hauptsächlich das rotgelbe Licht reflektiert.

11. Für die Vollständigkeit der Theorie ist es unbedingt erforderlich, auch noch das Verhalten ellipsoidischer Teilchen zu untersuchen.

Greifswald, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 7. Januar 1908.)

2. *Der Empfang elektrischer Wellen in der drahtlosen Telegraphie;* *von Reinhold Rüdenberg.*

Während wir durch die Arbeiten von H. Hertz[1]), J. J. Thomson[2]) und M. Abraham[3]) über den Mechanismus der Emission elektrischer Wellen, wie sie in der drahtlosen Telegraphie benutzt werden, im klaren sind, ist über die genaueren Energieverhältnisse bei der Absorption der Wellen in der Empfangsstation nicht sehr viel bekannt. Die Theorie des elektrischen Resonators ist zwar, außer von Hertz[4]) selbst, von einer Reihe von Autoren unter den verschiedensten Gesichtspunkten behandelt, jedoch sind gerade die speziellen Eigenschaften, die dem Resonator für drahtlose Telegraphie das charakteristische Gepräge geben, mehr oder weniger in den Hintergrund gestellt.

V. Bjerknes[5]) behandelt in seiner Theorie des Resonators den empfangenden Schwingungskreis nach der Methode der quasistationären Strömung und läßt dementsprechend auch die Rückwirkung dieses Kreises auf das Strahlungsfeld außer acht. J. J. Thomson[6]) und K. Schwarzschild[7]) geben die Lösung des Problems für eine spezielle Form des Resonators, nämlich für Kugeln, deren elektrischer Leitungswiderstand gleich Null ist. Für beliebige Leiterformen, deren Dimensionen jedoch klein gegen ihre Eigenwellenlänge sind, hat M. Planck[8]) unter derselben Einschränkung ein allgemeines

1) H. Hertz, Wied. Ann. **36.** p. 1. 1889.

2) J. J. Thomson, Recent Researches on Electr. and Magnet. Oxford, 1893. p. 361.

3) M. Abraham, Wied. Ann. **66.** p. 435. 1898.

4) H. Hertz, Wied. Ann. **34.** p. 155. 1888.

5) V. Bjerknes, Wied. Ann. **55.** p. 120. 1895.

6) J. J. Thomson, Recent Researches p. 437.

7) K. Schwarzschild, Münch. Ber. **31.** p. 293. 1901.

8) M. Planck, Wied. Ann. **57.** p. 1. 1896; **60.** p. 577. 1897; Physik. Zeitschr. **2.** p. 530. 1901.

Verfahren ausgearbeitet. Schließlich haben J. J. Thomson[1]) sowie W. Seitz[2]) und W. v. Ignatowski[3]) die vollständige Lösung des Problems gegeben für den Fall eines unendlich langen gestreckten Drahtes im Strahlungsfelde.

Für den Resonator der drahtlosen Telegraphie kommen drei Gesichtspunkte in Betracht, die beim Ansatze der Rechnung gleichzeitig berücksichtigt werden müssen, was bei den eben angeführten Lösungen, die meist andere Ziele verfolgten, nicht geschehen ist: das Empfangssystem hat eine oder mehrere ausgesprochene *Eigenschwingungen*, die es resonanzfähig für auffallende Wellen machen; es besitzt ferner einen gewissen *elektrischen Leitungswiderstand* — oder einen ähnlichen dissipativen Widerstand — der eine Umsetzung der im Resonator schwingenden elektrischen Energie in Wärme oder eine andere erkennbare Form bewirkt; schließlich übt es eine *Rückwirkung auf das ursprüngliche Strahlungsfeld* aus, weil die in ihm zirkulierenden Ströme elektromagnetische Wellen nach außen hin senden, die das anfängliche Feld stören.

Um eine strenge Formulierung des Problems zu erhalten, müßte man die nicht quasistationäre Stromverteilung im Innern des Empfangssystems in Ansatz bringen und auch auf die genaue Schaltung der Empfangsantenne Rücksicht nehmen. Wir wollen nun aber beachten, daß wir die nach *außen* in Erscheinung tretende Wirkung der nicht quasistationären Strömung bereits als Rückwirkung auf das Feld in der vom Resonator entsandten Wellenstrahlung zur Darstellung gebracht haben. *Wenn wir daher jetzt von einer weiteren Berücksichtigung der nicht quasistationären Strömung absehen, so verzichten wir damit nur auf eine genauere Kenntnis der Stromverteilung im Innern des Resonators, während sämtliche anderen Erscheinungen richtig wiedergegeben werden.*

Wir führen also einen idealen Ersatzstromkreis ein, einen äquivalenten Dipol mit endlichem Polabstande (Fig. 1), dessen Eigenschwingungszahl genau gleich der betrachteten des Empfangssystems ist, und dessen Stromstärke und Spannung

1) J. J. Thomson, Recent Researches p. 428.
2) W. Seitz, Ann. d. Phys. 16. p. 747. 1905; 19. p. 554. 1906.
3) W. v. Ignatowski, Ann. d. Phys. 18. p. 495. 1906.

den Mittelwerten am wirklichen System entsprechen. Die elektrischen Abmessungen der wirklichen Empfangskreise,

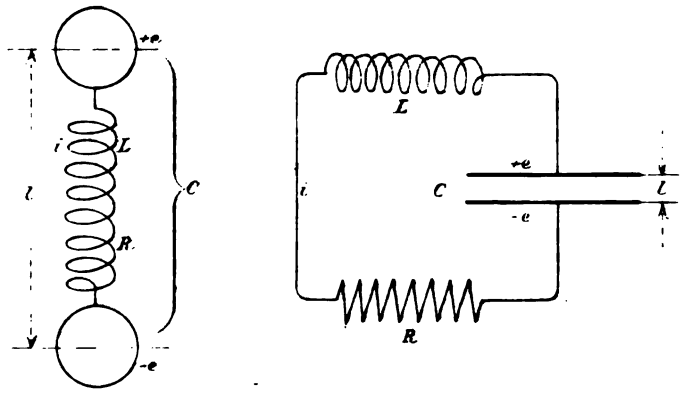


Fig. 1.

Fig. 2, reduziert man nach bekannten elementaren Regeln am besten auf den Antennenkreis, da dieser die Strahlungsenergie aufzunehmen hat. Die so gewonnene „mittlere Kapazität", die „mittlere Selbstinduktion" und der „mittlere Widerstand" des Antennenkreises sind dann identisch mit der Kapazität C, der Selbstinduktion L und dem Widerstande R des Ersatzstromkreises oder Dipols, die in die weitere Rechnung eingehen.

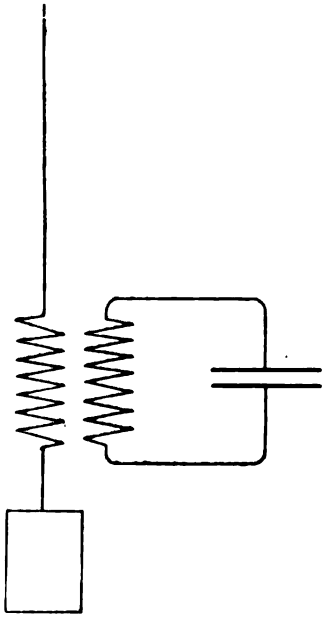


Fig. 2.

Da die Strömung im Ersatzstromkreise quasistationär sein soll, so sind dessen Dimensionen notwendig klein gegen die Wellenlänge. Wir dürfen daher auch die Länge l des äquivalenten Dipols als klein gegen die Wellenlänge annehmen und erreichen dadurch den Vorteil eines ähnlich einfachen Rechnungsganges, wie ihn

M. Planck[1]) bei der Behandlung eines widerstandslosen Resonators angewandt hat. Lediglich des Zusammenhanges wegen sollen einige dazu erforderliche Überlegungen, die von M. Planck[2]) und M. Abraham[3]) stammen, hier kurz berührt werden.

Wir wollen die Energiebilanz unseres Resonators aufstellen, der von einem Zuge auffallender Wellen getroffen werden möge. Bezeichnet man mit e die Ladung des äquivalenten Dipols — oder der Kondensatorbelegung des Ersatzstromkreises —, Fig. 1, mit

$$i = \frac{de}{dt} \tag{1}$$

seine Stromstärke zur Zeit t, dann ist seine innere Energie

$$U = \frac{1}{2}\frac{e^2}{C} + \frac{1}{2}L\left(\frac{de}{dt}\right)^2 \tag{2}$$

und deren sekundliche Änderung:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{C}e\frac{de}{dt} + L\frac{de}{dt}\frac{d^2e}{dt^2}. \tag{3}$$

Im Ohmschen Widerstande des Systems wird die Leistung

$$Q = Ri^2 = R\left(\frac{de}{dt}\right)^2 \tag{4}$$

in Wärme umgewandelt. Diese, sowie die den auffallenden Wellen entnommene, und die durch elektromagnetische Ausstrahlung abgegebene Leistung bewirken die Änderung der inneren Energie.

Der Ladungsabstand des Dipols, oder seine Länge, sei l, und die elektrische Feldstärke der über ihn fortstreichenden primären Wellen, die eine periodische Funktion der Zeit ist, werde mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet. In jedem Drahtelemente ds des Schwingungskreises wirkt dann eine treibende elektrische Kraft $\mathfrak{E}\,ds\cos\alpha$, wenn α den Winkel zwischen $\mathfrak{E}$ und ds bezeichnet, so daß die gesamte elektromotorische Kraft beträgt:

$$\int \mathfrak{E}\,ds\cos\alpha,$$

erstreckt über die ganze Drahtleitung. Da die Abmessungen

1) M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung. Leipzig, 1906. p. 113.
2) M. Planck, l. c.
3) M. Abraham, Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Leipzig, 1905.

des Kreises klein gegen die Wellenlänge sind, so ist die Feldstärke $\mathfrak{E}$ in allen seinen Elementen merklich dieselbe und man darf sie daher vor das Integralzeichen setzen. Der Wert $\int ds \cos\alpha$ ist aber nichts anderes, als der Abstand der Drahtenden, oder die Dipollänge l, gemessen in der Projektion auf die Richtung $\mathfrak{E}$, denn die Beiträge aller übrigen Elemente heben sich gegenseitig fort. Wenn wir also unter $\mathfrak{E}$ die Komponente der äußeren Feldstärke in der Richtung l verstehen, dann wird die von den auffallenden Wellen auf den Schwingungskreis ausgeübte elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}.l$, und dadurch wird eine Leistung

$$W_e = \mathfrak{E} l i = \mathfrak{E} l \frac{de}{dt} \tag{5}$$

aus dem Strahlungsfelde auf den Schwingungskreis übertragen.

Die Größe der vom Dipol ausgestrahlten Energiemenge ist zuerst von H. Hertz berechnet[1]), sie beträgt[2]) in elektromagnetischen Einheiten:

$$\int W_a dt = \frac{2}{3} \frac{l^2}{c} \int \left(\frac{d^2 e}{dt^2}\right)^2 dt. \tag{6}$$

Dabei ist, wie oben, unter l der Ladungsabstand zu verstehen, ohne Rücksicht auf die sonstige Konfiguration des Schwingungskreises[3]), weil sich auch hier die Beiträge aller übrigen Leiterelemente zur Strahlung aufheben. c bedeutet, wie üblich, die Lichtgeschwindigkeit.

Die Formel (6) kann man partiell integrieren und findet

$$\int \left(\frac{d^2 e}{dt^2}\right)^2 dt = \left[\frac{de}{dt} \cdot \frac{d^2 e}{dt^2}\right] - \int \frac{de}{dt} \cdot \frac{d^3 e}{dt^3} dt.$$

Integriert man über eine beliebige Anzahl von Schwingungen, dann kann man stets die Integrationsgrenzen so wählen, daß das erste Glied, das um Null oszilliert, verschwindet. Die pro Zeiteinheit vom Dipol ausgestrahlte Leistung ist daher

$$W_a = -\frac{2}{3} \frac{l^2}{c} \frac{de}{dt} \frac{d^3 e}{dt^3}, \tag{7}$$

worin der Faktor

$$S = \frac{2}{3} \frac{l^2}{c} \tag{7 a}$$

nur von der Dimensionierung des Schwingungskreises abhängt.

1) H. Hertz, l. c.
2) Vgl. a. B. M. Planck, l. c. p. 107; M. Abraham, l. c. p. 66 u. 71.
3) M. Abraham, l. c. p. 293.

Dem Energieprinzip zufolge muß nun sein:

$$\frac{dU}{dt} + Q + W_a - W_e = 0,$$

und wenn man die Gleichungen (3), (4), (5) und (7) einsetzt und noch durch de/dt dividiert, dann erhält man daraus *die Schwingungsgleichung für den Empfangsstromkreis*:

$$\frac{1}{C}e + R\frac{de}{dt} + L\frac{d^2e}{dt^2} - S\frac{d^3e}{dt^3} = \mathfrak{E}l. \tag{8}$$

Wenn die Art der eintreffenden elektrischen Wellen gegeben ist, dann ist die rechte Seite dieser Gleichung bekannt und ihre Lösung läßt sich daher leicht angeben. Der Einfachheit wegen wollen wir uns hier auf den Fall beschränken, daß ungedämpfte Wellenzüge über die Empfangsstation hinwegziehen und wollen nur den stationären Zustand betrachten. Der Fall gedämpft periodischer Schwingungen läßt sich mit etwas mehr Rechenarbeit nach genau demselben Schema erledigen.

Wir setzen also an:

$$\mathfrak{E} = E\sin\omega t, \tag{9}$$

wo E der Maximalwert der elektrischen Feldstärke ist, die am Orte des Empfängers herrschen würde, wenn der Resonator gar nicht vorhanden wäre. Führt man die Eigenschwingungszahl desselben in 2π Sekunden ein:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}, \tag{10}$$

dann schreibt sich die Lösung der Differentialgleichung (8):

$$e = \frac{El}{\sqrt{[L(\omega_0^2 - \omega^2)]^2 + [\omega(R + S\omega^2)]^2}}\sin(\omega t - \gamma), \tag{11}$$

worin die Phase γ durch die Beziehung bestimmt wird:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\omega(R + S\omega^2)}{L(\omega_0^2 - \omega^2)}. \tag{12}$$

Die *Stromstärke* im Empfangskreise berechnet sich daraus nach Gleichung (1) zu:

$$i = \frac{El}{\sqrt{\left[\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)L\omega\right]^2 + \left[R + S\omega^2\right]^2}}\cos(\omega t - \gamma) \tag{13}$$

und die *aus dem Strahlungsfelde absorbierte und in Wärme verwandelte Energie* im zeitlichen Mittel zu:

$$(14) \qquad Q = \tfrac{1}{2}(El)^2 \frac{R}{\left[\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right) L\omega\right]^2 + \left[R + S\omega^2\right]^2}.$$

Ein weiterer Energiebetrag wird vom Resonator zwar aus dem Strahlungsfelde aufgesaugt, er kann aber nicht nutzbar gemacht werden, sondern wird in alle Richtungen zerstreut. Seine Größe ist:

$$(15) \qquad W_a = \tfrac{1}{2}(El)^2 \frac{S\omega^2}{\left[\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right) L\omega\right]^2 + \left[R + S\omega^2\right]^2},$$

oder auch

$$(15a) \qquad W_a = Q\frac{S\omega^2}{R}.$$

Die Summe der absorbierten und zerstreuten Energie ist natürlich gleich der eingestrahlten, weil die innere Energie U im stationären Zustande im Mittel ungeändert bleibt. Man überzeugt sich davon auch leicht durch die Ausrechnung.

Als erstes Resultat der Rechnung erkennt man, *daß sowohl die nutzbar absorbierte Energie Q als auch die zerstreute W_a ein starkes Maximum erreicht, wenn die Eigenfrequenz ω_0 mit der Frequenz im Strahlungsfelde übereinstimmt*, wie das ja allbekannt ist. Indes ist zu beachten, daß die Lage des Resonanzmaximums nur dann dem Isochronismus entspricht, wenn die Eigenfrequenz des Resonators variiert wird, nicht aber, wenn die Frequenz der primären Wellen verändert wird, worauf bei der Messung von Wellenlängen nach der Resonanzmethode Rücksicht zu nehmen ist. Wir wollen für die folgenden Betrachtungen stets Isochronismus voraussetzen, der im praktischen Betriebe der drahtlosen Telegraphie immer eingestellt wird. Der Verlauf der Stromstärke im Empfangssystem nach Gleichung (13) stimmt genau überein mit den Gesetzen, die von Duddel und Taylor[1]) experimentell festgestellt wurden.

Für Isochronismus wird die Stromstärke:

$$(16) \qquad i = \frac{El}{R + S\omega^2}\cos(\omega t - \gamma)$$

1) W. Duddel u. J. E. Taylor, Journ. of the Inst. of electr. Engineers **35**. p. 321. 1905.

und die Joulesche Wärme im Mittel:

$$Q = \tfrac{1}{2}(El)^2 \frac{R}{(R + S\omega^2)^2}. \tag{17}$$

Man sieht also, *daß außer dem Ohmschen Widerstande der Drahtleitungen noch ein Strahlungswiderstand für die Stärke der Ausbildung des Stromes maßgebend ist*, der es bewirkt, daß selbst bei verschwindendem Leitungswiderstande die Stromstärke endlich bleibt, er wirkt genau so, wie ein gewöhnlicher *in Serie* geschalteter Widerstand. Die Größe des Strahlungswiderstandes ist nach Gleichung (7a):

$$S\omega^2 = \frac{2}{3}\frac{l^2\omega^2}{c} = \frac{8\pi^2}{3} c \frac{l^2}{\lambda^2} \tag{18}$$

in absoluten elektromagnetischen Einheiten, wenn man statt der Frequenz ω die Wellenlänge

$$\lambda = 2\pi\frac{c}{\omega}$$

der *erregenden* Schwingung einführt. Dividiert man noch durch 10^9, dann erhält man ihn in Ohm zu:

$$S\omega^2 = 80\pi^2\frac{l^2}{\lambda^2}. \tag{18a}$$

Es ist sehr zu beachten, daß dieser Strahlungswiderstand keine Konstante des Empfangssystems ist, sondern *daß er außer von der äquivalenten Dipollänge l sehr stark von der Wellenlänge der auffallenden Strahlung abhängig ist.* Will man daher bei strahlenden Systemen einwandfreie Frequenz- und besonders Dämpfungsmessungen machen, indem man eine Resonanzkurve aufnimmt, so muß man stets die primäre Frequenz konstant halten, und nur die Eigenfrequenz des Resonanzkreises variieren. Ein anderer Einfluß dieser Variabilität des Strahlungswiderstandes zielt dahin, daß die Beziehungen, die von Bjerknes[1]) für die Abhängigkeit der Resonanzeffekte von der Frequenz der Wellen aufgestellt sind, Abänderungen erleiden.

Als einfachstes Beispiel betrachten wir den Maximalwert des Resonatorstromes, der sich bei verschwindendem Ohmschen

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. 55. p. 120. 1895.

Widerstande einstellen würde. Er ist nach Gleichung (16) und (7a):

$$J = \frac{El}{S\omega^2} = \frac{3}{2}\frac{cE}{l\omega^2}, \tag{19}$$

also um so größer, je *kleiner* die Dipollänge l und besonders die Frequenz ω gewählt wird. Nach der Bjerknesschen Theorie folgt bekanntlich gerade die entgegengesetzte Abhängigkeit.

Für die weitere Diskussion müssen wir die Feldstärke E, die in der Umgebung des Resonators herrscht, als gegeben ansehen. Sie richtet sich in Wirklichkeit nach der Art und Stärke der Sendestation, sowie nach der besonderen Beschaffenheit der von den Wellen bereits durchlaufenen Luftstrecken nebst den angrenzenden Teilen der Erdoberfläche.[1]) Auch die Größe der verwandten Wellenlänge und die Stärke der Erdkrümmung haben bedeutenden Einfluß auf die Intensität der Wellen. Alle diese Wirkungen sind jedoch sowohl theoretisch wie praktisch noch so ins Dunkel gehüllt, daß es unmöglich ist, sie bei einem Vergleich richtig gegeneinander abzuschätzen. *Aus dem Grunde beziehen wir alle Schlüsse auf konstante Intensität der eintreffenden Wellen.*

Bei der Verwendung eines Bolometers, oder eines ähnlichen die Energie messenden Detektors, wird die Stärke der wahrnehmbaren Wirkung durch Gleichung (17) dargestellt, sofern der Widerstand der Drahtleitungen klein gegen den des Detektors ist, was natürlich stets anzustreben ist. Der Detektorwiderstand R selbst ist dann von wesentlicher Bedeutung für die Empfangsintensität, sein Einfluß wird durch eine Kurve wie in Fig. 3 dargestellt. Das Maximum der Wirkung wird erreicht, wenn

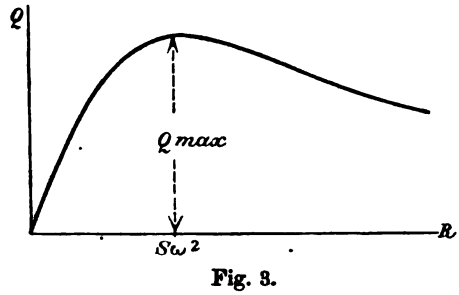


Fig. 3.

$$R = S\omega^2 \tag{20}$$

1) J. Zenneck, Ann. d. Phys. 23. p. 846. 1907; M. Brylinski, Bulletin de la société internat. des Électriciens 6. p. 255. 1906.

ist, *wenn somit der Detektorwiderstand genau gleich dem Strahlungswiderstande ist.*[1]) Die nutzbar gemachte Energie beträgt dann:

$$Q_{\max.} = \frac{E^2 l^2}{8 R} = \frac{E^2 l^2}{8 S \omega^2} \tag{21}$$

oder wenn man den Wert des Strahlungswiderstandes nach Gleichung (7a) oder (18) einführt:

$$Q_{\max.} = \frac{3}{16} \frac{E^2 c}{\omega^2} = \frac{3}{(8\pi)^2} \frac{E^2 \lambda^2}{c}. \tag{21a}$$

Dies ist der größte Betrag der Energie, der dem Strahlungsfelde durch einen einzelnen Resonator überhaupt entzogen werden kann. Genügt der Empfangskreis nicht der Widerstandsbedingung (20) und gleichzeitig auch der Resonanzbedingung $\omega_0 = \omega$, dann ist die aufgesaugte Energie stets beträchtlich kleiner als Gleichung (21a) angibt. Wie man auch aus Gleichung (15a) erkennt, *ist im günstigsten Falle die absorbierte Energie ebensogroß wie die zerstreute.* Die letztere würde bei widerstandslosem Resonator am größten sein, und zwar erreicht sie dann den vierfachen Betrag der maximal absorbierbaren.

Man erkennt jetzt aus dieser Beziehung *das für die drahtlose Telegraphie wichtige Resultat, daß die größtmögliche Energieabsorption der Empfangsstation um so stärker ist, je größer die Wellenlänge der eintreffenden Strahlung ist. Die Länge des äquivalenten Dipols, die ein Maß für die wirksame Länge der Empfangsantenne gibt, ist ohne Einfluß auf die Stärke der Absorption.* Diese merkwürdigen Ergebnisse, die die bisher üblichen Anschauungen stark modifizieren, lassen sich auch anschaulich leicht erklären, wenn man auf die Rückwirkung und Eigenstrahlung des Empfangssystems achtet und deren Abhängigkeit von der Frequenz berücksichtigt.

Kann man aus konstruktiven Gründen den Widerstand des Empfangssystems samt Detektor nicht unter einen bestimmten Wert reduzieren[2]), dann erkennt man aus Gleichung (17), daß

1) Dieses Gesetz ist bereits von C. Tissot, L'industrie électrique 14. p. 161. 1906, sowie von W. Duddel u. J. E. Taylor, l. c, experimentell gefunden worden.

2) Es ist jedoch zu bedenken, daß man durch Einschaltung eines Energie liefernden Apparates (nach Physik. Zeitschr. 8. p. 668. 1907) den Gesamtwiderstand beliebig klein machen kann.

eine große Wellenlänge, also geringe Schwingungszahl d eintreffenden Wellen immer noch große Vorteile bringen kann Für die äquivalente Dipollänge ergibt sich jetzt ein bestimmt günstigster Wert, der aus Gleichung (17) leicht zu berechnen i

Benutzt man als Detektor ein Instrument, das nicht s Energie, sondern auf Spannung anspricht, dann ergeben si natürlich etwas modifizierte Schlüsse. Nach Gleichung (11) b rechnet sich die bei Isochronismus herrschende Spannung den Kondensatorbelegungen zu

$$v = \frac{e}{C} = \frac{E l}{C \omega (R + S \omega^2)} \sin(\omega t - \gamma), \tag{22}$$

so daß man außer einer möglichst kleinen Kapazität *auch h große Wellenlänge als günstig* für die Empfängerwirkung erhä Der Ohmsche Widerstand sollte möglichst klein sein, und d günstigste Länge des äquivalenten Dipols ergibt sich gen wie oben zu

$$l = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{3R}{2c}}. \tag{23}$$

Je kleiner man also den Widerstand der Schwingungskreise mach kann, um so geringere Dipollänge ist vorteilhaft anzuwend Drückt man R statt im absoluten Maßsystem in Ohm a dann erhält man die Beziehung

$$l = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{R}{20}} = \frac{\lambda \sqrt{R}}{28{,}1}, \tag{23a}$$

eine Form, die zahlenmäßig sehr übersichtlich ist.

Da in sämtlichen Formeln für die Resonanzeffekte ste der Faktor

$$\frac{l}{R + S\omega^2} = \frac{l}{R + \frac{8\pi^2}{3} c \frac{l^2}{\lambda^2}}$$

für den Einfluß der Dipollänge maßgebend ist, *so gilt die let Beziehung für deren günstigsten Wert ganz allgemein für sän liche Arten von Detektoren.* Hat man z. B. einen nutzbar Widerstand von 1 Ohm im Empfängerkreise, dann wendet m

1) Die Erfahrungen bei der Überbrückung großer Entfernung scheinen die Forderung großer Wellenlänge auch aus anderen Grünc zu bestätigen (vgl. R. A. Fessenden, The Electrician 59. p. 486. 190

zweckmäßig ein Luftleitergebilde an, das eine äquivalente Länge von etwa $^1/_{30}$ Wellenlänge besitzt.

Es muß nun untersucht werden, in welchem Zusammenhange die äquivalente Dipollänge l mit den Abmessungen der Empfangsantennen steht, wie sie in den Stationen der drahtlosen Telegraphie benutzt werden. Hätten wir, wie in Fig. 4, einen vertikalen Luftleiter in der Höhe Λ über dem Erdboden mit einer großen Kapazität belastet, dann würde im Empfangsdrahte selbst überall dieselbe Stromstärke herrschen, sofern durch die ankommenden Wellen nur die Grundschwingung des Systems erregt wird. Die Forderung der quasistationären Strömung, die wir an den Ersatzstromkreis stellten, ist dann also streng erfüllt, so daß die äquivalente Dipollänge ist:

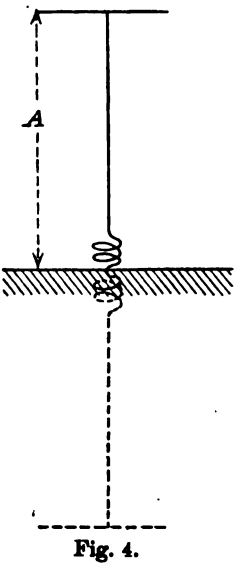


Fig. 4.

$$l' = 2\Lambda,$$

wenn wir das System: Antenne nebst Spiegelbild unter der Erde als wirklich vorhanden annehmen. Da nun aber nur im Halbraume über der Erdoberfläche — die wir als sehr gut leitend ansehen — Energie aufgesaugt und zerstreut wird, also nur die Hälfte der Energie, die für den ganzen Dipol in Rechnung zu stellen wäre, so müssen wir mit einer äquivalenten Länge

$$l = \frac{l'}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\Lambda \tag{24}$$

rechnen. Da die zerstreute Energie nach Gleichung (7) vom Quadrate der Dipollänge abhängt, so erhält man durch diese Festsetzung den richtigen Wert für dieselbe.

Recht nahe kommen den theoretischen Voraussetzungen auch die Schirmantennen, Fig. 5, die jetzt vielfach praktisch im Gebrauche sind. Man kann die Antennenlänge Λ etwa bis zur Mitte des Schirmdaches rechnen, da die im Schirme selbst nach unten fließenden Ströme eine Verminderung der Ausstrahlung des Vertikaldrahtes bewirken.

Am schlechtesten genügen die linearen Sender, Fig. 6, den Annahmen unserer Rechnung, da in ihnen keineswegs quasistationäre Strömung herrscht, sondern die Stromstärke vom Fuße nach der Spitze zu nach einem Sinusgesetze ab-

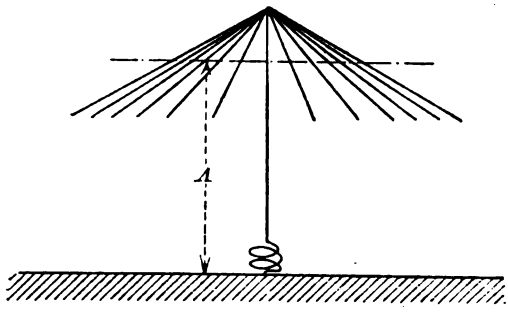


Fig. 5.

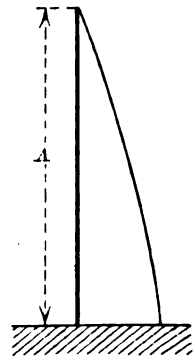


Fig. 6.

nimmt. Die einer solchen Antenne entsprechende äquivalente Dipollänge läßt sich dennoch sehr angenähert dadurch bestimmen, daß man den bekannten Wert der Energiestrahlung, der von M. Abraham[1]) bestimmt ist, mit dem rechnungsmäßigen Strahlungsverluste

$$\delta\omega^2 \cdot \frac{J^2}{2} = \frac{4\pi^2}{3}\frac{c\,l^2}{\lambda^2} J^2$$

nach Gleichung (18) vergleicht, worin J die maximale Amplitude der Stromstärke bedeutet. Für eine lineare Antenne, die in ihrer Eigenperiode schwingt, also mit einer Wellenlänge

$$\lambda = 4A,$$

ist die mittlere sekundliche Energiestrahlung[1]) im elektromagnetischen Maßsystem:

$$\frac{1{,}22}{2} c J^2.$$

Man findet daraus ohne weiteres den Wert

$$(25) \qquad l = \frac{\sqrt{6 \cdot 1{,}22}}{\pi} A = 0{,}860\, A,$$

mit dem man jetzt in alle vorstehenden Rechnungen eingehen

1) M. Abraham, Elektromagnetische Theorie der Strahlung, p. 304.

darf. Der eigentliche Strahlungswiderstand einer solchen Antenne ergibt sich zu

$$S\omega^2 = 1{,}22 \cdot c \cdot 10^{-9} = 36{,}6 \text{ Ohm};$$

in dieser Größenordnung sollte also bei Energiedetektoren auch der auf die Antenne reduzierte nützliche Widerstand liegen, wenn man Viertelwellenantennen benutzt.

Auch ohne auf den genauen Ausdruck für die Strahlung, der durch Integration der Maxwellschen Feldgleichungen erhalten ist, zurückzugreifen, kann man leicht zu einem angenäherten Werte für die Länge des idealen Dipols kommen. Man braucht nur zu bedenken, daß die elektromagnetische Strahlung sich in erster Linie nach dem von einem entfernten Punkte aus sichtbaren Integralwerte der Stromstärke längs des ganzen Leiters richtet. Multiplizieren wir also den Ausdruck (24), der für räumlich konstante Stromstärke gilt, wegen der sinusförmigen Stromverteilung noch mit $2/\pi$, dann erhalten wir den angenäherten Wert der äquivalenten Dipollänge für die lineare Antenne:

(25a) $$l = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\pi} \Lambda = 0{,}897\, \Lambda,$$

der nur um etwa 4,5 Proz. von dem genaueren abweicht. Innerhalb dieser Grenze von einigen Prozenten liegen überhaupt die Fehler, die man bei der Anwendung aller Rechnungen auf nicht quasistationäre Systeme begeht.

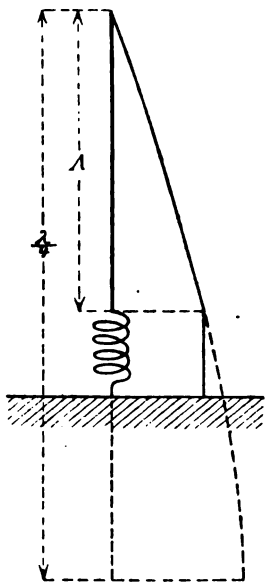


Fig. 7.

Der letzte angenäherte Rechnungsvorgang hat den Vorteil, daß man ihn auch auf lineare Antennen ausdehnen kann, deren Eigenwellenlänge durch Einschaltung von Selbstinduktion o. ä. künstlich vergrößert ist, Fig. 7. Der Mittelwert der Stromstärke längs der Antenne ist dann in einem willkürlichen Maßstabe gegeben durch

$$\frac{1}{\Lambda}\int_0^{\Lambda} \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) dx = \frac{\lambda}{2\pi\Lambda}\left(1 - \cos 2\pi \frac{\Lambda}{\lambda}\right),$$

während in der Selbstinduktion der Strom

$$\sin 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}$$

fließt, auf den sich die Rechnung bezieht. Die äquivalente Dipollänge wird demnach:

$$l = \frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}} \frac{1 - \cos 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}}{\sin 2\pi \frac{\Delta}{\lambda}}, \tag{26}$$

was für $\lambda = 4\Delta$ mit Gleichung (25a) übereinstimmt. Für Antennenlängen, die klein gegen ein Viertel der Wellenlänge sind, kann man die Funktionen in Reihen entwickeln und erhält, wenn man nur die ersten Glieder beibehält:

$$l = \frac{\Delta}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,\Delta. \tag{27}$$

Da der Strom dann geradlinig von der Antennenspitze aus bis unten hin zunimmt, die Ausstrahlung also halb so groß ist wie in Fig. 4, so hätte man das Resultat auch ohne weiteres finden können.

Die Formeln (24) und (27) geben die Grenzen an, zwischen denen die äquivalente Dipollänge bei den üblichen Ausführungen der Praxis liegt, sofern man gut strahlende Antennen benutzt und benachbarte Leiter im näheren Umkreise nicht vorhanden sind. Der Strahlungswiderstand wird daher nach Gleichung (18a) etwa innerhalb der Grenzen

$$S\omega^2 = (400 \text{ bis } 1600)\frac{\Delta^2}{\lambda^2} \text{ Ohm} \tag{28}$$

liegen, worin Δ allgemein die Antennenlänge bezeichnet. Für die Energieausstrahlung von *Sendeantennen* gelten natürlich genau dieselben Gesetze.

Sind in der Nähe der Antenne andere Leitergebilde vorvorhanden, in denen sich unter der Wirkung der Wellen Ströme ausbilden können, dann stören diese in ihrer Umgebung das Feld stark, besonders, wenn sie einigermaßen in Resonanz mit der auftreffenden Strahlung stehen. Der Strahlungswiderstand der Antenne kann dadurch unter Umständen auf ein sehr geringes Maß herabgemindert werden, was sowohl für die Sende- als für die Empfangsstation unvorteilhaft sein kann. Befindet

sich z. B. in der Nähe einer Sendeantenne ein geerdeter Draht von beträchtlicher Länge, ein eiserner Mast o. ä., dann werden in diesem Ströme induziert, die die entgegengesetzte Richtung wie die Antennenströme haben und die deren Fernwirkung daher zum großen Teile aufheben können.

Wir wollen untersuchen, bis auf welche Entfernungen der Einfluß eines sekundären Leiters im Strahlungsfelde bemerkbar ist, und stellen uns daher die Aufgabe, das Eigenfeld unseres Resonators mit der Feldstärke der primären Welle zu vergleichen.

Der Resonator befinde sich im Nullpunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems, sein Polabstand l weise nach der z-Richtung, und in der x-Richtung streiche ein Wellenzng über ihn fort, dessen elektrische Feldstärke ist

$$\mathfrak{E}_z = E \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) . \tag{29}$$

Im stationären Zustande nimmt er dann nach Gleichung (11) die periodisch wechselnde Ladung an

$$e = f \sin (\omega t - \gamma),$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$f = \frac{E l}{\sqrt{[L(\omega_0^2 - \omega^2)]^2 + [\omega (R + S\omega^2)]^2}}.$$

Das Eigenfeld dieses Resonators ist am stärksten in der $x-y$-Ebene, wo allein die z-Komponente der elektrischen Feldstärke vorhanden ist. Es ist nur vom Abstande r vom Nullpunkte abhängig, seine Größe ist nach Hertz[1])

$$\mathfrak{E}_z' = f l \frac{\omega^2}{c} \frac{\sqrt{1 - \varrho^2 + \varrho^4}}{\varrho^3} \sin \left\{ \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \gamma + \delta \right\} , \tag{30}$$

worin δ eine für uns unwesentliche Phase bedeutet, und das Verhältnis von Radiusvektor zu Wellenlänge dargestellt ist durch

$$\varrho = 2\pi \frac{r}{\lambda} . \tag{31}$$

Setzt man den Wert von f ein und formt den Ausdruck mit Hilfe von Gleichung (7a) noch etwas um, dann erhält man

1) H. Hertz, Wied. Ann. **36.** p. 14. 1889. Der Ausdruck ist hier etwas bequemer geschrieben.

das Amplitudenverhältnis von sekundärer und primärer Welle in der Äquatorialebene zu

$$(32) \qquad \varepsilon = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{1-\varrho^2+\varrho^4}}{\varrho^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{L\omega}{S\omega^2}\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\right]^2 + \left[1+\frac{R}{S\omega^2}\right]^2}}.$$

Man erkennt, *daß die Störung des ursprünglichen Feldes um so stärker ist, je näher die Resonatorperiode dem Isochronismus kommt,* sie befolgt das wohlbekannte Resonanzgesetz; *ferner ist sie um so größer, je geringer sowohl der Ohmsche Widerstand R, als auch der induktive $L\omega$ im Verhältnis zum Strahlungswiderstande $S\omega^2$ ist.* Ein Maximum erreicht die Störung bei Isochronismus und verschwindendem Ohmschen Widerstande, sie ist dann allein vom Verhältnis r/λ abhängig, erstreckt sich also um so weiter in den Raum hinein, je größer die Wellenlänge ist, ihr Wert ist in Fig. 8 abhängig von r/λ dargestellt. Für andere Resonanz-

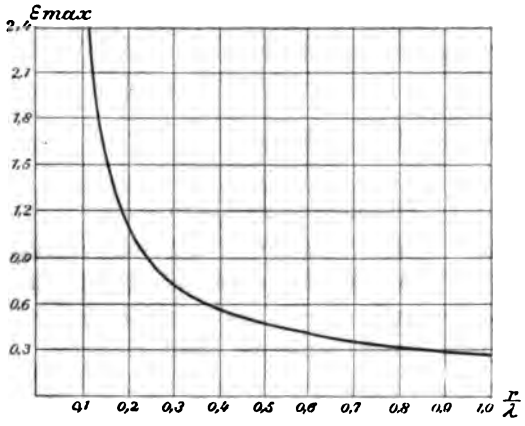


Fig. 8.

und Widerstandsverhältnisse braucht man diese Kurve nur mit dem letzten Faktor der Gleichung (32), der immer kleiner als 1 ist, zu multiplizieren.

Rechnet man den Störungsbereich so weit, daß an seiner Grenze nur noch eine Änderung der Feldstärken von 1 Proz. stattfindet, dann erhält man seinen Radius aus

$$\varepsilon = \frac{1}{100} = \frac{3}{2\varrho},$$

denn er ergibt sich so groß, daß man unter der Wurzel $1-\varrho^2$ gegen ϱ^4 vernachlässigen kann. Man findet so den Störungsradius zu

$$r_s = \frac{300}{4\pi}\lambda \cong 24\,\lambda, \tag{33}$$

so daß sich die Rückwirkung des Resonators auf das Feld bis auf eine größte Strecke von etwa 24 Wellenlängen bemerkbar machen kann. Ist der Resonator nicht widerstandslos, dann ist der Störungsradius kleiner, bei stärkster Energieabsorption aus dem Felde — wenn also Ohmscher Widerstand und Strahlungswiderstand einander gleich werden — beträgt er immerhin 12 Wellenlängen.

In Fig. 9 sind die elektrischen Kraftlinien in der Meridian- und Einfallsebene und in Fig. 10 die magnetischen Kraft-

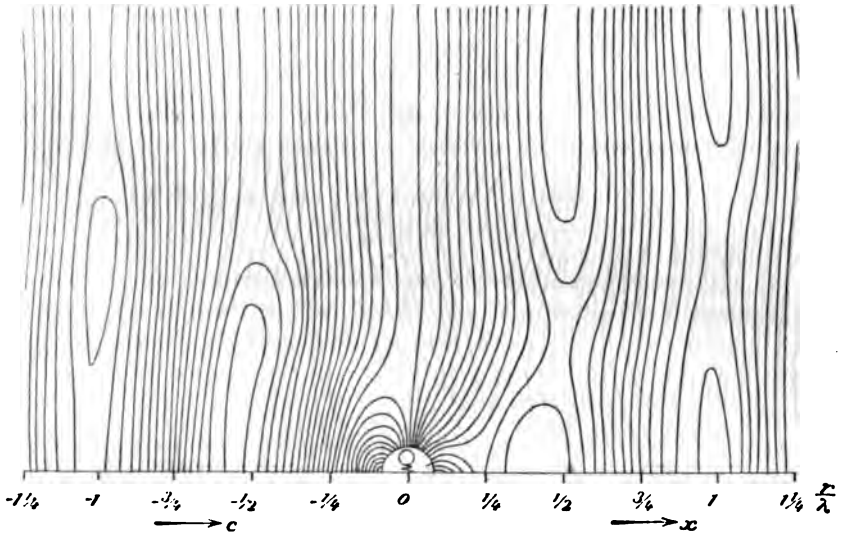


Fig. 9.

linien in der Äquatorialebene dargestellt, und zwar für den Fall, daß der Empfänger bei Resonanz die größtmögliche Energie aus dem Felde absorbiert, daß seine Phasenverzögerung gegen die primäre Schwingung also nach Gleichung (12) 90° beträgt.

Innerhalb des Störungsbereiches eines Empfängers interferieren die ankommenden und ausgesandten Wellen miteinander, was man an den letzten Figuren klar erkennen kann. Als Resultat dieser Interferenzen kommt einmal eine Energiewanderung aus dem Strahlungsfelde auf den Resonator hin zustande und außerdem eine Zerstreuung einer gewissen

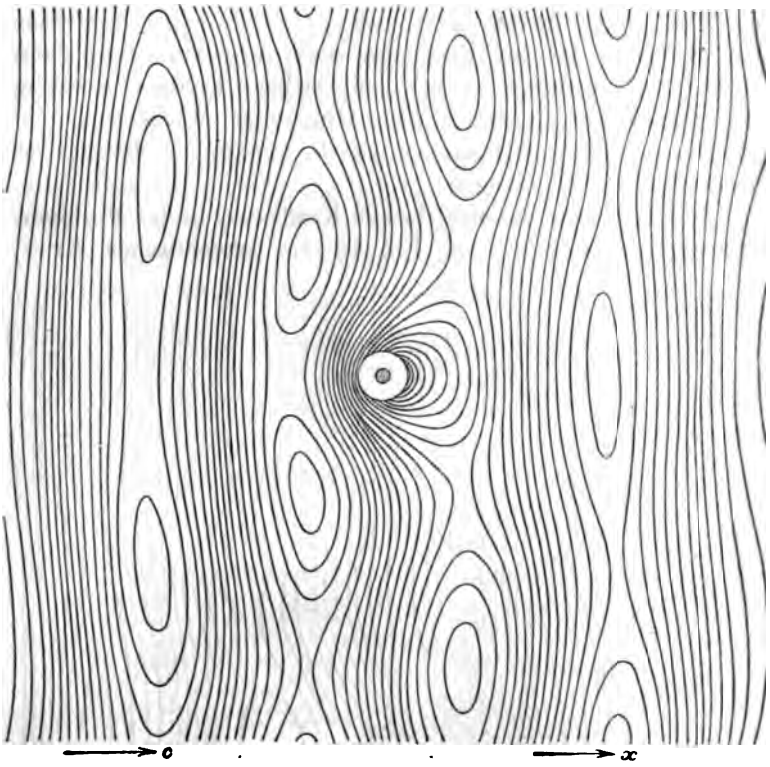


Fig. 10.

Energiemenge nach allen Richtungen, besonders entgegen der auffallenden Strahlung, also eine diffuse Reflexion. Hinter dem Empfänger tritt auf kurze Strecken hin eine Art Schattenbildung auf, da sich die primären und sekundären Feldstärken hier entgegenwirken, während sie sich in gemeinsamer Richtung fortpflanzen. Die Stärke der Schattenwirkung ist natürlich vom Widerstand und Resonanzverhältnis des Empfängers abhängig,

sie verschwindet schon im Abstande von wenigen Wellenlängen vom Resonator.[1])

Es hat Interesse, die vom Resonator nutzbar absorbierte Energie zu vergleichen mit dem Energiestrom, der durch eine bestimmte Fläche im ungestörten Strahlungsfelde wandert, also vielleicht in weiteren Abständen vom Empfänger. Wir wollen die Größe derjenigen Fläche berechnen, durch die eine gleichgroße Energiemenge fließt, wie sie vom Resonator aus dem Felde aufgesaugt wird.

Nach dem Poyntingschen Satze ist der Energiestrom unserer primären Welle, die in der Nähe des Resonators als homogen betrachtet werden kann, in elektromagnetischen Einheiten pro Quadratzentimeter:

$$\frac{1}{4\pi}[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] = \frac{1}{4\pi c} E^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{c}\right),$$

oder im zeitlichen Mittel:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{8\pi c} E^2,$$

während die nutzbar absorbierte Energie durch Gleichung (14) gegeben ist. Beide Leistungen werden gleich für eine Fläche

$$F = \frac{Q}{\mathfrak{S}} = 4\pi c \frac{R I^2}{\left[\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right) L\omega\right]^2 + \left[R + S\omega^2\right]^2}.$$

Formt man diesen Ausdruck noch mit Hilfe der Beziehung (18) um, dann erhält man für die Fläche, durch die die Resonatorenergie hindurchgewandert ist, den Wert

$$(34) \qquad F = \frac{3}{2\pi}\lambda^2 \frac{R/S\omega^2}{\left[\frac{L\omega}{S\omega^2}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\right]^2 + \left[1 + \frac{R}{S\omega^2}\right]^2}.$$

Man sieht hier ganz klar, daß bei sonst gleichen Widerstands- und Resonanzverhältnissen im Empfänger um so mehr Energie aus dem Strahlungsfelde entzogen werden kann, je größer das Quadrat der Wellenlänge ist, was natürlich mit den früheren Überlegungen übereinstimmt. Die absolute Höhe der Antenne oder die Dipollänge ist wieder herausgefallen und demnach ohne Einfluß auf die absorbierte Energiemenge. Gleicht man auf Widerstand und Resonanz ab, dann wird der letzte Bruch

1) Vgl. hierzu M. Planck, Wied. Ann. 57. p. 12. 1896.

in Gleichung (34) gleich $^1/_4$ und man erhält als größtmöglichen Radius der kreisförmigen Absorptionsfläche

$$r_a = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda = 0{,}1946\,\lambda. \tag{34a}$$

Dieser Absorptionsradius von etwa $^1/_5$ Wellenlänge ist natürlich bedeutend kleiner als der Störungsradius r_s, da die Absorption ja erst durch die Interferenzen der Wellen innerhalb des Störungsgebietes zustande kommt.

In Fig. 11 ist die Absorptionsfläche im Vergleich zu einer empfangenden Antenne dargestellt, die auf eine Viertelwellenlänge abgestimmt ist. Man übersieht, wie ungeheuer wenig Energie im Verhältnis zur ganzen vorhandenen von einem einzelnen Resonator aus dem Strahlungsfelde aufgesaugt werden kann, noch dazu nur mit einem Wirkungsgrade, der 50 Proz. niemals überschreiten kann, da im günstigsten Falle eine gleiche Energiemenge wie die absorbierte nutzlos zerstreut wird. Der Gedanke an die Möglichkeit einer rationellen Energieübertragung auf drahtlosem Wege erscheint nach diesen Rechnungen als völlig aussichtslos.

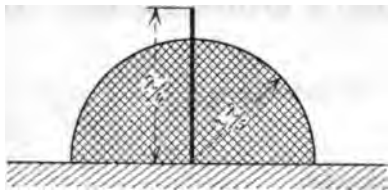


Fig. 11.

Göttingen, im Dezember 1907.

(Eingegangen 22. Dezember 1907.)

3. *Über die sogenannten elektrolytischen Stromunterbrecher;* von *P. Ludewig.*

(Auszug aus der gleichlautenden Göttinger Dissertation des Verfassers.)

(Hierzu Taf. III u. IV.)

I. Einleitung.

Die Wirkungsweise der sogenannten elektrolytischen Stromunterbrecher ist, trotz zahlreicher Arbeiten über den Gegenstand[1]), bisher noch nicht abschließend erklärt. Namentlich ist auch noch keine endgültige Entscheidung zwischen den verschiedenen Theorien getroffen, die man aufgestellt hat, um die Einseitigkeit des Wehneltunterbrechers zu erklären.

Wehnelt[2]) selbst nahm anfangs an, daß an der Unterbrecherstelle eine Kapazität vorhanden sei, die zusammen mit der notwendigerweise im Kreise liegenden Selbstinduktion zu Schwingungen (d. h. den beobachteten Unterbrechungen) Anlaß gäbe. Später gab er diese Vorstellung auf zugunsten einer rein mechanischen Erklärung.[3]) Das durch Elektrolyse und Erhitzung durch den Stromdurchgang an der Anode gebildete Gas solle plötzlich den Strom abschließen, die Gasblase durch einen durch die Selbstinduktion bedingten Öffnungsfunken beseitigt werden und so der Vorgang periodisch verlaufen.

Simon[4]) hat eine Theorie des Wehneltunterbrechers gegeben. Er nahm an, daß die den Strom abschließende Gasblase allein durch die Joulewärme erzeugt werde, die an der Einschnürungsstelle des Stromes besteht. Dieser Grundidee folgend kam er zur Konstruktion des Lochunterbrechers[5]), in-

1) Eine Zusammenstellung der Literatur und eine Übersicht über die wesentlichsten Ergebnisse findet sich in der Dissertation.

2) A. Wehnelt, Wied. Ann. **68.** p. 233. 1899 und Verhandl. d. Deutsch. Phys. Gesellsch. 1899. p. 53.

3) A. Wehnelt, Wied. Ann. **68.** p. 233. 1899.

4) H. Th. Simon, Nachr. d. k. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen Heft 2. p. 171. 1899 und Wied. Ann. **68.** p. 272. 1899.

5) H. Th. Simon, Wied. Ann. **68.** p. 860. 1899; Elektrotechn. Zeitschr. Heft 25. p. 440. 1899.

dem er die Stromeinschnürung an der Platinspitze durch eine Stromeinschnürung in der Durchbohrung eines Diaphragmas ersetzte. Seine Theorie führte zu der Formel[1])

$$(3)\quad C_1 = \frac{0{,}24\,E^2}{w_u}\left[T_1 - \frac{2\,L}{w_u}\left(1 - e^{-\frac{w_u}{L}T_1}\right) + \frac{L}{2\,w_u}\left(1 - e^{-\frac{2w_u}{L}T_1}\right)\right].$$

Darin ist:

C_1 = Konstante,
E = die Betriebsspannung,
T_1 = die Zeit des Stromanstieges,
L = im Kreise vorhandene Selbstinduktion,
w_u = Widerstand der Einschnürungsstelle.

Die Formel war abgeleitet unter der Voraussetzung, daß allein an der Einschnürungsstelle Ohmscher Widerstand im Kreise vorhanden sei.

Simon vernachlässigte in den Klammerausdrücken das zweite Glied gegenüber dem ersten und erhielt so nach kurzer Umformung die Formel

$$T_1 = \frac{3}{2}\frac{L}{w_u} + C\frac{w_u}{E^2}\quad\left(\text{wenn } \frac{C_1}{0{,}24} = C\right).$$

Klupathy[2]) ist dann auf Grund rechnerischer Überlegungen mit einer durchaus anderen Erklärung hervorgetreten. Seiner Meinung nach ist die Joulewärme nicht imstande, bei dem Stiftunterbrecher in den kurzen Zeiten eine Dampfblase zu bilden. Die dazu nötige Wärme soll ihren Grund in dem an der Übergangsstelle Platin–Schwefelsäure auftretenden Peltiereffekt haben. Für den Lochunterbrecher läßt er dagegen die Simonsche Theorie bestehen.

Die Einseitigkeit des Stiftunterbrechers hat verschiedene Erklärungen gefunden:

Simon[3]) glaubt die Erscheinung durch eine sekundäre Wirkung des im Falle der negativen aktiven Elektrode elektrolytisch abgeschiedenen Wasserstoffs erklären zu können.

---

1) Die Numerierung der Formeln, Tabellen und Figuren aus der Dissertation ist beibehalten.

2) E. Klupathy, Ann. d. Phys. **9**. p. 147. 1902.

3) H. Th. Simon, Wied. Ann. **68**. p. 272. 1899.

Stark und Cassuto[1]) fanden, daß ein Lichtbogen zwischen Metall und Flüssigkeit nur bestehen könne, wenn das Metall Kathode war. Sie nehmen an, daß beim Stiftunterbrecher, wenn der Platinstift Kathode ist, ein Lichtbogen einsetzt, der den Platinstift zerstört und so den Unterbrechungsvorgang unmöglich macht.

Klupathy endlich zieht auch hier den Peltiereffekt heran. Wenn der Platinstift Kathode ist, wird nach der Erscheinung des Peltiereffektes nicht Erwärmung, sondern Abkühlung eintreten und daher der Unterbrechervorgang aussetzen.

II. Methode der Untersuchung.

Wie die vorstehend gegebene Übersicht zeigt, ist die Wirkungsweise der elektrolytischen Unterbrecher weder qualitativ noch quantitativ in allen Punkten aufgeklärt. Ich habe daher auf Anregung von Hrn. Prof. Simon unternommen, die Vorgänge messend zu verfolgen, die oben erwähnten Theorien umfassend zu prüfen und für die strittigen Fragen eine entscheidende Antwort zu finden.

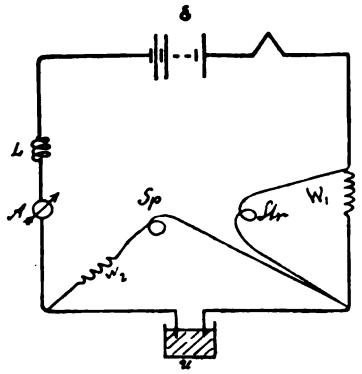


Fig. 6.

Die Verwendung des inzwischen zu hoher Vollkommenheit ausgebildeten Oszillographen gestattete, weit zuverlässigere und auch quantitativ allen Wünschen genügende Ergebnisse zu erzielen. Demnach habe ich folgende Versuchsanordnung benutzt. (Vgl. Schaltungsschema Fig. 6).

1) J. Stark u. L. Cassuto, Physik. Zeitschr. 5. p. 264. 1904.

In der Figur bedeutet:

E = Betriebsspannung, eine Akkumulatorenbatterie von 60—150 Vol
A = Hitzdrahtamperemeter,
W_1 = ein induktionsfreier Abzweigwiderstand, über dem die Stron schleife des Oszillographen abgezweigt wurde,
W_2 = ein vor die Spannungsschleife des Oszillographen geschaltet großer Regulierwiderstand,
L = eine Selbstinduktionsspule,
Sp = Spannungsschleife des Oszillographen,
Str = Stromschleife des Oszillographen.

Verwendet wurde ein Hochfrequenzoszillograph vo Siemens & Halske.

Um die Unterbrechungszeit in einfacher Weise jedesm mit zu registrieren, diente folgende Vo richtung: Ein von einem Uhrwerk g triebenes Speichenrad aus Aluminium vo der Form der Fig. 7 wurde so in de Strahlengang der Oszillographenbogenlam gestellt, daß die Speichen jedesmal f einen Moment das Licht von den Oszill graphenspiegeln abblendeten.

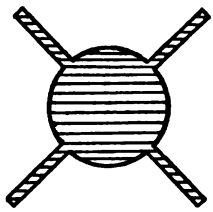


Fig. 7.

III. Lochunterbrecher.

a) Druck und Temperatur des Elektrolyten werden nicht verändert.

1. Versuchsanordnung.

Von den beiden Formen, in denen der elektrolytisc Unterbrecher ausgeführt wird, bietet der Lochunterbrecher d einfacheren Verhältnisse, und er wur zuerst untersucht.

Die von mir benutzte Form des Unte brechers zeigt Fig. 8.

Die beiden Hälften a und b bildet ursprünglich einen Glastrog, der zu mein Versuchen durchgeschnitten war. Die d durch entstandenen Ränder waren gut a geschliffen. Auf die Seiten $c\,d\,e\,f$ und $g\,h$ wurden zwei Spiegelglasscheiben aufgekitt in die je ein Loch von 40 mm Durchmess

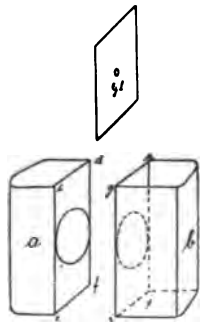


Fig. 8.

gebohrt war. Zwischen die beiden so konstruierten Gefäße wurde dann mit Gummidichtung eine besondere Glasplatte *Gl* gelegt, in die ein Loch von der gerade nötigen Größe gebohrt war. Die so getroffene Anordnung gestattete es, die Lochgröße schnell zu wechseln. Die Ränder des Loches in dem benutzten Glasblättchen, das eine Dicke von 0,8 mm hatte, nutzten sich für die Dauer der später mitgeteilten Versuchsreihen nicht ab. Der Lochunterbrecher erhielt gerade diese Form, da er für spätere Versuche so am besten zu handhaben war.

2. Theoretische Grundlagen.

Formel (3) ist für den Fall abgeleitet, daß nur an der Unterbrechungsstelle Ohmscher Widerstand im Kreise vorhanden sei.

Bezeichnet man dagegen mit

w_u = den Unterbrecherwiderstand allein,
w_k = den gesamten Widerstand des Kreises mit Einschluß des Unterbrechers,
$w = w_k - w_u$ = den Widerstand des Kreises ohne den Unterbrecher,

so kommt man zu der Formel:

$$(8)\quad C_1 = \frac{0{,}24\,E^2 w_u}{w_k^2}\left[T_1 - \frac{2L}{w_k}\left(1 - e^{-\frac{w_k}{L}T_1}\right) + \frac{L}{2w_k}\left(1 - e^{-\frac{2w_k}{L}T_1}\right)\right].$$

Vernachlässigt man

$$e^{-\frac{w_k}{L}T_1}$$

gegenüber 1, so erhält man

$$(9)\quad C_1'' = \frac{0{,}24\,E^2 w_u}{w_k^2}\left(T_1 - \frac{3}{2}\frac{L}{w_k}\right).$$

3. Messung der vorkommenden Größen.

Die Größen der rechten Seite der Formel (9) lassen sich E am Voltmeter, $w_k - w_u = w$ durch Widerstandsmessung, L durch Selbstinduktionsmessung mit Brücke und Variometer und T an den Zeitmarken der oszillographischen Aufnahmen messen.

w_u wurde in der Brücke mit Wechselstrom und Telephon gemessen unter Verwendung platinierter Platinelektroden.

4. Versuchsergebnisse.[1])

Die Tabellen 1 und 2 wurden dadurch erhalten, daß sowohl die Betriebsspannung, als auch die Selbstinduktion und damit der Widerstand meßbar geändert wurden. Trägt man die zu einer Unterbrechung nötigen Grammkalorien C_1 als Funktion der Unterbrechungszahl n auf, so erhält man die in den Fig. 11 und 12 gezeichneten Kurven. (Vgl. Tab. 1 u. 2.)

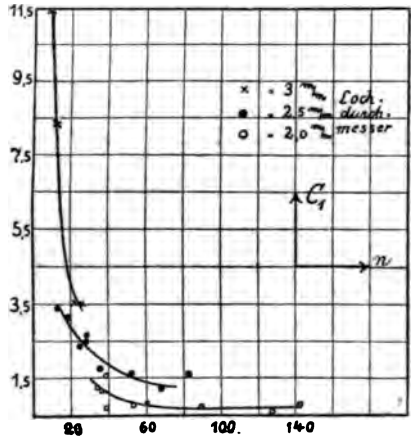


Fig. 11.

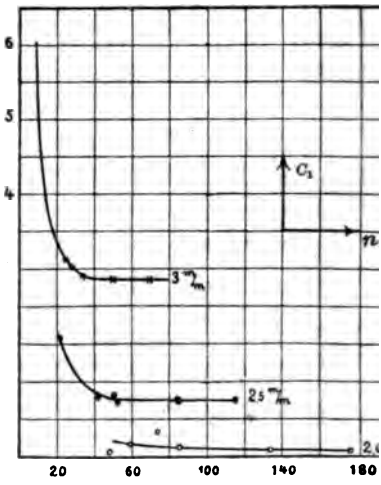


Fig. 12.

Sie zeigen, *daß die Energie C_1 bei genügend hoher Unterbrechungszahl tatsächlich konstant ist*, daß aber bei Unterbrechungszahlen, die unter ca. 100 pro Sek. liegen, eine Abweichung von der Simonschen Annahme eintritt. Je geringer in diesem Bereiche der langsamen Unterbrechungen die Zahl derselben ist, desto mehr Energie ist nötig. Diese Erscheinung zeigte sich bei allen drei Lochgrößen in derselben Weise. Die Erklärung dieser Tatsache ist in der eintretenden Wärmeableitung zu suchen: der Betrag der abgeleiteten Wärme muß außer der Unterbrechungswärme aufgewendet werden. Daß diese Annahme das Richtige trifft, zeigt sich im folgenden: Wenn man die Temperatur des Elektrolyten erhöht, so muß der Einfluß der Wärmeableitung immer mehr verschwinden. Fig. 13

1) Sämtliche Beobachtungstabellen sind am Schlusse in Abschnitt VI zusammengestellt.

(vgl. Tab. 8) enthält die Resultate von Versuchen, die nach dieser Richtung hin unternommen sind. Es ist darin zwar nicht die ganze Kurve bei jeder Temperatur aufgetragen, sondern nur immer ein Wertepaar für jede Temperatur in solchem Intervall, daß der Einfluß der Wärmeleitung deutlich zutage tritt. Die zusammengehörigen Wertepaare sind durch gerade Verbindungslinien als zusammengehörig gekennzeichnet. Man sieht, daß die Kurven mit zunehmender Temperatur mehr und mehr die Abhängigkeit der Konstanten C_1 von der Unterbrechungszahl verlieren. Bei 90° ist sie schließlich ganz verschwunden.

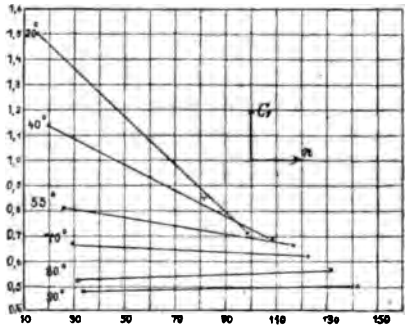


Fig. 13.

b) Temperatur und Druck werden verändert.

Bisher wurde stets dafür gesorgt, daß Temperatur und Druck des Elektrolyten bei allen Versuchen dieselben waren. Im folgenden wird die Abhängigkeit des Unterbrechungsvorganges beim Lochunterbrecher von Druck und Temperatur untersucht.

1. Theoretische Grundlagen.

Es gilt C_1 als Funktion von Temperatur und Druck darzustellen. Bei einem bestimmten Lochunterbrecher tritt die periodische Unterbrechung des Stromes immer dann ein, wenn ein bestimmtes Volumen v Wasserdampf gebildet ist, dessen Größe von der Gestalt des Loches abhängt. (Vgl. Fig. 15.)

Fig. 15.

Die zu einer Unterbrechung nötigen Grammkalorien haben die beiden folgenden Aufgaben zu erfüllen:

I. muß die in v enthaltene Flüssigkeitsmenge bis zum Siedepunkte erhitzt werden;

II. muß dies Volumen mit Dampf erfüllt werden.

I. Die Anzahl von Grammkalorien, welche die in v enthaltene Flüssigkeitsmenge zum Siedepunkt erhitzt, bestimmt sich zu

$$q_1 = v(T_s - T_\gamma) \cdot c, \tag{17}$$

wenn wir bezeichnen mit

T_s die absolute Siedetemperatur der Flüssigkeit,

T_γ die nicht näher bekannte absolute Temperatur, die bei dauerndem Unterbrechungsvorgang jedesmal beim Wiedereinsetzen des Stromes an der Unterbrechungsstelle v herrscht. Es ist durchaus nicht selbstverständlich, daß dies die mittels Thermometer gemessene Temperatur der gesamten Flüssigkeit ist. In der Tat zeigt sich bei den Versuchen, daß T_γ größer anzunehmen ist als diese. Es wird sich eben bei Dauerbetrieb in der Nähe der Unterbrechungsstelle höhere Temperatur einstellen,

c die spezifische Wärme der Flüssigkeit. Dabei ist die Annahme gemacht, daß die spezifische Wärme der Flüssigkeit bis zum Siedepunkt konstant ist.

II. Ist jetzt das Volumen v mit Flüssigkeit von Siedetemperatur angefüllt, so muß ferner noch Energie verbraucht werden, um die Flüssigkeit in Dampf zu verwandeln. Es kommt also die Verdampfungswärme hinzu; und zwar ist das hier die sogenannte „ganze Verdampfungswärme", in der auch noch die Energie enthalten ist, die nötig ist, damit der entstehende Wasserdampf den äußeren Druck zu überwinden imstande ist (im Gegensatz zu der „reinen Verdampfungswärme" die nur die Umwandlung des Aggregatzustandes herbeiführt). Es wird nicht die gesamte in v befindliche Flüssigkeitsmenge verdampft, sondern nur so viel, daß der daraus entstehende Wasserdampf das Volum v erfüllt und dadurch den Strom unterbricht.

$$q_{II} = \frac{9 \cdot 0{,}089}{1000} \frac{p_t v_t^{(p_t)}}{p_0} \frac{273}{273 + t} (734 - 0{,}7\,T). \tag{25}$$

Es ergibt sich hiernach, wenn man $c = 1$ setzt, C_1 als Funktion von Druck und Temperatur wie folgt:

$$\left\{ \begin{aligned} C_1 &= q_I + q_{II} \\ &= v_t^{(p_t)} (T_s - T_\gamma) + v_t^{(p_t)} \frac{9 \cdot 0{,}089}{1000} \frac{p_t}{p_0} \frac{273}{T} (734 - 0{,}7\,T). \end{aligned} \right. \tag{26}$$

2. Versuchsanordnung.

Die Versuchsreihen, die die Abhängigkeit des Lochunterbrechers von der Temperatur in Tabb. 5—8 zeigen, wurden folgendermaßen erhalten. Ein größerer Topf mit Paraffinöl wurde langsam durch eine darunterstehende Gasflamme erwärmt. In diesem Bade, das gut durchgerührt wurde, um gleichmäßige Temperatur zu erhalten, stand der Unterbrecher. Bei der jeweils beabsichtigten Temperatur wurde die oszillographische Aufnahme gemacht. Die Abhängigkeit vom Druck wurde mit dem Hilfsapparat (Fig. 16) aufgenommen.

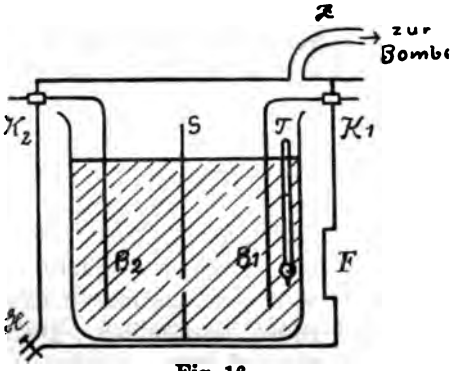


Fig. 16.

In einem festen Metallgefäß stand der Unterbrecher von dem bekannten Typus. B_1 und B_2 sind die beiden Bleielektroden, S die Scheidewand, in der sich die Einschnürungsstelle befindet. Die Zuleitungen zu den beiden Bleielektroden sind isoliert durch den Metalltopf hindurchgeführt und endigen in den Klemmen K_1 und K_2. Durch das starke Glasfenster F war es möglich, das Thermometer T abzulesen und so die Temperatur konstant zu halten. Die Zuleitung Z, die aus einem dünnen Messingrohr bestand, führte zu einer mit komprimierter Luft von 10 Atm. gefüllten Bombe, an der sich ein Regulierventil mit Manometer befand. Dieses ermöglichte es, den jedesmal gewünschten Druck einzustellen. Sollte mit Unterdruck gearbeitet werden, so wurde diese Zuleitung mit einer Wasserstrahlpumpe und einem Quecksilbermanometer verbunden. Der Hahn H diente dazu, die Drucke außen und innen sich wieder ausgleichen zu lassen.

3. Versuchsergebnisse.

Die mit veränderter Temperatur und verändertem Druck aufgenommenen Versuchsreihen sind in den Tabb. 5—8 enthalten. Man sieht:

Die Unterbrechungszahl wird bei Erhöhung der Temperatur nur unwesentlich erhöht. Dagegen sinkt die zu einer Unterbrechung nötige Wärmemenge, wie ja zu erwarten ist, mit zunehmender Temperatur sehr stark (vgl. Fig. 17 u. Tab. 8).

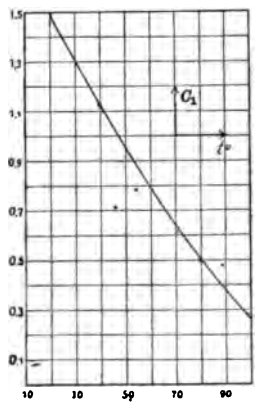


Fig. 17.

Daß die Zahl der Unterbrechungen so wenig beeinflußt wird, erscheint im ersten Augenblick auffällig. Wenn man jedoch bedenkt, daß die Zahl der Unterbrechungen einmal von der für die Unterbrechung erforderlichen Energiemenge C_1, und gleichzeitig von der durch die Zeitkonstante L/w_k definierten Stromanstiegkurve bestimmt wird wird jener geringe Einfluß der Temperatur verständlich. Denn die Temperaturerhöhung verringert offenbar C_1 vergrößert jedoch die Zeitkonstante L/w_k (w_k wird kleiner), d. h. beide Einflüsse arbeiten sich entgegen. Will man demnach aus dem Vergleich der gemessenen Unterbrechungszahlen exakte Schlüsse ziehen, so geht das nur, wenn in den verglichenen Fällen die Zeitkonstante L/w_k dieselbe ist, der Strom also nach derselben Kurve ansteigt.

In der Tab. 8 sind neben C_1 auch die Größen von C_1' gegeben, vgl. Formel (9). Man sieht, wenn man sie mit den aus der vollen Formel für C_1 berechneten Größen vergleicht, daß man mit der vereinfachten Formel zu recht abweichenden Resultaten kommt. Die Abhängigkeit des w_k von der Temperatur wurde von 20°—100° mit Wechselstrom und Telephon in der Brückenschaltung bestimmt (vgl. Fig. 18).

Die aus dieser Kurve entnommenen Werte sind der Berechnung der C_1 zugrunde gelegt. Bis 90° findet ein regelmäßiger Unterbrechervorgang statt, der erst bei 100° unregelmäßig wird.

Die Tabb. 5—7 zeigen die Abhängigkeit des Unterbrechervorganges vom Druck. Fig. 20 gibt die Kurven, welche die

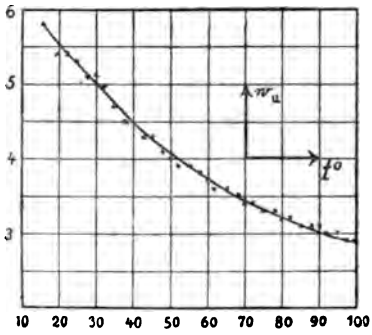


Fig. 18.

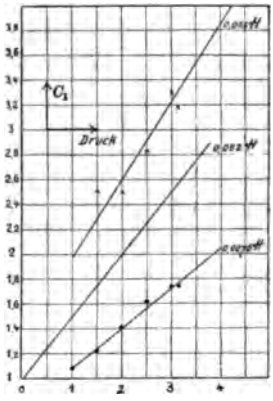


Fig. 20.

zu einer Unterbrechung nötige Energiemenge als Funktion des Druckes darstellen.

Fig. 21 zeigt die oben (p. 472) gefundene charakteristische Abhängigkeit des C_1 von der Unterbrechungszahl, wie sie sich

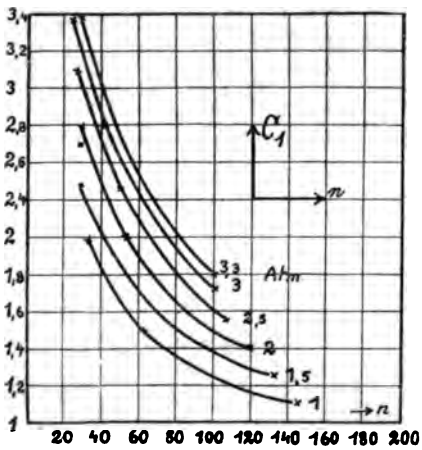


Fig. 21.

durch den Einfluß der Wärmeableitung erklärt. Die Kurven in Fig. 20 sind also eine Übereinanderlagerung der beiden

Einflüsse: Druck- und Wärmeableitung. Doch sind die mi 0,0076 Henry Selbstinduktion aufgenommenen Kurven mit de Unterbrechungszahlen von rund 140 pro Sek. genügend wei außerhalb des Bereiches, in dem die Wärmeableitung ein Rolle spielt. Sie geben also annähernd die Abhängigkeit vo Druck allein. Diese Versuchsreihe ist daher auch zum spätere Vergleich mit der Theorie benutzt.

4. Vergleich mit der Theorie.

Die Formel (26)

$$C_1 = q_I + q_{II} = v_t^{(p_t)}(T_e - T_1) + v_t^{(p_t)} \frac{9 \cdot 0{,}089}{1000} \frac{p_t}{p_0} \frac{273}{T}(734 - 0{,}7\,T$$

vereinfacht sich im Hinblick auf die Versuchsergebnisse seh wesentlich. Es zeigt sich nämlich, daß das zweite Glied gegen über dem ersten vollkommen vernachlässigt werden kann Dasselbe stellt die Verdampfungswärme des zu verdampfende Flüssigkeitsvolumens dar. *Das letztere ist gegenüber der ge samten in der Einschnürungsstelle zu erwärmenden Flüssigkei so klein, daß jene Verdampfungswärme gegen die zur Erreichun des Siedepunktes benutzte Wärme verschwindet.* Um das zu be weisen, seien die Daten von Nr. 356, Tab. 5, herangezoge Bei 3 Atm. Druck ist dort

$$T_e = 417{,}5.$$

T_1 sei vorläufig mit der Zimmertemperatur identisch an genommen.

$$T_1 = 293.$$

Dann wird

$$(24)\begin{cases} C_1 = v_t^{(p_t)}\,124{,}5 + v_t^{(p_t)}\,9.89.10^{-6}.3\,\frac{373}{417{,}5}(734 - 60{,}7 \cdot 417{,}5 \\ \qquad = v_t^{(p_t)}(124{,}5 + 0{,}695). \end{cases}$$

Daraus ergibt sich, daß der Fehler, den wir bei Vernach lässigung des zweiten Gliedes machen, etwa 0,5 Proz. ist. Nu bei der einen Nummer 229 aus Tab. 8, wo die Flüssigkeits temperatur 100° C. ist, das erste Glied also relativ klein wird erhält man einen Fehler von 3,7 Proz. In allen andere Fällen ist er etwa 1—0,5 Proz.

Mit Vernachlässigung dieses zweiten Gliedes ergibt sich als Grundformel

(28) $$C_1 = v_t^{(p_t)}(t_s - t_\tau),$$

wo jetzt mit t Celsiusgrade bezeichnet seien oder da $v_t^{(p_t)}$ für einen bestimmten Lochunterbrecher konstant ist:

(29) $$C_1 = A(t_s - t_\tau),$$

wenn A eine Konstante bedeutet. Diese Gleichung stellt das Gesetz dar, nach dem sich die zu einer Unterbrechung nötige Grammkalorienmenge mit Druck und Temperatur ändert. Sie zeigt, daß das C_1 im Grunde nur von der Siedetemperatur abhängt, die in jedem Falle für die Flüssigkeit gegeben ist. Konstruiert man nach diesem Gesetz die Kurven der Abhängigkeit des C_1 von Temperatur und Druck, so ergibt ein Vergleich mit den Messungen ein Urteil über die Richtigkeit der gemachten Annahmen. Nehmen wir den Fall der Druckänderung mit

$$t_\tau = 20^0 \text{ also } \frac{C_1}{A} = (t_s - 20),$$

so findet man unter Berücksichtigung der Siedepunkte der Schwefelsäurelösung bei den verschiedenen Drucken die Tab. 9.

Tabelle 9.

$\frac{C_1}{A} = t_\tau - 20$	Druck in Atm.
88	1
110,2	2
124,5	3
135,6	4
144,5	5
152,5	6

Fig. 22 stellt diese Abhängigkeit des C_1 / A vom Druck graphisch dar.

Für den Fall der Temperaturänderung bei kon-

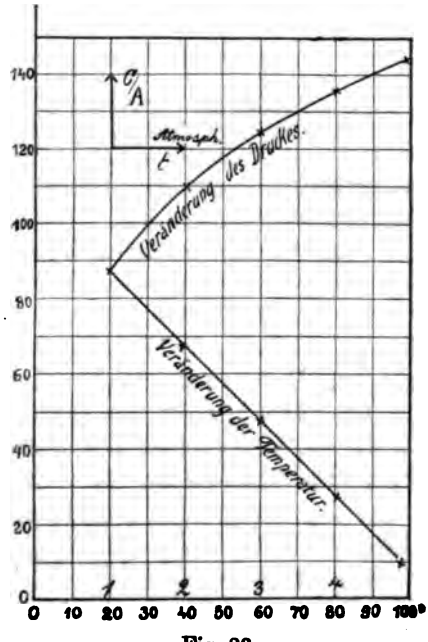


Fig. 22.

stantem Druck ($p = 1$ Atm.) erhält man die Tab. 10 und damit die Kurve in Fig. 22. Mit diesen Kurven müssen die aus den Versuchsreihen entnommenen, analogen Kurven Ähnlichkeit haben, da C_1/A direkt dem C_1 proportional ist. Die aus den Versuchen ermittelten Kurven sind in Fig. 23 gegeben. Sie haben einen völlig identischen Verlauf und bestätigen somit das gefundene Gesetz. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die aus den Messungen erhaltenen Kurven für Druck- und Temperaturänderung mit verschiedenen Lochgrößen gemacht wurden.

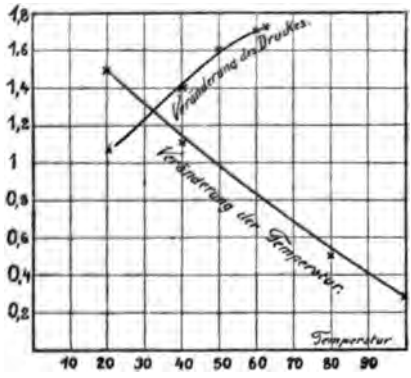


Fig. 23.

Tabelle 10.

$\frac{C_1}{A}$	$t_?$
88	20
68	40
48	60
28	80
8	100

Die Gleichung

$$C_1 = A(t_s - t_?)$$

ermöglicht es, aus den Versuchen Nr. 345—349, Tab. 6, die beiden Konstanten A und $t_?$ zu ermitteln, von denen die erste das zur Stromsperrung nötige Volumen des Wasserdampfes ist und $t_?$ die direkt am Loch jedesmal beim Beginn des Stromanstieges herrschende Temperatur. Diese wird vermutlich in allen Versuchen dieselbe sein, bei denen unter sonst gleichen Umständen gleiche effektive Stromstärken bestehen. In Nr. 345—349 ist das ziemlich weitgehend erfüllt, so daß in diesen 5 Versuchen $t_? = \text{konst.} = B$ gesetzt werden kann. Nach der Methode der kleinsten Quadrate findet man

$$(30) \qquad \begin{cases} A = 0{,}02042 \text{ cm}^3, \\ B = 58{,}8^0. \end{cases}$$

Es ergibt sich somit eine Anfangstemperatur von 58,8°, während die mittels Thermometer gemessene Flüssigkeitstemperatur

36° C. war. Die Flüssigkeit in der Nähe des Loches kühlt sich also nicht jedesmal wieder auf die übrige Flüssigkeitstemperatur ab, sondern es stellt sich eine Mitteltemperatur ein. Der notwendige Schluß hieraus ist der, daß beim Schließen des Stromes die erste Unterbrechung mehr Energie nötig haben muß, als die folgenden. Das zeigte sich in der Tat bei entsprechenden Versuchen bestätigt (vgl. Taf. III, Fig. 24).

Das Volumen A des zur Unterbrechung gebildeten Wasserdampfes ergibt sich zu

$$0{,}02042 \text{ cm}^3.$$

Die Versuche wurden mit einem Lochunterbrecher ausgeführt, der zwei Löcher besaß von der Größe $r = 1{,}3$ mm (r = Radius). Nimmt man an, daß eine volle Kugel von dem Radius $r = 1{,}3$ mm mit Dampf erfüllt wird, so berechnet sich $A = 0{,}018396$ cm^3, was mit dem oben gefundenen Werte recht gut übereinstimmt.

IV. Der Stiftunterbrecher.

1. Vergleich der Unterbrechungszeiten beider Unterbrechertypen.

Die Versuchsanordnung blieb bei diesen Untersuchungen im wesentlichen dieselbe.

Aus der von Simon aufgestellten Theorie der elektrolytischen Unterbrecher folgt, daß beide Unterbrecher unter sonst gleichen Bedingungen gleiche Unterbrechungszahlen liefern müßten. Unter gleichen Bedingungen heißt hier: gleiche Betriebsspannung, gleiche Selbstinduktion, gleicher Vorschaltwiderstand und gleicher Widerstand der Einschnürungsstelle. In letzter Beziehung ist folgendes zu bemerken. Beim Lochunterbrecher liegen auf beiden Seiten der Einschnürungsstelle ganz symmetrische Verhältnisse vor, während bei Verwendung einer „aktiven Elektrode" eine gewisse Einseitigkeit der Anordnung vorhanden ist. Da indessen der wesentliche Widerstand stets an der engsten Stelle liegt und bei der gewählten Anordnung die Widerstände der übrigen Flüssigkeitsteile verschwinden, so folgt, daß man gleiche Unterbrechungsbedingungen dann hat, wenn der Querschnitt der Einschnürungsstelle gleich ist, d. h. wenn der Lochquerschnitt des Lochunterbrechers gleich der Elektrodenoberfläche des Stiftunterbrechers ist.

Voraussetzung ist dabei, daß das Diaphragma, in welches das Loch eingebohrt ist, möglichst dünnwandig ist. Durch besondere Messungen in der Brücke habe ich mich überzeugt, daß in der Tat die Widerstände unter diesen Umständen nahezu gleich ausfallen.

Nun zeigt schon ein roher Versuch, daß der Stiftunterbrecher unter sonst gleichen Bedingungen häufiger unterbricht, als der Lochunterbrecher. Darauf weist unter anderem auch Klupathy in der zitierten Arbeit hin, und sieht darin eine wesentliche Stütze seiner Theorie. Da indessen bisher exakte Versuche über diesen Punkt noch nicht gemacht waren, so stellte ich zunächst solche Vergleichsversuche zwischen den beiden Unterbrecherformen an. Und zwar wurde zunächst ein Stiftunterbrecher der gewöhnlichen Form benutzt, dessen Stiftoberfläche dem Lochquerschnitt gleichgemacht war. Die Resultate sind in der Tab. 11 enthalten.[1]) Es zeigt sich, daß in der Tat wesentlich höhere Unterbrechungszahlen beim Stiftunterbrecher erhalten werden.

Da immerhin die Stiftform der Elektrode besonderen Einfluß auf die Unterbrechungszahl haben konnte, so wurde noch eine Versuchsreihe gemacht, bei der die Übereinstimmung der Bedingungen sicherlich noch besser erzielt ist. Zu dem Zweck wurde als „aktive Elektrode" eine ebene Elektrode benutzt, die durch Anpressen von Platinblech an dasselbe Loch gebildet war, welches zu den Parallelversuchen am Lochunterbrecher diente. Die verwendeten Diaphragmen bestanden aus Glasplatten von 0,8 mm Dicke. Es wurde große Sorgfalt darauf verwendet, die Löcher genau zylindrisch mit scharfen Rändern zu bohren, damit von dem untergelegten Platinblech genau ein Stück von der Flächengröße des Lochquerschnitts ausgeblendet wurde. Die Resultate, die mit dieser Anordnung erhalten wurden, sind in Tab. 15 niedergelegt.

Auch sie ergeben dasselbe Resultat, *daß nämlich unter gleichen Umständen der Elektrodenunterbrecher 3 bis 5 mal so oft unterbricht, wie der Lochunterbrecher.* Als Beispiel ist auf Fig. 25, Taf. III, ein Paar der erhaltenen Kurven abgebildet.

---

1) Weitere Tabellen vgl. Dissertation p. 47.

Fig. 26 stellt die beiden Stromkurven nach quantitativer Auswertung dar. Man erkennt, *daß der Stromanstieg in beiden Fällen dieselbe Zeitkonstante hat.*

Weiter wurde eine Versuchsreihe gemacht, bei der die Größe des Loches konstant gehalten und die Länge des Platinstiftes so reguliert wurde, daß die gleiche Stromamplitude für beide Unterbrecher erhalten wurde. Man kann diese Einstellung mit Hilfe des rotierenden Spiegels am Oszillographen sehr leicht vornehmen.

Das Ergebnis ist in Tab. 16 enthalten.[1])

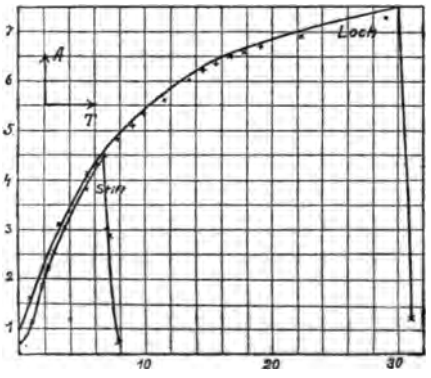


Fig. 26.

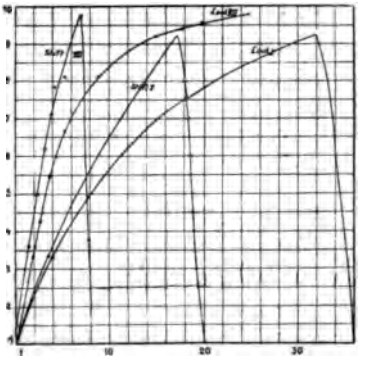


Fig. 27.

Fig. 27 zeigt zwei Paar quantitativ ausgewertete Kurven dieser Art. Da die maximale Stromamplitude beim Betriebe eines Induktoriums, gleiche Unterbrechungsgeschwindigkeit vorausgesetzt, ein Maß ist für die Induktionswirkung der Unterbrechung, so sieht man, *daß der Elektrodenunterbrecher die gleiche Induktionswirkung in derselben Zeit etwa 3 mal leistet, in der der Lochunterbrecher einmal wirkt.* Doch werden diese Verhältnisse durch die sekundäre Belastung des Induktoriums wesentlich modifiziert, worauf weiter unten näher eingegangen wird.

2. Kritik der Klupathyschen Theorie.

Nachdem so exakt bewiesen ist, daß der Wehneltunterbrecher unter gleichen Umständen häufiger unterbricht, als

1) Weitere Tabellen vgl. Dissertation p. 49—50.

der Lochunterbrecher, läßt sich die Übertragung der Simonschen Theorie, die sich beim Lochunterbrecher bestätigt hatte auf den Stiftunterbrecher nicht mehr rechtfertigen. Dagegen scheint die von Klupathy vertretene Anschauung eine Stütze zu erhalten. Denn die Versuche beweisen, daß außer der an der Einschnürungsstelle als Joulesche Wärme abgegebenen Energie beim Elektrodenunterbrecher noch eine andere Energieabgabe stattfinden muß. Klupathy[1]) ist der Meinung, daß der Peltiereffekt an der Platin–Schwefelsäure-Berührungsstelle dafür verantwortlich gemacht werden müsse. Eng zusammen hängt mit dieser Klupathyschen Erklärung die Tatsache, daß der Elektrodenunterbrecher erfahrungsgemäß nur wirkt, wenn die „aktive Elektrode" positiv ist. Das Gesetz des Peltiereffektes verlangt auf Grund der Spannungsreihe, daß eine Abgabe von Wärmeenergie an der Lötstelle stattfindet, wenn der Strom von dem in der thermoelektrischen Reihe höher stehenden Metall zu dem tiefer stehenden Elektrolyten übergeht. Eine Abkühlung ergibt sich im umgekehrten Fall. So würde also die Klupathysche Theorie gleichzeitig die Unipolarität der Unterbrechungswirkung erklären.

Um über ihre Berechtigung eine Entscheidung zu gewinnen, habe ich ihre Folgerungen geprüft. Es fragt sich:

1. *Ob bei negativer aktiver Elektrode der Unterbrechungsvorgang tatsächlich versagt, oder wenigstens die Unterbrechungen langsamer werden.*
2. *Ob bei Verwendung von anderen Metallen andere Unterbrechungszahlen auftreten.*

1. *Die Versuche zeigen, daß auch bei negativer, aktiver Elektrode wohl definierte Unterbrechungen stattfinden*, die zwar offenbar aus sekundären Ursachen unregelmäßiger verlaufen, als im umgekehrten Falle, *die aber nicht nur keine geringere Unterbrechungszahl, sondern sogar durchgehends eine größere liefern, als bei positiver Elektrode.* Die Abbildungen 36 und 37 (Taf. III) zeigen zwei Oszillogramme als Vergleich.[2]) Als charakteristisch und auffällig sei schon hier hervorgehoben, *daß in diesem Falle die Spannung am Unterbrecher längst nicht so hohe Werte erreicht, auch unregelmäßiger verläuft, als bei positiver Elektrode.*

1) E. Klupathy, Wied. Ann. 9. p. 147. 1902.

2) Vgl. auch Figg. 38 und 39 auf Taf. I der Dissertation.

In den Tabb. 19 und 20 sind die Daten dieser Versuche zusammengestellt. Die Aufnahmen in Tab. 19 sind mit Platinblech, die in Tab. 20 mit Kohle als aktiver Elektrode gemacht; beide mit dem p. 470 beschriebenen Apparat. Für die Kohleversuche wurde eine Mikrophonmembran verwandt. Auch bei Kohle zeigt sich dasselbe, wie bei Platin, so daß die Klupathysche Auffassung zwingend widerlegt erscheint.

2. Die Versuche, andere Metalle als positive aktive Elektroden zu verwenden, stehen in Tab. 21, 22.[1])

Sie zeigen, daß das verwendete Metall auf die Unterbrechungstätigkeit von keinem spezifischen Einfluß ist. Die geringen Abweichungen in den Unterbrechungszahlen liegen innerhalb der Versuchsfehler. Auch diese Versuche widersprechen demnach der Klupathyschen Annahme.

Übrigens wurden die Versuche erschwert dadurch, daß die Elektroden sehr schnell durch den Strom elektrolytisch zerstört wurden. Mit Kupfer und Zink ließen sich aus diesem Grunde überhaupt keine Resultate erzielen. Ein Kupferblech von 3 mm Dicke wurde innerhalb weniger Sekunden durchbohrt.

3. Die Elektrolyse.

Um die höhere Unterbrechungsgeschwindigkeit des Stiftunterbrechers zu erklären, muß demnach eine andere Wirkung herangezogen werden, die sich entweder über die Wärmeentwickelung überlagert, oder auch für sich allein die Unterbrechungen übernimmt. Am nächsten liegt hier, die elektrolytische Gasentwickelung heranzuziehen, wie das auch schon Wehnelt getan hatte. Alsdann müßten die Unterbrechungszahlen der beiden Unterbrecherformen gleich werden, falls man sogenannte *unpolarisierbare Elektroden* benutzt. Ich habe demnach Parallelversuche gemacht mit Unterbrechern, deren Elektrolyt Kupfersulfatlösung war, während als aktive Elektrode Kupferblech verwendet wurde. Da bei diesen Versuchen an der aktiven Elektrode eine Kupferabscheidung oder Auflösung stattfindet, und infolgedessen eine Veränderung der Elektrodenoberfläche, sind exakte Versuche mit einigen Schwierigkeiten verbunden. Man muß die oszillographischen Aufnahmen un-

1) Weitere Tabellen vgl. Dissertation p. 53.

mittelbar nach Stromschluß machen. *Es zeigte sich, daß in der Tat jetzt gleiche Unterbrechungszahlen erzielt wurden.*[1])

Es wurde noch auf eine andere Weise versucht, auch bei H_2SO_4 als Elektrolyt und Platinelektrode den Einfluß des entwickelten Gases auszuschalten. Die aktive Elektrode wurde negativ genommen und $KMnO_4$ bzw. $K_2Cr_2O_7$ als Oxydationsmittel zu der Säure zugesetzt. Es wurde erwartet, daß etwa der entwickelte Wasserstoff oxydiert würde. Indessen verläuft die Wasserstoffentwickelung offenbar zu energisch, als daß die geringen in der Nachbarschaft der Elektrode vorhandenen Oxydationsmittel ausreichen könnten. Die Versuche hatten kein Resultat.[2])

4. Versuch einer theoretischen Formulierung.

Es wurde jetzt versucht, den Unterbrechungsvorgang beim Stiftunterbrecher als Übereinanderlagerung von Verdampfung und Elektrolyse mathematisch zu beschreiben.

Von vornherein erscheint es am einfachsten anzunehmen, daß bei gegebenem Unterbrecher die Unterbrechungszahl jedesmal dann einsetzt, wenn eine bestimmte für ihn charakteristische Gasmenge durch das Zusammenwirken von Verdampfung und Elektrolyse abgeschieden ist. Das liefert den Ansatz:

$$C_1 = A\int_0^{T_1} i\,dt + B\int_0^{T_1} i^2 w_u\,dt, \tag{39}$$

oder nach Entwickelung der Integrale

$$\begin{cases} C_1 = A\dfrac{E}{w_k}\left(T_1 - \dfrac{L}{w_k}\left(1 - e^{-\frac{w_k}{L}t}\right)\right) \\ \quad + B\dfrac{E^2 w_u}{w_k^2}\left[T_1 + \dfrac{2L}{w_k}\left(1 - e^{-\frac{w_k}{L}t}\right) + \dfrac{L}{2w_k}\left(1 - e^{-\frac{2w_k}{L}T_1}\right)\right]. \end{cases} \tag{40}$$

Die Versuche werden jedoch durch diese Formel nicht wiedergegeben wie Tab. 27 und die Figg. 29—30 zeigen.[3])

Beim Stiftunterbrecher wird also mit wachsender Unterbrechungszahl immer weniger Energie für eine Unterbrechung

1) Tabellen vgl. Dissertation p. 55.
2) Tabellen vgl. Dissertation p. 57.
3) Weitere Figuren und Tabellen vgl. Dissertation p. 54—59.

aufgewandt. Man könnte daran denken, auch hier die Wärmeableitung in die Umgebung der Unterbrecherstelle für dies Verhalten verantwortlich zu machen, wie es sich beim Lochunterbrecher als richtig erwies. Da die Unterbrechungsstelle in dauernder Berührung mit den metallischen Elektroden ist, so würde sich dieser Einfluß wegen der großen Wärmeleitung der Metalle naturgemäß hier bis zu höheren Unterbrechungszahlen erstrecken, als beim Lochunterbrecher. Die Versuche

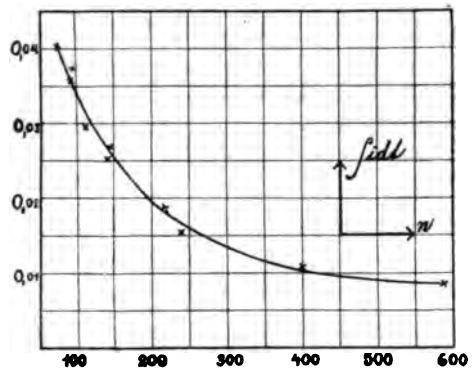


Fig. 29.

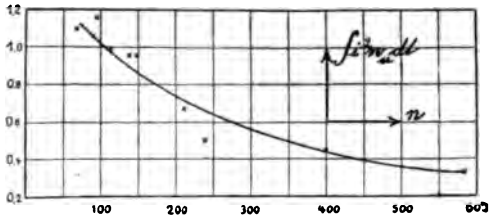


Fig. 30.

würden etwa alle innerhalb des Bereiches liegen, in dem die Wärmeableitung noch zur Geltung kommt. Alsdann müßte Kohle mit ihrer im Vergleich zu Platin so viel schlechteren Wärmeleitung (60 : 0,11) an Stelle des Metalles gesetzt die Abhängigkeit verändern und den Einfluß der Wärmeableitung teilweise eliminieren. Die Tab. 22 zeigt aber, daß dies nicht der Fall ist, *daß also die Wärmeableitung durch die Elektrode nicht der Grund sein kann für die gefundene Tatsache.*

Zwei Ursachen mögen hier zusammen wirken, um die beobachtete Abhängigkeit des C_1 von der Unterbrechungszahl hervorzurufen.

a) *Bei dem Stiftunterbrecher wird auch schon während des Stromanstiegs infolge der Elektrolyse fortdauernd Gas gebildet, während beim Lochunterbrecher erst plötzlich am Ende des Stromanstiegs Verdampfung erfolgt.*

Die während einer Unterbrechung allein durch die Elektrolyse entwickelte Gasmenge ist durchaus nicht gering. Das zeigt folgendes Beispiel, dem Nr. 425 zugrunde liegt.

Dort ist

die Gleichstromkomponente . .	$i_0 = 3{,}45$ Amp.
die Unterbrechungszeit	$T = 0{,}01922$ sec
die Stiftlänge	$l = 2$ mm
die Stiftdicke	$2r = 1$ mm.

Die wirksame Oberfläche des Platinstiftes berechnet sich daraus zu

$$7{,}065 \text{ mm}^2.$$

Nun scheidet ein Strom von 1 Amp. in 1 Sek. 0,083 mg Sauerstoff ab. Der Strom von 3,45 Amp. und 0,01922 Sek. Dauer scheidet ab

$$0{,}005066 \text{ mg}.$$

Wenn man das in Kubikmillimeter umrechnet, so erhält man

$$3{,}542 \text{ mm}^3.$$

Um den Stift wird also allein durch Elektrolyse eine $^1/_2$ mm dicke Schicht Sauerstoff während einer Unterbrechung abgeschieden. Es ist also sehr wahrscheinlich, daß von der durch Elektrolyse beim Stromanstieg gebildeten Gasmenge schon ein großer Teil in Form von Bläschen von der Elektrode abgelöst wird, ehe die Unterbrechung einsetzt, und daß sich infolgedessen nur ein Bruchteil der elektrolytisch gebildeten Gasmenge am Unterbrechungsvorgang beteiligt. Naturgemäß wird diese Ablösung von Gasbläschen während des Stromanstiegs um so geringer sein, je schneller die Unterbrechungen erfolgen.

b) Man beobachtet am Stiftunterbrecher folgende Eigentümlichkeit:

Während bei niedrigen Unterbrechungszahlen der ganze Stift von der abtrennenden Gasschicht bedeckt ist, bleibt bei schnellen Unterbrechungen ein Teil des Stiftes beständig in Berührung mit der Flüssigkeit und zwar ein immer größerer Teil, je schneller die Unterbrechungen sind. Die Erscheinung zeigt in vergrößertem Maße Fig. 33.

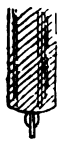


Fig. 33.

Die Spitze des Stiftes bildet also beständig einen Nebenschluß für den Unterbrecher, so daß der Strom bei der Unterbrechung nicht auf Null herabsinkt. Der übrig bleibende Stromwert ist um so größer, je größer der von der Blase frei bleibende Teil des Stiftes ist (Fig. 34, Taf. III).

Diese und ähnliche Einflüsse, z. B. auch die Wirbelströme der Flüssigkeit an der Elektrode, beeinflussen, wie man sieht, die Vorgänge in der Tat in dem durch die Versuche signalisierten Sinne. Sie in exakter Weise zu formulieren, ist mir nicht gelungen und dürfte auch kaum erreichbar sein. So muß man wohl darauf verzichten, den Unterbrechungsvorgang am Stiftunterbrecher durch eine einfache Beziehung zu beschreiben, so wie es für den Lochunterbrecher gelungen ist.

5. Unipolarität des Stiftunterbrechers.

Da unter 3. gezeigt ist, daß die Klupathysche Erklärung nicht angenommen werden kann, so versagt sie auch zur Erklärung der Tatsache, daß eine wirksame Unterbrechung vom Stiftunterbrecher nur geleistet wird, falls die aktive Elektrode positiv ist. Es bleibt noch die Erklärung zu geben für die Erfahrung, daß im Falle einer aktiven Kathode sehr bald eine Weißglut der Elektrode eintritt, die meist zur Zerstörung führt.

Von allen den oben aufgezählten Erklärungsweisen dieser Tatsache hat die von Stark und Cassuto[1]) auf die moderne Ionentheorie des Lichtbogens gestützte Vorstellung die größte Wahrscheinlichkeit für sich. Nach ihr setzt infolge der großen, an der Unterbrechungsstelle auftretenden Unterbrechungsspannung bei relativ niedriger Spannung ein Lichtbogen ein, sobald das Metall Kathode ist. Im umgekehrten Falle sind weit höhere Unterbrechungsspannungen möglich, ohne daß eine

1) J. Stark u. L. Cassuto, Physik. Zeitschr. 5. Nr. 10. p. 264. 1904.

Lichtbogenentladung übergeht. Dementsprechend müßte man im ersteren Falle sehr viel niedrigere Unterbrechungsspannungen beobachten, als umgekehrt, was in der Tat in den Kurven sehr markiert zum Ausdruck kommt.

Fig. 35 auf Taf. III zeigt z. B. den Fall Kupfer in $CuSO_4$, wo, wie oben bemerkt, eine fast momentane Durchschmelzung der Kupferkathode auftrat. Die Spannung bei der Unterbrechung erreicht relativ niedrige Werte, und auch in der Stromabfallkurve bemerkt man Unstetigkeiten, die auf eine eintretende Lichtbogenbildung schließen lassen.

Um hierüber genaueren Aufschluß zu gewinnen, habe ich, in Ausgestaltung eines schon von Wehnelt[1]) mit der Braunschen Röhre angedeuteten Versuches, die Anordnung getroffen, daß das zeitliche Einsetzen des auftretenden Unterbrechungslichtbogens gleichzeitig mit den Strom- und Spannungskurven registriert wurde. Mit einer Linse wurde auf das photographische Papier, auf dem die Oszillographenkurven aufgenommen wurden, zugleich ein Bild der aktiven Platinspitze des Wehneltunterbrechers geworfen. Es ist eine sehr genaue Einstellung nötig, damit die Bilder der Oszillographenspiegel und das Bild der Platinspitze genau in eine Linie fallen, damit auf der Aufnahme keine Phasenverschiebung zwischen den Oszillographenkurven einerseits und dem Bild der Leuchterscheinung andererseits eintritt. Der Unterbrecher bestand aus einem 5 mm langen Platindraht als aktiver Elektrode und einer Bleiplatte als anderer Elektrode. Die beiden Elektroden waren in einem Glastrog mit planparallelen Wänden untergebracht. Der Glastrog war außen vollständig mit schwarzem Papier beklebt, das nur an der der Linse zugekehrten Seite eine Öffnung hatte. Reflexionen an der Rückwand wurden durch eine Hartgummiplatte verhindert.

Fig. 36—40[2]), Taf. III, zeigen die entsprechenden mit positiver und negativer „aktiver Elektrode" gemachten Beobachtungen. *Man sieht, daß bei aktiver Anode nach der Unterbrechung ein ganz lichtschwaches Fünkchen auftritt, daß der Strom in relativ steiler Kurve abfällt, und daß die Spannung*

1) A. Wehnelt, Wied. Ann. 68. p. 233. 1899.
2) Figg. 38 und 39 vgl. Taf. I der Dissertation.

schnell auf einen hohen Wert ansteigt; daß bei aktiver Kathode aber eine recht lichtstarke Lichtbogenerscheinung (vgl. besonders Fig. 40) bei relativ niedriger Unterbrecherspannung einsetzt, daß der Stromabfall außerordentlich verlangsamt ist, und daß die Spannung mit ziemlichen Schwankungen auf tiefen Werten bleibt, höchstens am Ende wie in Fig. 37 nach dem Abbrechen des Lichtbogens vorübergehend auf einen etwas höheren Wert springt. Durch diese Versuche ist es wohl bewiesen, daß in der Tat die von Stark gegebene Erklärung richtig ist.

6. Der Wehneltunterbrecher bei Temperatur- und Druckänderung.

Da die Wirkungsweise des Wehneltunterbrechers schon bei konstant gehaltenem Druck und Temperatur sich nicht einer mathematischen Formulierung unterwerfen ließ, so ist dies bei Änderung von Druck und Temperatur völlig ausgeschlossen.[1])

V. Der Betrieb des Induktionsapparates mit den elektrolytischen Unterbrechern.

1. Grundlagen.

Die in den vorhergehenden Untersuchungen gewählten Verhältnisse sind nicht identisch mit denen, die beim Betriebe von Induktionsapparaten mit den elektrolytischen Unterbrechern vorhanden sind. In diesem Falle treten infolge der Rückwirkung des Sekundärstromes auf den Primärkreis Modifikationen ein, die je nach der besonderen Art und Dauer des Sekundärstromes verschieden sein müssen. Immerhin lassen sich einige allgemein gültige Gesichtspunkte zusammenstellen, durch die mit Berücksichtigung der Ergebnisse der vorstehenden Untersuchungen eine Beurteilung des Verhaltens der elektrolytischen Unterbrecher beim Betriebe von Induktorien möglich ist.

Die Rückwirkung des Sekundärkreises äußert sich bei einem Transformator so, daß die Selbstinduktion des Primärkreises in einer von der Stromstärke und Phase abhängigen Weise verringert wird. Es würde demnach bei einem be-

1) Eine experimentelle Übersicht über diese Einflüsse geben die in Tabb. 30—33 der Dissertation mitgeteilten, in weiten Grenzen variierten Versuche.

lasteten Induktorium die für die Unterbrecherwirkung in Frage kommende Zeitkonstante L/w_k verkleinert erscheinen, so lange ein Sekundärstrom besteht.

2. Versuchsanordnung.

Um diesen Einfluß der Belastung experimentell zu studieren, wurden in dem Sekundärkreis lange Funken über Spitzen überspringen lassen und gleichzeitig oszillographische Strom- und Spannungskurven des Unterbrechers aufgenommen. Ähnlich, wie es oben bei der Untersuchung des Unterbrechungsfunkens beschrieben ist, wurden hier die auftretenden Sekundärfunken gleichzeitig mit den Strom- und Spannungskurven registriert.

Es wurde sehr sorgfältig darauf geachtet, daß die Projektion der Spitzen der Funkenstrecke genau in dieselbe Linie fiel, in der die Lichtpunkte des Oszillographen lagen. Andernfalls würde man eine Phasendifferenz zwischen den zusammengehörigen Werten von Strom und Spannung einerseits, von Funkenentladung andererseits bekommen.

3. Versuchsergebnisse.

In den Tabellen 34—40 und Fig. Nr. 534—538, 510—514, Taf. IV sind diese Ergebnisse niedergelegt.[1])

Tabb. 36 und 40 zeigen in Parallelstellung, was mit den beiden Unterbrechertypen auftritt, wenn man die *Betriebsspannung* variiert. Man erkennt, daß dabei die Unterbrechungszahlen und gleichzeitig die erreichten Stromamplituden wachsen. Da aber das erreichte Strommaximum maßgebend ist für die Induktionswirkung, so wachsen mit zunehmender Betriebsspannung die erzielten Primärspannungen, denen die Sekundärspannungen proportional sind. Infolgedessen wird für die auftretenden Funken eine immer größere Elektrizitätsmenge verfügbar; dieselben dauern länger an. *Sobald die Entladung einsetzt, und der Sekundärstrom sich ausbildet, wird die Selbstinduktion des primären Systems kleiner,* und die Stromstärke wächst nach der Unterbrechung sehr viel schneller an, als sie ohne den Sekundärstrom anwachsen würde. Verlischt inzwischen der sekundäre Funkenstrom, so verhält sich von da ab das Induktorium so, als sei die Sekundärspule überhaupt nicht

1) Weitere Figuren vgl. Taf. II und III der Dissertation.

vorhanden; die Aufladung erfolgt von diesem Moment ab mit der Zeitkonstante, wie sie dem unbelasteten Induktorium eigen ist.

Besonders deutlich treten diese Verhältnisse bei den im ganzen langsamer erfolgenden Unterbrechungen des Lochunterbrechers hervor. Tabb. 34 und 37 und Nr. 534—538 und Nr. 510—514, Taf. IV, zeigen die Wirkung, die eine Änderung der Belastung hervorruft; und zwar wurde diese *Belastungsänderung* dadurch bewirkt, daß man die sekundäre Funkenstrecke in Stufen von Null bis zu einer Länge veränderte, bei der Funken nicht mehr auftraten. *Man erkennt wiederum die typische Wirkung der einsetzenden Entladung daran, daß der Strom alsbald mit einer sehr viel kleineren Zeitkonstante wieder zu wachsen anfängt, als der unbelastete Apparat besitzt.* Sobald die sekundäre Entladung aufhört, biegt die Kurve in diejenige über, die ohne sekundären Funken vorhanden ist. Mit zunehmender Funkenlänge wächst die Spannung, bei der der Funke einsetzt, d. h. es muß auch eine immer höhere Primärspannung beobachtet werden. Wird die Sekundärspule kurz geschlossen, so arbeitet der Unterbrecher so, als ob eine wesentlich kleinere Zeitkonstante vorhanden wäre. Man erkennt dabei deutlich aus Kurve 534 und 535, daß dieser rückwirkende Einfluß des Sekundärstromes am beträchtlichsten ist gleich nach der Unterbrechung, während im letzten Teil des Stromanstieges offenbar ein dem unbelasteten System entsprechender Verlauf eintritt. *Lochunterbrecher und Stiftunterbrecher unterscheiden sich hier wieder durch die Unterbrechungszeiten, die beim Stiftunterbrecher unter gleichen Bedingungen wesentlich kleiner sind, als beim Lochunterbrecher.*

In Tabb. 35 und 38 ist noch der Einfluß von mehr oder weniger *Primärwindungen* auf die Vorgänge verfolgt. Durch diese Variation wird einmal die Zeitkonstante beeinflußt, dann aber auch die Zahl der Induktionslinien, die im Eisenkerne des Induktoriums erregt werden. Infolgedessen wird die Unterbrechung um so kleinere Sekundärspannungen erzeugen, je weniger Windungen unter sonst gleichen Umständen verwendet werden. Da im übrigen mit der Windungszahl auch der Widerstand verändert wird, so ist aus den betreffenden Kurven nicht allzuviel zu entnehmen. Die Funkendauer nimmt zu mit der Zahl der verwendeten Windungen.

Nr. 525, Taf. IV, zeigt einen Fall, wo nicht die gewöhnlich eintretende *Lichtbogenentladung*, *sondern Funkenentladung aufgenommen wurde. Man sieht, daß hier die Stromunterbrechung mehrere Funken hintereinander auslöst*, was sich durch einen entsprechenden Verlauf des Stromabfalles und der Unterbrecherspannung ausdrückt.

Von besonderer Wichtigkeit für die Praxis wäre es, die Wirkungsweise der elektrolytischen Unterbrecher zu untersuchen, wenn mit ihrer Hilfe eine an die Sekundärspule *angeschlossene Röntgenröhre erregt wird.* Der sekundäre Stromverlauf dürfte in diesem Fall ein ähnlicher sein, wie bei den beobachteten Lichtbogen sehr großer Länge: Bei einer bestimmten Spannung setzen die Kathodenstrahlen ein, und wenn die Elektrizitätszufuhr unter einen bestimmten Wert heruntergeht, hören sie auf. Man wird also wohl ähnliche Unterbrechungskurven beobachten, wie sie Nr. 510—548 gefunden sind. Für diesen Fall gestatten die oben gefundenen Resultate folgenden Vergleich zwischen Lochunterbrecher und Stiftunterbrecher: Gleiche Wirkung an der Röntgenröhre muß bei gleicher Geschwindigkeit des Stromabfalles dann erzielt werden, wenn die im Primärkreise erreichten maximalen Stromstärken dieselben sind. Für diesen Fall sind in Fig. 27 die zusammengehörigen Stromkurven gezeichnet, die unter sonst gleichen Bedingungen durch Variation des Einschnürungsquerschnittes erreicht werden. Die Unterbrechungszahlen fallen dabei für den Lochunterbrecher etwa dreimal kleiner aus als für den Stiftunterbrecher. Der Stromanstieg ist deshalb im letzteren Falle wesentlich schneller als beim Lochunterbrecher. Für den Fall des belasteten Induktoriums gilt dasselbe für die Zeiten des Stromanstieges, die nach dem Erlöschen des sekundären Stromes liegen. *Diese letzteren Anstiege aber sind es, die notwendig die sogenannte Schließungsinduktion des Induktoriums bestimmen, die sich beim Betrieb von Röntgenröhren so störend geltend macht. Sie muß also bei dem Lochunterbrecher wesentlich geringer sein, als beim Stiftunterbrecher*, was sich mit den Erfahrungen deckt, die nach einer privaten Mitteilung Herr Dr. J. Rosenthal in der Praxis mit beiden Unterbrechern gemacht hat. Nach seiner Erfahrung läßt sich beim Lochunterbrecher die Schließungsinduktion völlig zum Ver-

schwinden bringen, während das beim Stiftunterbrecher nicht gelingt.

Auf der anderen Seite gestattet der Stiftunterbrecher unter gleichen Bedingungen eine höhere Unterbrechungszahl zu erzielen als der Lochunterbrecher. Doch ist das nicht immer ein Vorzug, da man ohnehin mit der Beanspruchung der Röntgenröhre nicht über ein gewisses Maß hinausgehen kann. Gegen den Stiftunterbrecher zeigt der Lochunterbrecher praktisch noch die Eigentümlichkeit, daß die Unterbrechungszahl fast nicht von der sekundären Funkenlänge beeinflußt wird, während das beim Stiftunterbrecher sehr stark der Fall ist. (Nr. 534—538 und Nr. 510—514, Taf. IV.) Das erklärt sich ja ohne weiteres aus dem oben beschriebenen Verhalten: Die Zeit, in der die kleinere Zeitkonstante den Stromanstieg bestimmt, tritt bei dem Lochunterbrecher gegen die übrige sehr zurück, während sie bei dem Stiftunterbrecher einen relativ großen Bruchteil der Unterbrechungszeit ausmacht.

Hingewiesen sei noch auf einen durchgängig beobachtbaren Unterschied des Lochunterbrechers gegen den Stiftunterbrecher. Bei den Aufnahmen mit dem Lochunterbrecher erkennt man, daß *der Sekundärfunken beim Beginn eine ganz besonders markierte Intensität besitzt, die beim Stiftunterbrecher nicht vorhanden ist. Es spricht das offenbar für eine größere Plötzlichkeit der Unterbrechung.* Das erklärt sich vielleicht aus der teilweise elektrolytischen Natur der Unterbrechung beim Stiftunterbrecher. Denn die elektrolytische Gasabscheidung erfolgt naturgemäß mit einer gewissen Langsamkeit, während man sich denken kann, daß die bei genügender Überhitzung erfolgende Verdampfung der Flüssigkeit mehr explosionsartig einsetzt.

VI. Tabellen.

In allen folgenden Tabellen ist:

$2r$ = Durchmesser des Loches in der Einschnürungsstelle des Lochunterbrechers in Millimetern gemessen.
E_0 = Betriebsspannung in Volt.
n = Unterbrechungszahl pro Sekunde.
$i_{\text{eff.}}$ = der effektive Stromwert am Hitzdrahtamperemeter abgelesen in Ampere.
i_0 = Stromwert an einem Gleichstromamperemeter gemessen in Ampere.
$i_{\text{max.}}$ = maximale Amplitude der Stromkurve in Amp.

w_u = Widerstand des Unterbrechers mit Brücke und Telephon gemessen in Ohm.
w_s = der Ohmsche Widerstand der Selbstinduktionsspule in Ohm.
w_k = Gesamtwiderstand des Kreises in Ohm.
L = Selbstinduktion in Henry gemessen.
$e_{max.}$ = Spannungsmaximum in Volt.
t_0 = Temperatur der Flüssigkeit in Celsiusgraden.
ω = Größe der Einschnürungsstelle in Kubikmillimetern.
F = Funkenlänge des Sekundärkreises vom Induktorium in Zentimetern.
N = Spulenanzahl der primären Wickelung des Induktoriums.
C_1 = die zu einer Unterbrechung nötige Energiemenge berechnet nach der Formel (8):

$$C_1 = \frac{0{,}24\, E^2 w_u}{w_k^2}\left[T_1 - \frac{2L}{w_k}\left(1 - e^{-\frac{w_k}{L}T_1}\right) + \frac{L}{2w_k}\left(1 - e^{-\frac{2w_k}{L}T_1}\right)\right] \text{ g·Cal.}$$

C_1'' = die zu einer Unterbrechung nötige Energiemenge berechnet nach der Formel (9):

$$C_1'' = \frac{0{,}24\, E^2 w_u}{w_k^2}\left(T_1 - \frac{3}{2}\frac{L}{w_k}\right) \text{ g·Cal.}$$

Tabelle 1.

Lochunterbrecher.

Änderung von Selbstinduktion, Lochgröße und Betriebsspannung.

Lochgröße und Widerstand	Nr.	E_0	n	$i_{eff.}$	w_k	C_1
Selbstinduktion = 0,085 Henry, w_s = 2,34 Ohm.						
$2r$ = 3 mm, w_u = 6,5 Ohm	102	60	9,04	6,5	8,84	6,884
	103	80	25,7	7,2	8,84	3,138
	104	100	34,2	7,8	8,84	2,997
$2r$ = 2,5 mm, w_u = 8,0 Ohm	111	60	22,2	4,5	10,34	2,124
	112	80	42,2	5,0	10,34	1,32
	113	100	52,4	5,5	10,34	1,29
$2r$ = 2 mm, w_u = 10 Ohm	114	60	48	3	12,84	0,5925
	115	80	59	3,5	12,34	0,667
	116	100	74	4	12,34	0,803
Selbstinduktion = 0,0195 Henry, w_s = 1,01 Ohm.						
$2r$ = 3 mm, w_u = 6,5 Ohm	105	60	29	7,8	7,51	3,055
	106	80	49,7	9,8	7,51	2,9315
	107	100	69	10,8	7,51	2,952
$2r$ = 2,5 mm, w_u = 8,0 Ohm	108	60	51,7	6,4	9,01	1,376
	109	80	86,3	7,6	9,01	1,267
	110	100	115	8,4	9,01	1,288
$2r$ = 2 mm, w_u = 10 Ohm	117	60	86,3	4,7	11,01	0,638
	118	80	134,5	5,5	11,01	0,6074
	119	100	175	6,5	11,01	0,605

Tabelle 2.

Lochunterbrecher.

Änderung von Selbstinduktion, Lochgröße und Betriebsspannung.

Lochdurchmesser und Widerstand	Nr.	E_0	n	$i_{max.}$	w_k	C_1
Selbstinduktion = 0,085 Henry.						
$2r$ = 3 mm	139	80	10,5	6,98	9,16	11,44
w_u = 6,5 Ohm	148	100	23	8,18	11,96	3,574
$2r$ = 2,5 mm	129	60	14,75	4,8	10,66	3,458
w_u = 8 Ohm	136	80	28,4	6,57	10,66	2,5
	145	100	24,6	6,25	16,21	2,413
$2r$ = 2 mm	126	60	39,5	4,56	13,21	0,765
w_u = 10 Ohm	133	80	36,7	4,65	15,41	1,23
	142	100	53,3	5,52	18,76	0,814
Selbstinduktion = 0,05 Henry.						
$2r$ = 3 mm	140	80	14,2	6,96	8,6	8,373
w_u = 6,5 Ohm	149	100	27,7	8,8	11,4	3,551
$2r$ = 2,5 mm	130	60	18,35	5,0	10,1	3,195
w_u = 8 Ohm	137	80	29,8	6,4	10,9	2,757
	146	100	35,1	6,6	15,65	1,854
$2r$ = 2 mm	127	60	35,9	4,64	12,1	1,2659
w_u = 10 Ohm	134	80	39,5	4,8	14,9	1,611
	143	100	60,6	6,08	18,5	0,871
Selbstinduktion = 0,0046 Henry.						
$2r$ = 3 mm	141	80	43,5	7,45	7,33	3,53
w_u = 6,5 Ohm	150	100	66	10,2	10,13	1,646
$2r$ = 2,5 mm	131	60	51,5	6,08	8,83	1,656
w_u = 8 Ohm	138	80	83	8,0	8,83	1,787
	147	100	68,5	7,6	14,38	1,809
$2r$ = 2 mm	128	60	89	5,45	10,83	0,7812
w_u = 10 Ohm	135	80	142,5	7,05	10,83	0,8364
	144	100	127,6	7,04	16,38	0,6657

Tabelle 5.

Lochunterbrecher. Änderung des Druckes.
$E_0 = 80$ Volt. $w_k = 8{,}34$. Flüssigkeitstemperatur = 23°. $w_u = 6$ Ohm.
Selbstinduktion = 0,085 Henry. 2 Löcher je $2r = 2{,}6$ mm.

Nr.	Druck in Atm.	$i_{eff.}$	n	C_1
352	1	7	35,1	1,985
353	1,5	7,6	30,3	2,51
354	2	8	30,2	2,5
355	2,5	8,2	28,1	2,83
356	3	8,4	25,42	3,3
357	3,3	8,5	26,6	3,18

Tabelle 6.

Lochunterbrecher. Änderung des Druckes.
$E_0 = 80$ Volt. $w_k = 6{,}56$. Flüssigkeitstemperatur = 21°. $w_u = 6$ Ohm.
Selbstinduktion = 0,0076 Henry. 2 Löcher je $2r = 2{,}6$ mm.

Nr.	Druck in Atm.	$i_{eff.}$	n	C_1
345	1	11	146	1,098
346	1,5	11,8	134,3	1,225
347	2	12,3	120,3	1,41
348	2,5	12,7	107,3	1,62
349	3	13,1	102,3	1,73
350	3,35	13,4	101,6	1,74

Tabelle 7.

Lochunterbrecher. Änderung des Druckes.
$E_0 = 80$ Volt $w_u = 6$ Ohm. 2 Löcher je $2r = 2{,}6$ mm.
Selbstinduktion = 0,032 Henry.

Nr.	Druck in Atm.	$i_{eff.}$	n	C_1
390	3	11	42,2	2,5
391	2,5	9,36	50	2,1
392	2,05	9,1	53,3	1,925
393	1,5	9,0	?	
394	1	8,4	63	1,515
395	0,866	7,6	69	1,325
396	0,733	7,2	67	1,38
397	0,607	6,8	71	1,268
398	0,538	6,2	75,2	1,16
399	0,34	6,0	?	?
400	0,2	5,6	81,6	1,018

Tabelle 8.

Lochunterbrecher. Änderung der Flüssigkeitstemperatur.
$E_0 = 60$ Volt. Lochunterbrecher mit 4 Löchern. Lochquerschnitt $= 4{,}334\,\text{cm}^2$.
$w_k - w_u = 3{,}334$ Ohm. $L = 0{,}083$ Henry.

Nr.	t_0	n	w_u	w_k	C_1''	C_1
210	20	25,86	5,55	8,89	1,5	1,5
214	40	30,6	4,5	7,84	1,065	1,128
217	55	36,75	3,9	7,24	0,645	0,784
220	71	40,55	3,4	6,74	0,400	0,623
223	81,5	43,8	3,2	6,54	0,245	0,506
226	90	44,6	3,0	6,34	0,181	0,480
229	100	54,2	2,9	6,24	—	0,291

Tabelle 11.

Vergleich von Loch- und Stiftunterbrecher.
$E_0 = 80$ Volt. Loch- und Stiftgröße $= 4{,}334$ mm^2.

Nr.	L	Art	$i_{\text{eff.}}$	$w_k - w_u$	n
14	0,051	Loch	7,6	2,83	35,04
	„	Stift	3,2	„	165,0
15	0,032	Loch	8,4	2,33	50
	„	Stift	3,6	„	243
16	0,0076	Loch	11,1	1,56	101,5
	„	Stift	4	„	590,0

Tabelle 15.

Vergleich von Loch- und Elektrodenunterbrecher.
Lochgröße $2r = 2$ mm. $E_0 = 60$ Volt.

Nr.	L	Art	n	$i_{\text{eff.}}$
50	0,085	Loch	41,3	3,1
51	„	Platinblech	141,0	1,7
54	0,0195	Loch	66,3	4,8
55	„	Platinblech	305,0	3,2

Tabelle 16.

Vergleich von Loch- und Stiftunterbrecher.
$E_0 = 80$ Volt. Vorschaltwiderstand 3,34 Ohm. Lochgröße 4,334 mm². Durchmesser des Platinstiftes $2r = 1{,}9$ mm.

Nr.	L	Art	$i_{eff.}$	Größe der Einschnürungsstelle mm²	n
1	0,085	Loch	7,4	4,334	27,61
		Stift	6,5	13,8	50,00
2	0,051	Loch	7,8	4,334	31,01
		Stift	7,2	13,2	71,1
3	0,032	Loch	8,5	4,334	35,3
		Stift	7,2	12,62	104,8
4	0,018	Loch	9,7	4,334	41,0
		Stift	8,8	11,7	175,0
5	0,0076	Loch	10,0	4,334	63,5
		Stift	7,6 (?)	8,7	347,0

Tabelle 19. Platin.

Die aktive Elektrode des Stiftunterbrechers als Kathode und Anode.

Nr.	Aktive Elektrode	Durchmesser des Loches mm	L	$i_{eff.}$	E_0	n
67	positiv	2	0,085	2	60	134
68	negativ			1,5		124
69	positiv	2	0,0065	3,4	60	320
70	negativ			3		350
71	positiv	3	0,085	3	60	71
72	negativ			2,6		71
73	positiv	3	0,0195	5,4	60	173
74	negativ			4,0		192
80	positiv	2	0,085	1,8	50	113
81	negativ			1,3		129
82	positiv	2	0,085	1,3	30	65
83	negativ			1,0		50,0

Tabelle 20. Kohle.

Die aktive Elektrode des Stiftunterbrechers als Kathode und Anode.

Nr.	Aktive Elektrode	Durchmesser des Loches mm	L	$i_{eff.}$	E_0	n
84	positiv	2	0,085	2,25	60	123
85	negativ			1,8		150
86	positiv	2	0,0065	3,6	60	318
87	negativ			3,0		345
88	positiv	2	0,085	1,4	30	65,3
89	negativ			1,1		75,5

Tabelle 21.

$L = 0{,}0067$ Henry. $E_0 = 60$ Volt. Lochgröße $2r = 3$ mm.
Verschiedene Metalle als positive aktive Elektroden im Stiftunterbrecher.

Nr.	Metall	$i_{eff.}$	n
90	Platin	5,4	208
91	Kohle	5,4	210
93	Eisen	5,5	196
94	Blei	5,4	215

Tabelle 22.

Platin und Kohle als positive aktive Elektroden im Stiftunterbrecher.

Nr.	Art	L	E_0	$i_{eff.}$	Lochdurchmesser $2r$ mm	n
69	Platin	0,0067	60	3,4	2	320
86	Kohle			3,6		318
82	Platin	0,085	30	1,3	2	65,5
88	Kohle			1,4		65,3
55	Platin	0,0195	60	3,2	2	305
56	Kohle			3,2		289,4
51	Platin	0,085	60	1,7	1,7	141
52	Kohle			1,7		140
90	Platin	0,0065	60	5,4	3	208
91	Kohle			5,4		210

Tabelle 27.

Stiftunterbrecher. Änderung der Selbstinduktion.

Länge des Platinstiftes 2 mm, Dicke des Platinstiftes $2r = 1$ mm.

$E_0 = 60$ Volt, $w = 7{,}5$ Ohm, Vorschaltwiderstand = 0 Ohm.

Nr.	L	w_h	n	$\int i^2 w_u \, dt$	$\int i \, dt$
284	0,083	10,49	73,8	1,1	0,0406
289	0,0644	10,156	90,8	1,06	0,0358
285	0,051	9,93	93,5	1,165	0,0376
290	0,050	9,88	109	0,908	0,0295
286	0,032	9,43	143,3	0,835	0,02566
291	0,031	9,49	146	0,82	0,0278
292	0,0195	9,11	238	0,517	0,0156
287	0,018	9,05	215	0,677	0,019
288_b	0,0076	8,66	400	0,463	0,0116
293	0,0046	8,61	582,5	0,35	0,00838

Tabelle 34.

Lochunterbrecher. Änderung der Belastung.

Nr.	$i_{eff.}$	F	E_0	w	n	N
534	11	kurz geschlossen	100	4,334	67,7	324
535	11	5	100	4,334	52,7	324
536	10,8	10	100	4,334	51,1	324
537	10,5	15	100	4,334	47,4	324
538	8,8	offen	100	4,334	25	324

Tabelle 35.

Lochunterbrecher. Änderung der Selbstinduktion.

Nr.	$i_{eff.}$	F	E_0	w	n	N
536	10,8	10	100	4,334	51,5	324
541	11,4	10	100	4,334	56,25	243
542	12	10	100	4,334	70,25	189
543	12,2	10	100	4,334	80,75	135
544	12,4	10	100	4,334	160,5	54

Tabelle 36.

Lochunterbrecher. Änderung von E_0.

Nr.	$i_{eff.}$	F	E_0	w	n	N
545	7,4	10	60	4,334	39,1	243
546	9,7	10	80	4,334	40,8	243
541	11,4	10	100	4,334	56,25	243
547	13,7	10	120	4,334	69	243
548	13,8	10	140	4,334	116,5	243

Tabelle 37.

Stiftunterbrecher. Änderung der Belastung.

Nr.	$i_{eff.}$	F	E_0	Stiftlänge	n	N
510	8,5	kurz geschlossen	100	3,3	193,5	324
511	8,5	5	100	3,3	206	324
512	8,2	10	100	3,3	176,3	324
513	8	13	100	3,3	146	324
514	5,6	offen	100	3,3	58	324

Tabelle 38.

Stiftunterbrecher. Änderung der Belastung.

Nr.	$i_{eff.}$	F	E_0	Stiftlänge	n	N
515	9	kurz geschlossen	100	3,3	301	189
516	8,4	5	100	3,3	370?	189
517	7,8	10	100	3,3	326?	189
518	7,7	13	100	3,3	291	189
519	6,2	offen	100	3,3	97,5	189

Tabelle 39.

Stiftunterbrecher. Änderung der Selbstinduktion.

Nr.	$i_{eff.}$	F	E_0	Stiftlänge	n	N
521	8,2	10	100	3,3	175	324
522	8,5	10	100	3,3	225	243
523	7,9	10	100	3,3	353	189
524	8	10	100	3,3	294	135
525	13	10	100	3,3	407	54

Tabelle 40.

Stiftunterbrecher. Änderung der Betriebsspannung.

Nr.	$i_{eff.}$	F	E_0	Stiftlänge	n	N
528	6,9	10	60	3,3	176	189
529	7,3	10	80	3,3	235	189
517	7,8	10	100	3,3	326(?)	189
530	8	10	120	3,3	293(?)	189
531	8,2	10	140	3,3	293(?)	189

VII. Zusammenfassung.[1])

1. Es wird die Simonsche Theorie der sogenannten elektrolytischen Stromunterbrecher einer experimentellen Prüfung unterzogen und gefunden, daß sie für den Lochunterbrecher gültig ist.

2. Dieselbe wird auf den Fall der Druck- und Temperaturänderung erweitert. Die gefundenen Formeln werden durch experimentelle Prüfung bestätigt.

3. Es stellt sich heraus, daß die Simonsche Theorie für den Stiftunterbrecher nicht anwendbar ist, da außer der reinen Wärmewirkung des Stromes an der aktiven Metallelektrode noch die elektrolytische Gasabscheidung hinzukommt.

4. Die Klupathysche Theorie für den Stiftunterbrecher, die die Hauptursache für die Unterbrechung in der an der Platin–Schwefelsäure-Berührungsstelle auftretenden Peltierwärme sucht, muß nach den Experimenten abgelehnt werden.

5. Die Wirkungsweise des Stiftunterbrechers einer mathematischen Formulierung zu unterwerfen, mißlingt infolge von eintretenden Komplikationen sekundärer Art.

6. Bei der experimentellen Prüfung ergibt sich, daß von den verschiedenen Theorien über die Einseitigkeit des Stiftunterbrechers die Stark-Cassutosche maßgebend ist. Die Unipolarität des Stiftunterbrechers ist also durch den im Falle der aktiven Kathode auftretenden Lichtbogen bedingt.

7. Bei Benutzung der elektrolytischen Unterbrecher zum Betriebe von Induktionsapparaten tritt eine wesentliche, durch

1) Die Dissertation enthält als Anhang eine Zusammenstellung der Literatur über die elektrolytischen Unterbrecher.

die Rückwirkung der sekundären Wickelung bedingte Veränderung der Stromkurven auf. Es zeigt sich, daß der Stiftunterbrecher gegenüber dem Lochunterbrecher eine wesentlich größere Schließungsinduktion hat, deren Auftreten für Röntgenzwecke schädlich ist.

Hrn. Prof. Simon, meinem hochverehrten Lehrer, spreche ich auch an dieser Stelle für die Anregung zu dieser Arbeit und das stete fördernde Interesse meinen herzlichsten Dank aus.

Göttingen, Institut für angew. Elektrizität, Dez. 1907.

(Eingegangen 7. Januar 1908.)

4. *Eine Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Luft von 0°; von M. Thiesen.*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Vor einigen Jahren habe ich eine neue Methode zur Bestimmung von Schallgeschwindigkeiten, die Methode des geschlossenen Resonators angegeben. Sie besteht darin, daß man in einem geschlossenen Raume stehende Schwingungen erzeugt und die Frequenz bestimmt, bei welcher ein Maximum der Resonanz eintritt. Obgleich mein unmusikalisches Ohr mich für akustische Versuche wenig geeignet erscheinen läßt, haben die Umstände, namentlich der Zustand meiner Augen, mich veranlaßt, gerade diese Untersuchung weiter zu führen. Die Methode, ursprünglich hauptsächlich für größeren Druck bestimmt, ist zunächst für Atmosphärendruck ausgebildet und auf die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in verschiedenen Gasen bei verschiedenen Temperaturen angewandt worden.

Von den ausgeführten Beobachtungen sind bisher nur die für Kohlensäure bei hohen Temperaturen gewonnenen Relativwerte summarisch und ohne endgültige Bearbeitung veröffentlicht worden.[1]) Im vorliegenden Aufsatze soll nun zunächst eine neuere Beobachtungsreihe mitgeteilt werden, aus der sich die Schallgeschwindigkeit in trockener kohlensäurefreier Luft bei 0° ergibt. Die Resultate dieser Untersuchung in Verbindung mit denen einer ähnlichen noch nicht abgeschlossenen für Kohlensäure werden auch bei der Bearbeitung meiner älteren Versuche verwertet werden können.

---

1) Phys.-Techn. Reichsanstalt, Zeitschr. f. Instrumentenk. 27. p. 112. 1907; vgl. auch 23. p. 114. 1903; 24. p. 133. 1904; 25. p. 102. 1905; 26. p. 111. 1906.

Als Resonator diente ein Messingrohr von 100 cm Länge und 5,6 cm innerem Durchmesser bei 0,2 cm Wandstärke. Das Rohr war auf dem Lager des Fabrikanten besonders ausgesucht worden, um ein möglichst fehlerfreies Rohr mit glatter Innenwandung zu erhalten. Von einer recht merklichen Krümmung konnte es durch Durchdrücken bis auf etwa 0,01 cm befreit werden; nahezu von gleicher Ordnung war die Abweichung des Querschnittes von der genauen Kreisform. Nachdem die Enden sorgfältig abgedreht waren, wurde die genaue Länge des Rohres durch Vergleichung mit dem auf Silber geteilten Messingmeter 1890 bestimmt.

Zu dem Zwecke wurde das Rohr neben das Meter gelegt, dann drückte man gegen seine Enden ebene Glasplatten, die über die Teilung des Meterstabes herüberragten, und bestimmte mikrometrisch den Abstand zwischen den Strichen des Stabes und ihren durch die Glasplatten erzeugten Spiegelbildern. Unter der Annahme gleicher Ausdehnung von Röhre und Stab ergab sich dann mit Rücksicht auf die bekannte Gleichung des Meterstabes

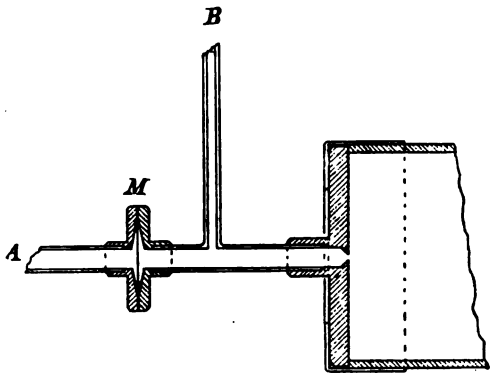
$$\textit{Länge der Röhre bei } 0^0 = 100{,}004 \text{ cm}.$$

Auf die Enden der Röhre wurden nun zwei gleichartige in der Figur in richtigen Verhältnissen wiedergegebene Fassungen aufgesetzt und verlötet; besonders wurde darauf geachtet, daß die Flächen, welche das Rohr abschließen, gut eben waren und genau auf den Rohrenden auflagen; daher wurden die Ringe, welche die Fassungen festhalten, besonders gearbeitet.

Der fertige Resonator wurde in einem Zinkkasten, der mit Eis gefüllt werden konnte, an zwei Stellen auf Holzträger aufgelegt und hier mit Klebwachs befestigt. Von den Rohrenden *A* wurde das eine durch Kautschukschläuche mit der Schallquelle, das andere mit zwei in die Ohren des Beobachters eingeführten Hörern verbunden, wie sie bei dem Edisonschen Phonographen benutzt werden. Die Membranen *M*, welche die Gasfüllung des Resonators von der äußeren Luft abschließen, bestanden aus 0,03 cm starkem Neusilberblech; bei einem Durchmesser von 2 cm ertragen solche Membranen eine Druckdifferenz von einer Atmosphäre; doch muß bei Ausführung der Versuche auf ihren beiden Seiten nahe derselbe

Druck bestehen, wenn der Schall nicht ausgelöscht werden soll. Die Öffnungen, durch welche der Schall in den Resonator eintritt, haben einen Durchmesser von 0,1 cm; eine starke Vergrößerung dieses Durchmessers scheint keinen Einfluß auf Schallstärke und mittlere Tonhöhe zu haben, dagegen das Bereich der Resonanz etwas zu verbreitern.

Die Ansatzröhren *B* dienen zur Füllung des Resonators. Im vorliegenden Falle strich die Luft hintereinander durch eine mit Ätznatronlösung gefüllte Waschflasche, eine lange mit Natronkalk und eine mit Phosphorpentoxyd gefüllte Röhre zum Resonator und wurde dann nach Durchstreichen einer mit konzentrierter Schwefelsäure beschickten Waschflasche durch



eine Wasserluftpumpe abgesaugt. Während der Füllung war ein Fenster des Beobachtungsraumes geöffnet; das Brennen von Gas und nach Möglichkeit auch der Aufenthalt von Menschen vor und während der Füllungen wurde vermieden. Die beiden Waschflaschen an den Enden bewirkten es, daß auch später durch Temperatur- und Barometerschwankungen eine Zirkulation nur im richtigen Sinne stattfinden konnte; sie ließen außerdem erkennen, daß alles vollkommen gedichtet war. Die Verbindungen bestanden aus Glasröhren, von denen immer eine mit ihrem verjüngten Ende in die andere gesteckt war; die sehr engen Fugen wurden durch Chatterton-Compound gedichtet. Nur die Flasche mit Natronlösung war mit einem Gummischlauch angeschlossen, durch Lösen ihres eingeschliffenen

Stöpsels konnte daher vor jeder Beobachtung der Druck ausgeglichen werden.

Als Schallquelle diente eine durch einen Elektromotor angetriebene Sirenenscheibe mit drei Reihen von 60, 80 und 120 Löchern; die Feinregulierung ihrer Geschwindigkeit erfolgte durch mikrometrische Bewegung eines Bremsmagneten. Durch eine Schraube ohne Ende wurde die Bewegung der Scheibe mit 99 mal verminderter Geschwindigkeit auf einen Bügel übertragen, der zweimal bei jeder Umdrehung einen Stromkreis schloß und dadurch eine Marke auf dem Papierstreifen eines Chronographen machte; auf denselben Streifen wurden gleichzeitig die Sekundenmarken einer genau gehenden Uhr und vom Beobachter gegebene Zeichen geschrieben, durch welche namentlich Anfang und Ende einer Beobachtung festgelegt wurden.

In nicht befriedigender Weise war die Forderung erfüllt, dem Resonator einen einfachen, also auch dauernd sich gleichbleibenden Ton zuzuführen. Nach dieser Richtung wäre noch eine erhebliche Verbesserung erwünscht und auch ausführbar, schon eine Vermehrung der Löcherreihen der Sirene würde eine recht merkliche Verbesserung bedingen. Die Schwierigkeit lag zum Teil darin, daß möglichst alle gut hörbaren Resonanztöne der Röhre gemessen und daher sehr verschiedene Schwingungszahlen von 165 bis 2000 in der Sekunde benutzt wurden. Außerdem war eine schnelle Abwechselung zwischen diesen Tönen erwünscht, um bald eine Übersicht über das Resultat zu gewinnen und etwaige Änderungen in der Zusammensetzung der Luft auszuschalten. Man griff daher nicht zu dem zeitraubenden Mittel, eine Zahl der Öffnungen zu verstopfen.

Bei den vorhandenen Löcherreihen erforderten die tiefen Töne so kleine Geschwindigkeiten des Motors, wie sie ursprünglich nicht vorgesehen waren, und dabei ergaben sich bei der früher benutzten Kuppelung zwischen Motor und Sirenenscheibe ganz unerträgliche Stöße von der Periode einer Umdrehung, die von einer Ungleichmäßigkeit des Motors herrührten. Diese Stöße milderte man dadurch, daß die Sirene mit dem Motor durch eine Uhrfeder verbunden wurde, welche beim Lauf durch die Bremsung der Sirenenscheibe gespannt war, natürlich kann

diese lose Kuppelung selbst wieder Schwingungen der Sirenenscheibe verursachen. Nach der Beobachtung Nr. 47 wurde die Feder durch eine härtere ersetzt; nach Nr. 113 wurde der Motor neu montiert, da der Gips, mit dem er auf der Unterlage befestigt wird, gesprungen war; dabei wurde mit größerer Sorgfalt als früher auf das Zusammenfallen seiner Achse mit der der Sirene geachtet.

Bei langsamem Lauf waren die nicht periodischen Unregelmäßigkeiten des nicht genügend belasteten Motors ziemlich groß. Bei schnellem Lauf und starker Bremsung machte sich mehr die systematische von der Erwärmung der Drähte und der Sirenenscheibe herrührende Änderung bemerkbar; doch auch in diesem Falle gelang es nur ausnahmsweise, den Ton längere Zeit während der etwa 3 Minuten währenden Beobachtung festzuhalten. Erschwert wurde die Regulierung der Geschwindigkeit dadurch, daß man keinen festen Anhalt dafür hatte, in welchem Sinne die Regulierung erfolgen sollte und daß man sich nicht der Gefahr aussetzen durfte, beim Verlieren des Tones durch stärkere Änderung nach der falschen Seite die Beobachtung zu verderben. Ein empfindlicher und leicht ablesbarer Anzeiger der augenblicklichen Geschwindigkeit wird wahrscheinlich genügen, um die Beobachtungen bequemer und viel genauer zu machen.

Auch abgesehen von den Änderungen der Motorgeschwindigkeit sind die Töne der benutzten Sirene keineswegs einfach. Die Löcher der Sirene haben 0,2 cm Durchmesser und liegen auf Kreisen von durchschnittlich 20 cm Durchmesser, sind also auch bei der Reihe von 120 Öffnungen verhältnismäßig weit voneinander entfernt. Die Luft strömt gegen diese Öffnungen durch eine etwas abstehende Spitze von weniger als 0,1 cm Öffnung; eine zentrale oder bei neuer Einstellung sich gleichbleibende Lage der Spitze gegen die Öffnungen ist nicht gesichert. Es folgt daraus, daß im allgemeinen alle harmonischen Obertöne des Grundtones aber zu verschiedenen Zeiten in verschiedenen Stärkeverhältnissen vertreten sein mußten. Daneben treten noch starke Nebengeräusche auf, die die eigentlichen Töne beinahe verdecken. Durch einen Resonator von genügendem Durchmesser, wie er hier benutzt wurde, werden nun diese Nebengeräusche bei nicht zu starkem Luftstrom

so weit ausgelöscht, daß sie nicht mehr stören.[1]) Dagegen können die Obertöne der Sirene in zylindrischen Resonatoren zu Fehlern Veranlassung geben, da die Maxima ihrer Resonanz mit dem Maximum der Resonanz des Grundtones nahe zusammenfallen.

Welcher Art solche Fehler sind, ist nicht mit Sicherheit anzugeben. Berücksichtigt man nur die Intensität, so wird man bei der Einstellung dem Maximum der Obertöne näher rücken, also kleinere Zeiten erhalten, läßt man sich mehr durch die Reinheit und Weiche des Tones leiten, so kann umgekehrt die Einstellung nach der anderen Seite hingedrängt werden. Bei den vorliegenden Beobachtungen war die Konstanz der Geschwindigkeit und Empfindlichkeit der Einstellung selten so groß, daß man sich bewußt durch einen oder den anderen dieser Einflüsse leiten lassen konnte.

Es ist möglich, durch Hilfsresonatoren mit unharmonischen Obertönen den Klang der Sirene so weit zu reinigen, daß im wesentlichen nur der Grundton übrig bleibt. Soll aber durch Vorschaltung eines solchen Hilfsresonators das Resultat nicht verfälscht werden, so muß entweder das Maximum des Hilfsresonators sehr scharf mit dem Maximum des Hauptresonators zusammenfallen, oder das Maximum des Hilfsresonators muß sehr breit sein. Resonatoren mit breitem Maximum sind die nach Helmholtz benannten offenen Resonatoren; denkt man sich zwei solche Resonatoren mit ihren Öffnungen aneinander gesetzt, so erhält man einen für unseren Fall brauchbaren Resonator, den ich Doppelresonator nenne. Die Schwingungszahl eines solchen Resonators ist entsprechend der von Helmholtz ausgeführten Theorie proportional mit

$$\sqrt[4]{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{V_1}}+\frac{1}{\sqrt{V_2}}\right\},$$

falls F die Fläche der Öffnung, V_1 und V_2 die Volumina der beiden Kammern sind; für $V_2=\infty$ ergibt sich der einfache Helmholtzsche Resonator.

1) Resonatoren von kleinem Durchmesser schwächen diese Geräusche nicht. Ich schreibe es bis auf weiteres diesem Umstande zu, daß ich mit solchen Resonatoren unbrauchbare Resultate erhalten habe. Auch die Membranen scheinen solche Geräusche, wie von siedender Flüssigkeit, zu veranlassen, wenn sie keinem einseitigen Drucke ausgesetzt sind.

Mit solchen Hilfsresonatoren, deren Abstimmung durc Änderung der Öffnung in der die beiden Kammern trennende Wand erfolgt war, sind einige in den p. 514—518 folgende Tabellen gekennzeichnete Versuche ausgeführt worden. Gu gelungen war die Abstimmung nur für die Töne 3 und 4 Namentlich bei letzterem Tone erschienen die Beobachtunge mit dem Doppelresonator als besonders sicher und bequem eine deutliche Abweichung von den anderen Beobachtunge hat sich nicht ergeben.

Bei Ton 3 war ein zweiter viel tieferer Ton, jedenfall Ton 1 stark zu hören, sobald jener Ton in normaler Weise mit der Reihe von 60 Öffnungen erzeugt wurde. Dieser tief Ton, welcher 20 Schwingungen bei einer Umdrehung ent sprechen würde, rührte direkt vom Motor her und wurde der Resonator durch seine Wandung zugeführt. Er blieb auc bestehen, als nach Nr. 119 der Kollektor des Motors leich geölt gehalten und dadurch das unangenehme von den Kohlen bürsten herrührende Geräusch des Motors fast ganz beseitig wurde.

Die Beobachtungen wurden an den folgenden Tagen meis in Sätzen von vier Beobachtungen, zwischen denen länger Pausen lagen, ausgeführt; die beiläufigen nicht weiter benutzte Barometerstände sind beigefügt. Nach den ersten drei Beob achtungstagen wurde noch jedesmal etwa 6 Stunden lan trockene Luft durch den Resonator geleitet, später fand ein teilweise Lufterneuerung nur durch den Temperatur- und Druck wechsel statt.

1907	Nr.	Barometer
24. Oktober	1—25	75,8 cm
26. „	26—47	75,6 „
31. „	48—70	75,5 „
4. November	71—89	76,6 „
8. „	90—113	76,2 „
16. „	114—133	76,8 „
22. „	134—153	77,0 „

Es soll jetzt über die Berechnung der Beobachtunge berichtet werden.

1) Bei zwei Beobachtungen war die Geschwindigkeit der Siren nur die Hälfte der normalen; hier rührte also Ton 3 von einem Oberto der Sirene her.

Zunächst war für jede einzelne Beobachtung die Schwingungszahl aus dem Abstande der von der Sirene herrührenden Marken zu ermitteln.

Die Lage der Marken zu den Sekundenmarken wurde in Hundertsteln Sekunden aufgenommen; dabei brauchten die ganzen Sekunden nicht gezählt zu werden. Die mittelsten Marken wurden nicht aufgenommen, da ihr Einfluß auf das Ergebnis sehr klein ist; doch war die Zahl der fortgelassenen Marken niemals so groß, daß das Gewicht des Resultates um ein Zehntel verkleinert wurde. Die Berechnung des mittleren Abstandes zweier Marken nach der Methode der kleinsten Quadrate gestaltet sich sehr einfach, da nur die Differenzen der symmetrisch zur Mitte liegenden Marken nach Maßgabe ihrer Gewichte zu verbinden sind, und da die Rechnung als Korrektionsrechnung geführt werden kann. Das folgende Beispiel möge die Rechnung und auch die, allerdings nur bei den besseren Beobachtungen erlangte innere Übereinstimmung erläutern.

8. XI. 07. Nr. 112. 120 Löcher. Ton 11.

I	II	III	IV	V	VI	VII
23	53	00	30	1500	−5	−3
52	28	52	28	1344	−3	−2
78	01	04	27	1242	−3	−2
07	74	56	23	1012	−1	−3
32	48	08	24	1008	−2	−2
62	23	60	21	840	+1	0
87	97	12	22	836	0	0
16	70	64	18	648	+2	0
41	43	16	18	612	+1	−1
69	19	68	18	576	+2	+2
93	91	20	18	540	−1	+1
21	65	72	16	448	+1	+1
50	40	24	14	364	+3	+3
77	14	76	13	312	+4	+3

Hier enthält Kolumne I die Lage der ersten 14, Kolumne II die Lage der letzten 14 in umgekehrter Reihenfolge hingeschriebenen Marken in Hundertsteln Sekunden. Dazwischen sind 23 Marken nicht aufgenommen. Der beiläufige Abstand,

dessen Korrektion berechnet werden soll, beträgt 3,26 Sek. In Kolumne III sind die 50 bis 24fachen geraden Vielfachen von 26, in Kolumne IV die Werte von III+II−I angegeben. Kolumne V enthält die Produkte der Zahlen von Kolumne IV in die geraden Zahlen 50 bis 24. Die Summe dieser Kolumne beträgt 11282; die Summe der geraden Quadrate von 24 bis 50 beträgt 20076; also ist die Korrektion des angenommenen Abstandes in Hundertsteln Sekunden gleich 11282/20076 = 0,562 und dieser selbst gleich 3,26562 Sek. Die im allgemeinen nicht berechneten Kolumnen VI und VII enthalten die übrigbleibenden Fehler der Kolumnen I und II in Hundertsteln der Sekunde. Ein Teil dieser Fehler rührt von einem systematischen Unterschied zwischen der Lage der geraden und ungeraden Marken her, der im vorliegenden Falle, da nur gerade Intervalle auftreten, keinen Einfluß hat, aber auch sonst unberücksichtigt blieb. Außerdem zeigen aber die Fehler im vorliegenden Falle einen deutlichen Gang, aus dem folgt, daß der Motor seine Bewegung verlangsamte; da diese Bewegung beständig reguliert wurde, so hatte also der Beobachter die Neigung, auf immer tiefere Töne einzustellen. Doch gilt dies nur für das vorliegende Beispiel.

Um die verschiedenen so gewonnenen Beobachtungsresultate miteinander vergleichbar zu machen, wurden sie zunächst, falls an Stelle von 120 nur 60 oder 80 Öffnungen der Sirene benutzt waren, mit den Zahlen 2 oder 3/2 und alsdann noch, den verschiedenen Tönen entsprechend, mit einer der Zahlen von 1 bis 12 multipliziert.

Nr.	Löcher	Ton	Intervalle	Resultat	Fehler
1	60	1	10	36,057	+37
2	„	1	10	038	+13
3	„	2	11	002	+48
4	„	2	23	35,994	+40
5	„	2	21	982	+28
6	„	4	46	854	−52
7	„	4	46	835	−71
8	120	8	38	865	− 8
9	„	8	44	915	+42
10	„	9	51	790	−78

Nr.	Löcher	Ton	Intervalle	Resultat	Fehler
11	120	9	47	35,908	+ 40
12	„	9	44	793	− 75
13	„	7	40	924	+ 45
14	„	11	52	832	− 29
15	„	11	46	828	− 33
16	„	7	37	892	+ 13
17	„	7	37	886	+ 7
18	„	6	32	869	− 17
19	„	6	28	832	− 54
20	„	7	37	961	+ 82
21	„	7	30	892	+ 13
22	60	3 [1])	16	920	− 4
23	„	3 [1])	19	36,002	+ 78
24	„	2	23	35,948	− 6
25	„	2	21	886	− 68
26	„	4	37	898	− 8
27	„	4	41	872	− 34
28	„	1	11	36,084	+ 64
29	„	1	7	002	− 18
30	„	2	21	036	+ 82
31	„	2	21	35,997	+ 43
32	„	4	46	853	− 53
33	„	4	43	968	+ 62
34	„	3	25	945	+ 21
35	„	3	31	939	+ 15
36	120	5	24	839	− 55
37	„	5	25	878	− 16
38	„	6	27	969	+ 83
39	„	6	30	890	+ 4
40	„	8	42	899	+ 26
41	„	8	40	871	− 2
42	„	9	31	775	− 98
43	„	9	25	782	− 86
44	„	6	32	36,226 [2])	[+340]
45	„	6	33	35,918	+ 32
46	„	5	25	905	+ 11
47	„	5	22	880	− 14
48	60	1	9	920	−100
49	„	1	11	944	− 76

1) Oberton der Sirene.
2) Bei der Berechnung ausgeschlossen.

Nr.	Löcher	Ton	Intervalle	Resultat	Fehler
50	60	2	18	35,868	− 86
51	„	2	21	867	− 87
52	80	3	26	904	− 20
53	„	3	26	896	− 28
54	60	4	43	872	− 34
55	„	4	37	880	− 26
56	80	6	50	867	− 19
57	„	6	49	892	+ 6
58	„	6	47	889	+ 3
59	„	6	49	868	− 18
60	„	7	53	824	− 55
61	„	7	56	868	− 11
62	120	8	42	864	− 9
63	„	8	24	866	− 7
64	„	9	47	893	+ 25
65	„	9	44	869	+ 1
66	„	10	28	880	+ 16
67	„	10	47	816	− 48
68	„	11	52	852	− 9
69	„	11	50	902	+ 41
70	„	12	40	857	− 1
71	60	1	10	36,074	+ 54
72	„	1	11	077	+ 57
73	„	2	22	006	+ 52
74	„	3	33	35,969	+ 45
75	„	3	33	930	+ 6
76	„	4	50	879	− 27
77	„	4	42	907	+ 1
78	„	5	51	878	− 16
79	80	6	47	879	− 7
80	„	6	51	895	+ 9
81	„	7	58	877	− 2
82	120	7	36	941	+ 62
83	„	8	29	998 [1])	[+125]
84	„	9	46	887	+ 19
85	„	10	53	895	+ 31
86	„	11	33	923	+ 62
87	„	10	28	886	+ 22
88	„	9	41	897	+ 29
89	„	9	36	886	+ 18

1) Von der Berechnung ausgeschlossen.

Nr.	Löcher	Ton	Intervalle	Resultat	Fehler
90	60	1	12	36,046	+ 26
91	„	1	12	021	+ 1
92	„	3	31	35,953	+ 29
93	„	3	32	965	+ 41
94	„	5	48	863	− 31
95	„	5	40	883	− 11
96	„	5	51	861	− 33
97	„	5	52	866	− 28
98	80	7	58	867	− 12
99	„	8	47	890	+ 17
100	„	8	52	877	+ 4
101	„	8	47	886	+ 13
102	120	10	41	877	+ 13
103	„	10	41	874	+ 10
104	„	11	32	875	+ 14
105	„	11	35	888	+ 27
106	„	11	43	871	+ 10
107	„	11	45	846	− 15
108	„	10	39	874	+ 10
109	„	10	40	887	+ 23
110	„	11	46	898	+ 37
111	„	11	53	935	+ 74
112	„	11	50	922	+ 61
113	„	11	55	857	− 4
114	60	4	43	852	− 54
115	„	4	39	888	− 18
116	„	4	40	883	− 23
117	„	4	44	884	− 22
118	„	4	41	887	− 19
119	„	4	40	882	− 24
120	„	4	40	905	− 1
121	„	4 [1]	44	857	− 49
122	„	3	31	922	− 2
123	„	3	31	907	− 17
124	„	3	32	816	−108
125	„	3	30	918	− 6
126	120	10	63	898	+ 34
127	„	10	52	853	− 11
128	„	10	44	845	− 19
129	„	10	36	861	− 3

1) Mit Hilfsresonatoren.

Nr.	Löcher	Ton	Intervalle	Resultat	Fehler
130	120	9	48	35,841	− 27
131	„	9	39	854	− 14
132	„	11	45	850	− 11
133	„	11	50	847	− 14
134	60	3	38	896	− 28
135	„	3	36	876	− 48
136	„	3	35	36,016	+ 92
137	„	4	50	35,948	+ 42
138	„	2	21	986	+ 32
139	„	2	23	969	+ 15
140	„	2	22	953	− 1
141	„	2	15	968	+ 14
142	„	1	12	36,122	+102
143	„	1	11	017	− 3
144	„	1	11	039	+ 19
145	„	1	10	057	+ 37
146	„	2 [1]	22	024	+ 70
147	„	2	21	35,903	− 51
148	„	2	21	973	+ 19
149	„	2	22	942	− 12
150	120	11	53	876	+ 15
151	„	11	49	857	− 4
152	„	11	51	875	+ 14
153	„	11	56	871	+ 10

Die so erhaltenen Zahlen, in dem oben durchgeführten Beispiele also $11 \times 3{,}26562 = 35{,}922$, sind in den Tabellen p. 514—518 als Resultat eingetragen; sie sollen weiterhin mit z bezeichnet werden. Die Tabellen enthalten ferner noch die laufende Nummer der Beobachtung, die Zahl der benutzten Öffnungen der Sirene, die Ordnungszahl des Tones, die weiterhin mit n bezeichnet werden möge, die Zahl der während der Beobachtung registrierten Intervalle und den Unterschied zwischen Beobachtung und der sogleich zu erläuternden Schlußrechnung.

Aus den Werten von z, die demselben Tone zugehören, wurden Mittel gebildet, die in der Tabelle p. 519 mit ihrem mittleren Fehler als beobachtet angeführt sind. Zwei von

1) Mit Hilfsresonatoren.

den 153 Beobachtungen, die stark abweichen und sich auch außerdem als verfehlt kennzeichnen, sind von der Berechnung ausgeschlossen worden.

Die Werte von z zeigen eine deutliche Abhängigkeit von n und stehen in genügender Übereinstimmung mit der Forderung der Theorie, daß z eine lineare Funktion von $n^{-1/2}$ sei. Nur ergibt sich der Einfluß der Schwingungszahl etwa 0,4 mal größer als er sich aus den bisher veröffentlichten Theorien und den genügend bekannten Werten der Reibungs- und Wärmeleitungskoeffizienten der Luft ableiten läßt. Aber auch dies Resultat steht in voller Übereinstimmung mit anderen, nach den Methoden von Kundt und Quincke ausgeführten Beobachtungen, und wird, wie ich glaube, durch den bisher nicht berücksichtigten Übertritt der Schallwellen in die Röhrenwandung erklärt. In der vorliegenden Arbeit beschränke ich mich darauf, anzunehmen, daß die Form der Abhängigkeit feststeht, und daß das für $n = \infty$ extrapolierte z der wahren Schallgeschwindigkeit entspricht und werde die beiden Konstanten aus den Versuchen selbst ableiten.

n	z beobachtet	Gewicht	z berechnet	Fehler
1	36,035 ± 14	5	36,020	+15
2	35,961 12	11	35,954	+ 7
3	928 11	14	924	+ 4
4	884 7	19	906	−22
5	873 6	10	894	−21
6	888 10	13	886	+ 2
7	893 11	13	879	+14
8	881 6	12	873	+ 8
9	848 14	17	868	−20
10	870 7	18	864	+ 6
11	874 7	28	861	+13
12	857 —	2	858	− 1

$$z = \underset{\pm 58}{35{,}7927} + \underset{\pm 127}{0{,}2276}\, n^{-1/2}.$$

Wahrscheinlicher Fehler der Gewichtseinheit = ± 0,0248.

Dabei entsteht die Frage, welches Gewicht den einzelnen Mittelwerten von z zuzulegen sei. Um diese Werte aus den mittleren Fehlern abzuleiten, reicht wohl die Zahl der Beob-

achtungen nicht hin, andererseits sind im Durchschnitt die Beobachtungen bei kleinen n entschieden unsicherer als bei den größeren. Ich habe angenommen, daß das Fehlerquadrat einer Beobachtung eine lineare Funktion von n^{-1} sei und daß der Fehler für $n = 11$ nur halb so groß sei als für $n = 1$, und demnach die Gewichte, wie sie in der Tabelle p. 519 angegeben sind, dadurch erhalten, daß ich die Zahl der Beobachtungen mit

$$\frac{1{,}5}{0{,}7 + 3{,}3\, n^{-1}}$$

multipliziert habe. Beim Tone 4 hat dann eine Beobachtung etwa die Einheit des Gewichtes.

Mit diesen Gewichten ist nun die endgültige Rechnung ausgeführt worden, deren Resultat die Tabelle p. 519 enthält; die gegen diese Rechnung übrig bleibenden Fehler der Einzelbeobachtungen sind in der letzten Kolonne der Tabellen p. 514 bis 518 enthalten.

Über die rechnungsmäßige Zuverlässigkeit des Resultates möge bemerkt werden, daß der angegebene wahrscheinliche Fehler des ersten Koeffizienten von z hauptsächlich von der Unsicherheit des zweiten Koeffizienten herrührt, wäre dieser Koeffizient bekannt, so würde sich der Fehler auf $^1/_3$ ermäßigen. Die Zahl der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen der Fehler in Tabelle p. 519 ist annähernd gleich; auffällig ist nur der große Fehler des anscheinend sehr sicher bestimmten Wertes $n = 4$. Auf eine Diskussion der Fehler der Einzelbeobachtungen soll nicht eingegangen werden.

Der erste Koeffizient von z ist die korrigierte Zeit, in welcher $99 \times 120/2$ Schwingungen ausgeführt wurden; die zugehörige Wellenlänge ist $2 \times 100{,}004$ cm. Daraus folgt der Wert für die Schallgeschwindigkeit der trockenen kohlensäurefreien Luft bei 0° gleich

$$33192 \pm 5 \text{ cm/sec.}$$

Inwieweit dieser Wert noch mit konstanten Fehlern behaftet ist, muß zunächst unentschieden bleiben, meine älteren Versuche mit kürzeren Resonatoren würden auf einen größeren Wert führen, doch waren dort systematische Fehler weniger ausgeschlossen, als bei der jetzt vorliegenden Reihe.

(Eingegangen 15. Januar 1908.)

5. *Gesetze der Kompression einer Hohlraumstrahlung durch eine „semipermeable" Platte; von Fritz Reiche.*

(Gekürzter Abdruck der Berliner Dissertation.)

Einleitung.

In der Abhandlung „Über Temperatur und Entropie der Strahlung" von W. Wien[1]) findet sich am Schlusse folgende Betrachtung:

„Es läßt sich auch die Folgerung ziehen, daß man nicht auf die Energie einzelner Farben in der Wärmestrahlung verändernd einwirken kann.

So darf keine Platte existieren, die nur Strahlen, deren Farbe zwischen zwei bestimmten Wellenlängen liegt, *vollkommen* hindurchläßt, alle übrigen *vollkommen* reflektiert, unabhängig von der Richtung der Strahlen. Man könnte durch eine solche Platte die Strahlung eines schwarzen Körpers in zwei Teile teilen; die Bewegung der Platte würde dann die Farbe und Energie der durchgelassenen Strahlung nicht verändern, dagegen die übrigen in der bereits betrachteten Weise.[2]) Wählen wir die Platte so, daß die Wellenlängen $\lambda = a$ und $\lambda = b$, welche die Farbe der hindurchgelassenen Energie abgrenzen, auf der Seite des Maximums der Energieverteilung liegen, wo die Intensität nach den langen Wellen hin stark abfällt.

Sei $b > a$. Auf der Seite der Platte, wo die Strahlung zusammengedrückt wird, verkürzen sich alle Wellenlängen, die nicht zwischen a und b liegen, und die Energie der Farben, deren Wellenlänge etwas größer als b ist, erhalten jetzt Wellenlängen, die zwischen a und b fallen und sich daher durch den ganzen Raum frei ausbreiten. Ebenso würden bei a die anliegenden Farben von kürzerer Wellenlänge der sich

1) W. Wien, Wied. Ann. 52. p. 132. 1894.

2) Durch den Dopplereffekt.

ausdehnenden Strahlung zwischen a und b fallen und sich durch die Platte hindurch verteilen. Da nun $\varphi_a > \varphi_b$ [1]), so würde mehr Energie von der Seite, wo die Strahlung sich ausdehnt, nach der anderen Seite gelangen, als umgekehrt. Dieser Überschuß würde sich zu dem sonst vorhandenen, durch Zusammendrücken entstandenen Überschuß der Dichtigkeit addieren und mit diesem zusammen auf einen vollkommenen Spiegel drücken, der an die Stelle der Platte gesetzt wird.

Wenn man mit dem Spiegel den Weg der Platte in umgekehrter Richtung zurücklegt, würde man demnach mehr Arbeit erhalten, als man für die Bewegung der Platte aufgebracht hat, und außerdem noch eine Farbenänderung zurückbehalten.

Man darf daher einer solchen Lamelle nur solche Eigenschaften zuschreiben, wie es von Kirchhoff geschieht, daß sie Strahlung einer Farbe *vorzugsweise* hindurchläßt, die anderen *vorzugsweise* zurückwirft, wobei aber immer ein endliches Verhältnis zwischen durchgelassenen und zurückgeworfenen Strahlen besteht. Dann ist der erörterte Prozeß nicht möglich."

Diese Folgerung ist auffallend. Denn der oben aufgestellte Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz ist an bestimmte Wertepaare (a, b) geknüpft. Wählt man das Paar a und b so, daß $\varphi_b > \varphi_a$, was man sicher kann, so würde nach dem obigen mehr Energie von der Seite, wo die Strahlung komprimiert wird, nach der anderen gehen, als umgekehrt. Legt man nun den Weg der Platte mit einem Spiegel in umgekehrter Richtung zurück, so würde man sicher nicht mehr Arbeit gewinnen, als man für die Bewegung der Platte aufgewendet hat (möglicherweise müßte man sogar wiederum Arbeit aufwenden); der Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz wäre dann nicht mehr vorhanden. Wir wären damit zu dem merkwürdigen Ergebnis gelangt, daß die Forderungen des zweiten Hauptsatzes durch Platten von *gewisser* Durchlässigkeit verletzt, durch Platten von *anderer* Durchlässigkeit dagegen *nicht* verletzt werden. Wir würden also, da wir die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes für die Strahlungstheorie *allgemein* aufrecht erhalten wollen, mit Notwendigkeit dazu

1) φ_λ ist die monochromatische Strahlungsintensität der Farbe λ.

geführt werden, beschränkende Annahmen einzuführen. Zwei Wege ständen uns dabei zur Verfügung:

1. Man schließt die Wertepaare (a, b), die zu einem Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz führen, von der Betrachtung aus, d. h. man beschränkt zahlenmäßig die Durchlässigkeit der Platte. Die Durchlässigkeit ist nun aber eine in sehr weiten Grenzen variierende Eigenschaft von großer Allgemeinheit; eine durch die Theorie geforderte, zahlenmäßige Einschränkung wäre daher zum mindesten höchst unwahrscheinlich.

2. Man stellt (wenigstens in Form einer Ungleichung) eine Beziehung zwischen φ_λ und λ (also ein Energieverteilungsgesetz) auf, die ein für allemal für die Erfüllung der Forderungen des zweiten Hauptsatzes garantiert.

Es lohnt sich daher, im Interesse der Theorie, die Frage näher zu untersuchen, ob wirklich, wie W. Wien geschlossen hat, die theoretische Annahme der oben geschilderten Platte zu einem Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz führt. Diese Untersuchung ist im folgenden versucht.

Es sind dabei hier, im wesentlichen, nur die Resultate angegeben. In betreff der ausführlichen Rechnungen verweise ich auf die Originalarbeit.[1])

§ 1.

Wir stellen uns das Problem so:

Gegeben sei ein sehr großes, sehr breites Gefäß vom Volumen $2V$, das für Wärme undurchlässig ist, und dessen Boden und Decke weiß sind. Die anderen Wände seien vollkommen spiegelnd. Das Gefäß sei evakuiert und erfüllt mit „schwarzer Strahlung von der Temperatur T“, d. h. mit der im thermodynamischen Gleichgewicht befindlichen Strahlung, die ein vollkommen schwarzer Körper von der absoluten Temperatur T ausstrahlt.

In der Mitte des Gefäßes, parallel zu Boden und Decke und von derselben Größe, befinde sich ein Stempel, der nach beiden Seiten absolut spiegelt. Dieser Stempel wird sich unter

1) Gesetze der Kompression einer Hohlraumstrahlung durch eine „semipermeable“ Platte. Inauguraldissertation. Druck von E. Ebering, Berlin.

dem Druck der von beiden Seiten ihn treffenden Strahlungen im Gleichgewicht befinden.

Wir ersetzen nun diesen Stempel durch eine Platte der oben erwähnten Beschaffenheit. Es ist dies also eine Platte, die, *wenn sie ruht*, Strahlen von allen Schwingungszahlen zwischen $\nu = a$ und $\nu = b$ unabhängig von ihrer Richtung (und ihrem Polarisationszustand) ungehindert vollständig hindurchläßt, alle anderen reflektiert. Es sei $b > a$.

Wir führen mit dieser Platte während der kleinen Zeit dt eine Bewegung *nach unten* aus mit der sehr kleinen Geschwindigkeit v. (Diese Bewegung wird in dem Augenblick begonnen, wo man sich den Spiegel durch die Platte ersetzt denkt.) Ist F die Fläche der Platte und l die halbe Höhe des Gefäßes, also $V = F.l$, dann soll dt der einschränkenden Bedingung

(1) $$c\,dt < 2l - v\,dt$$

oder

$$dt < \frac{2l}{v + c}\,.$$

unterliegen, wenn $c = 3.10^{10}$ cm/sec die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Strahlung im Vakuum ist. Diese Bedingung drückt aus, daß ein Strahl während der Zeit dt nicht zweimal an die bewegte Platte gelangt.

Wir wählen, um die Behandlung des Problems zu vereinfachen, v so klein gegen c, daß in den definitiven Resultaten Glieder der Ordnung v^3/c^3 und Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden können; wir berücksichtigen dagegen die Glieder der Ordnung v/c und v^2/c^2.

Nachdem wir die Bewegung mit unserer Platte ausgeführt haben, denken wir uns die Platte wieder durch den früheren Stempel ersetzt und warten, bis die durch die Bewegung in der Strahlung entstandenen Unregelmäßigkeiten und Vorzugsrichtungen sich ausgeglichen haben. Dieser Ausgleich wird durch die weißen Wände beschleunigt. Wir wählten das Gefäß sehr breit, um den Einfluß der Grenzen der Platte vernachlässigen zu können. Dies ist immer möglich.

Die Strahlung war im Anfang „schwarz" und daher durch ihr Volumen und ihre Temperatur eindeutig definiert. Und zwar ist die gesamte im Gefäß enthaltene Energie der Strahlung

$$U = U_1 + U_2\,,$$

wo U_1 die Energie der Strahlung unter dem Stempel, U_2 die Energie der Strahlung über dem Stempel ist. Nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz ist

$$U_1 = V.u_1 = V C_0 T^4,$$
$$U_2 = V.u_2 = V C_0 T^4.$$

Dabei ist C_0 eine von der Temperatur unabhängige Konstante, u_1 und $u_2 = u_1$ sind die räumlichen Energiedichten der Strahlungen unter und über dem Stempel. Also

$$U = 2 V C_0 T^4. \tag{2}$$

Ebenso schreiben wir der Strahlung eine gewisse Entropie zu

$$S = S_1 + S_2 = 2 V. \tfrac{4}{3} C_0 T^3. \tag{3}$$

Bei der Bewegung unserer Platte werden nun diese Größen gewisse Änderungen erleiden, die zu berechnen wir uns zur Aufgabe stellen. Wir können von vornherein sehen, daß nach dem ersten Hauptsatz die Beziehung gelten muß:

$$dU = A + Q,$$

wo A die von außen an unserem System geleistete Arbeit, Q die von außen unserem System zugeführte Wärme bedeuten. Nun ist hier $Q = 0$, denn wir haben im Verlauf der Bewegung Wärme weder zu- noch abgeführt. Daher ergibt sich:

$$\underline{dU = A}, \tag{4}$$

d. h. die Änderung der Gesamtenergie unseres Systems ist gleich der von außen an der Strahlung geleisteten Arbeit.

Man könnte versucht sein, zu glauben, A müsse hier den Wert 0 haben, da man ja auf beiden Seiten der Platte anfänglich die gleiche Strahlung hat. Wir werden indes später sehen, daß dies nur in einem gewissen Spezialfall zutrifft: wenn nämlich v so klein gewählt ist, daß man in den definitiven Resultaten nur bis zu Gliedern von der Ordnung v/c entwickelt.

§ 2.

Während ihrer Bewegung wird die Platte von oben und unten, aus allen Richtungen, von Strahlen aller Schwingungszahlen zwischen $\nu = 0$ und $\nu = \infty$ getroffen.

Die Neigung dieser Strahlen gegen die Ebene der Platte sei $90^0 - \vartheta_1$; ϑ_1 ist also der „Einfallswinkel"; das Azimut dieses Strahles gegen eine feste Ebene sei φ. Dann sieht man ohne weiteres, daß φ variiert von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$. Würde die Platte ruhen, so würde über ihr und unter ihr ϑ_1 variieren zwischen 0 und $\pi/2$. Diese Verhältnisse werden aber durch die Bewegung der Platte modifiziert.

Strahlen, die die Platte *von oben* treffen und unter einem Winkel ϑ_1 einfallen, der größer ist als

$$\frac{\pi}{2} - \text{arc sin}\,\frac{v}{c},$$

erreichen, wie man leicht sieht, die vor ihnen gleichsam fliehende Platte nicht mehr. Es variiert daher ϑ_1 über der Platte von

$$\vartheta_1 = 0 \text{ bis } \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} - \text{arc sin}\,\frac{v}{c}$$

Analog folgt, daß ϑ_1 unter der Platte von

$$\vartheta_1 = 0 \text{ bis } \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} + \text{arc sin}\,\frac{v}{c}$$

variieren kann, da auch Strahlen, die von der Platte weggehen, von ihr noch eingeholt werden.[1])

Ein Teil der Strahlen, die auf die Platte fallen, geht ungehindert hindurch, der Rest wird vollständig reflektiert.

Es sei ν_1 die Schwingungszahl eines unter dem Einfallswinkel ϑ_1 *von unten* auf die Platte fallenden Strahles. Die Zahl ν_1 wird gemessen durch die Anzahl der Wellen, die in der Zeiteinheit durch eine *ruhende*, zum Strahl senkrechte Ebene tritt. Fällt aber nun dieser Strahl auf die mit der Geschwindigkeit v sich ihm entgegenbewegende Platte, und denken wir uns mit dieser Platte fest verbunden einen Beobachter, der wiederum die Anzahl der ihn in der Zeiteinheit treffenden Wellen zählt, so wird für den Beobachter auf der Platte, oder, wie wir kurz sagen können, für die Platte der Strahl nicht mehr die Schwingungszahl (Farbe) ν_1 haben, son-

1) Vgl. F. Hasenöhrl, Über den Druck des Lichts. Jahrbuch der Radioaktivität u. Elektronik 2. p. 301. 1905.

dern eine größere, und zwar nach dem Dopplerschen Prinzip die Schwingungszahl

$$\nu' = \nu_1 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta_1\right). \tag{5}$$

Fällt dieses ν' ins Intervall $a \ldots b$, dann passiert der Strahl der Schwingungszahl ν_1 die Platte ungehindert. Liegt aber ν' außerhalb dieses Intervalls, so wird dieser Strahl vollständig reflektiert, und zwar unter einem Winkel ϑ_2, der im allgemeinen von ϑ_1 verschieden ist. Zählt man nun wiederum an einer ruhenden Ebene die Anzahl der Wellen, die auf dem reflektierten Strahl in der Zeiteinheit die Ebene passieren, so findet man eine Zahl ν_2, die wir die „Schwingungszahl des reflektierten Strahls" nennen, und die mit ν', dem vorigen analog, durch die Beziehung des Dopplerschen Prinzips verknüpft ist:

$$\nu' = \nu_2 \left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta_2\right).$$

Setzt man hier für ν' den Wert aus (5) ein, so folgt:

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta_1}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta_2}. \tag{6}$$

Um ϑ_2 als Funktion von ϑ_1 allein auszudrücken, benutzen wir noch die Beziehung[1]):

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{\cos \vartheta_1 + \frac{v}{c}}{\cos \vartheta_1 - \frac{v}{c} \cos (\vartheta_1 + \vartheta_2)}. \tag{7}$$

Eliminiert man nun ν_2 / ν_1 aus (6) und (7), so ergibt sich leicht:

$$\frac{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta_1}{1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta_2} = \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{\nu_2}{\nu_1}. \tag{8}$$

Diese Gleichung läßt sich auch direkt aus der Theorie des Strahlungsdruckes auf bewegte Flächen ableiten.[2]) Durch

1) Vgl. M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung p. 74.

2) M. Abraham, Elektromagnetische Theorie der Strahlung p. 346; F. Hasenöhrl, Über den Druck des Lichts. Jahrbuch der Radioaktivität u. Elektronik. p. 284, 285.

eine geringe Umwandlung erhält man aus (8) die Beziehung

$$\frac{1+\frac{v}{c}\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_1+\frac{v}{c}} = \frac{1-\frac{v}{c}\cos\vartheta_2}{\cos\vartheta_2-\frac{v}{c}} \tag{9}$$

und hieraus:

$$\cos\vartheta_2 = \frac{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\cos\vartheta_1 + 2\frac{v}{c}}{1+2\frac{v}{c}\cos\vartheta_1+\frac{v^2}{c^2}} \tag{10}$$

Man sieht also, daß ϑ_2, der Reflexionswinkel, im allgemeinen von ϑ_1, dem Einfallswinkel, verschieden ist, und zwar ist $\vartheta_2 < \vartheta_1$. ϑ_1 variiert, wie wir oben sahen, von

$$\vartheta_1 = 0 \text{ bis } \vartheta_1 = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{v}{c};$$

daher variiert ϑ_2 von

$$\vartheta_2 = 0 \text{ bis } \vartheta_2 = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{v}{c}.$$

Setzt man den in (10) erhaltenen Wert für $\cos\vartheta_2$ in (6) ein, so folgt:

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{1+2\frac{v}{c}\cos\vartheta_1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{11}$$

Hiermit ist ν_2/ν_1 als Funktion von ϑ_1 allein ausgedrückt.

Es sei $\mathfrak{R}_\nu$ die Strahlungsintensität (Helligkeit) der monochromatischen geradlinig polarisierten Schwingung der Farbe ν. Betrachten wir die unter dem Winkel ϑ_1 von unten auf die Platte fallende unpolarisierte Strahlung der Farbe ν_1, so ist die Energiemenge, die diese Strahlung in der Zeit 1 durch die Flächeneinheit einer ruhenden, zur absoluten Strahlrichtung senkrechten Ebene sendet (die sogenannte „absolute einfallende Strahlung")

$$E_1 = 2\,\mathfrak{R}_{\nu_1}\, d\nu_1 \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, d\varphi. \tag{12}$$

Die „absolute reflektierte Strahlung" ist analog:

$$E_2 = 2\,\mathfrak{R}_{\nu_2}\, d\nu_2 \sin\vartheta_2\, d\vartheta_2\, d\varphi. \tag{13}$$

Demnach sind die auf die Flächeneinheit der bewegten Platte in der Zeit 1 auffallenden bzw. von ihr reflektierten Energiemengen

(14) $$I_1 = E_1 \left(\cos \vartheta_1 + \frac{v}{c}\right) \text{ auffallend,}$$

(15) $$I_2 = E_2 \left(\cos \vartheta_2 - \frac{v}{c}\right) \text{ reflektiert.}$$

Also

(16) $$I_1 = 2\,\mathfrak{K}_{\nu_1}\, d\nu_1 \sin \vartheta_1 \left(\cos \vartheta_1 + \frac{v}{c}\right) d\vartheta_1\, d\varphi\,.$$

Außer der elektromagnetischen Theorie folgt nun, daß der Strahlungsdruck keine tangentiellen Kräfte auf den vollkommenen Spiegel ausübt.[1]) Es ist daher stets

$$\frac{I_1 \sin \vartheta_1}{c} - \frac{I_2 \sin \vartheta_2}{c} = 0$$

oder

(17) $$I_1 \sin \vartheta_1 = I_2 \sin \vartheta_2\,.$$

Daher nach (8)

(18) $$I_2 : I_1 = \nu_2 : \nu_1$$

und nach (11)

(19) $$I_2 = 2\,\mathfrak{K}_{\nu_1}\, d\nu_1 \sin \vartheta_1 \left(\cos \vartheta_1 + \frac{v}{c}\right) \frac{1 + 2\,\frac{v}{c}\cos \vartheta_1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, d\vartheta_1\, d\varphi\,.$$

Eine andere Form von I_2 folgt aus (13) und (15):

$$I_2 = 2\,\mathfrak{K}_{\nu_2}\, d\nu_2 \sin \vartheta_2 \left(\cos \vartheta_2 - \frac{v}{c}\right) d\vartheta_2\, d\varphi\,.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (16), so ergibt sich unter Benutzung von (18), (8), (9) und der aus den beiden letzteren durch Differentiation folgenden Beziehung

$$\frac{d\vartheta_1}{d\vartheta_2} = \frac{\nu_2}{\nu_1}$$

das Resultat

$$\mathfrak{K}_{\nu_1}\, d\nu_1 : \mathfrak{K}_{\nu_2}\, d\nu_2 = \nu_1^{\,4} : \nu_2^{\,4}$$

oder

$$\mathfrak{K}_{\nu_1} : \mathfrak{K}_{\nu_2} = \nu_1^{\,3} : \nu_2^{\,3}\,,$$

d. h. die monochromatischen Intensitäten der beiden Strahlenbündel verhalten sich wie die dritten Potenzen der Schwingungszahlen.

Alle bisher abgeleiteten Formeln gelten für den Raum *unter der Platte*. Man erhält aus diesen die für die Strahlung *über der Platte* geltenden Formeln einfach durch Vertauschung

1) M. Abraham, Elektromagnet. Theorie der Strahlung, p. 333, 334.

von $+v/c$ mit $-v/c$. Die in (11) und (19) gewonne Resultate vereinfachen sich, wenn man nach Potenzen von entwickelt und, gemäß der oben eingeführten Annahme, Gli der Ordnung v^3/c^3 und Glieder von höherer Ordnung fortl Es ergeben sich dann die Formeln

$$(11\,a) \qquad \nu_2 = \nu_1 \left(1 + 2\,\frac{v}{c}\cos\vartheta_1 + 2\,\frac{v^2}{c^2}\right),$$

$$(19\,a) \quad I_2 = 2\,\mathfrak{K}_{\nu_1}\, d\nu_1 \sin\vartheta_1 \left(\cos\vartheta_1 + \frac{v}{c}\right)\left(1 + 2\,\frac{v}{c}\cos\vartheta_1 + 2\,\frac{v^2}{c^2}\right) d\vartheta$$

während (5) und (16) unverändert bleiben.

Ebenso gelten für die Strahlung *über der Platte* Formeln

$$(20) \qquad \nu' = \nu_1 \left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta_1\right),$$

$$(21) \qquad \nu_2 = \nu_1 \left(1 - 2\,\frac{v}{c}\cos\vartheta_1 + 2\,\frac{v^2}{c^2}\right),$$

$$(22) \qquad I_1 = 2\,\mathfrak{K}_{\nu_1}\, d\nu_1 \sin\vartheta_1 \left(\cos\vartheta_1 - \frac{v}{c}\right) d\vartheta_1\, d\varphi,$$

$$(23) \quad I_2 = 2\,\mathfrak{K}_{\nu_1}\, d\nu_1 \sin\vartheta_1 \left(\cos\vartheta_1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 - 2\,\frac{v}{c}\cos\vartheta_1 + 2\,\frac{v^2}{c^2}\right) d\vartheta$$

§ 3.

Es soll zuerst die Energie, die während der Zeit dt ü haupt durch die Platte hindurchgeht, berechnet werden. betrachten die Strahlung unter und über der Platte getre

Ein Strahl der Schwingungszahl ν, der von unten u dem Winkel ϑ auffällt, erscheint an der bewegten Platte von der Schwingungszahl $\nu\,(1 + v/c\cos\vartheta)$ nach (5). L $\nu(1 + v/c\cos\vartheta)$ zwischen a und b, dann geht die Ene der Farbe ν ungehindert durch die Platte. Nun variiert, wir oben sahen, ϑ zwischen 0 und $\pi/2 + \arcsin v/c$, nimmt $\nu(1 + v/c\cos\vartheta)$ alle Werte an zwischen $\nu(1 - v$ und $\nu(1 + v/c)$.

Je nachdem dieses Intervall ganz außerhalb, ganz in halb, oder drittens zum Teil außerhalb, zum Teil innerhalb Intervalls $a \ldots b$ liegt, wird die Energie der entsprechend gar nicht, d. h. unter keinem Winkel ϑ, vollständig, d. h. u allen ϑ von 0 bis $\pi/2 + \arcsin v/c$, oder zum Teil hindu gelassen. Im letzten Falle existiert ein Grenzwinkel ϑ,

den größten bzw. kleinsten Einfallswinkel der Strahlen bestimmt, die die Platte passieren können.

Um daher I_{12}, die von unten nach oben durch die Platte tretende Energie, zu berechnen, teilt man die Gesamtheit der ν von 0 bis ∞ in einzelne Intervalle, integriert für jedes dieser Intervalle den sich aus (16) ergebenden Ausdruck

$$2\,\mathfrak{K}_\nu\, d\nu\, F\, dt\, d\varphi \sin\vartheta \left(\cos\vartheta + \frac{r}{c}\right) d\vartheta$$

nach ϑ, wobei die Grenzen der Integration sich aus der obigen Betrachtung ergeben, und führt schließlich die Integrationen nach φ (von 0 bis 2π) und ν aus.

Bildet man nun ebenso I_{21}, die von oben nach unten durch die Platte tretende Energie, indem man einfach v/c mit $(-v/c)$ vertauscht, so ergibt sich durch Subtraktion der Überschuß der von unten nach oben gehenden Energie über die von oben nach unten durch die Platte tretende:

$$\begin{aligned} I_{12} - I_{21} = &\int_{\nu=a\left(1-\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}\right)}^{a\left(1+\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}\right)} 2\pi F\, dt\, \mathfrak{K}_\nu\, d\nu \left\{1+2\frac{v}{c}-2\left(\frac{a}{\nu}-1\right)-\frac{c^2}{\nu^2}\left(\frac{a}{\nu}-1\right)^2\right\}, \\ &+\int_{a\left(1+\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}\right)}^{b\left(1-\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}\right)} 8\pi F\, dt\, \mathfrak{K}_\nu\, d\nu\, \frac{v}{c} \\ &-\int_{b\left(1-\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}\right)}^{b\left(1+\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}\right)} 2\pi F\, dt\, \mathfrak{K}_\nu\, d\nu \left\{1-2\frac{v}{c}-2\left(\frac{b}{\nu}-1\right)-\frac{c^2}{\nu^2}\left(\frac{b}{\nu}-1\right)^2\right\}. \end{aligned}$$

Das erste und dritte Integral erstrecken sich über Gebiete der Größe $2a(v/c)$ bzw. $2b(v/c)$. Es tritt also in beiden v/c als Faktor auf. Im zweiten Integral steht v/c bereits als Faktor da. Wir gehen daher in der Berechnung der Integrale nur bis zu Gliedern der Ordnung v/c, weil die Glieder der Ordnung v^2/c^2, durch Multiplikation mit dem Faktor v/c, Glieder von der Ordnung v^3/c^3 liefern würden.

Nach Ausführung der Rechnung erhält man:

$$(24) \qquad I_{12} - I_{21} = 8\pi F dt \frac{v}{c}\left\{\frac{1}{3} a \mathfrak{K}_a - \frac{1}{3} b \mathfrak{K}_b + P\right\},$$

wo

$$P = \int_a^b \mathfrak{K}_\nu \, d\nu .$$

Wie man sieht, enthält $I_{12} - I_{21}$ keine Glieder der Ordnung v^2/c^2. Dasselbe Resultat erhält man auf direktem Wege, wenn man von vornherein in der Rechnung schon die zweite Potenz von v/c vernachlässigt. Kehrt man die Richtung der Bewegung um, so wechselt auch $I_{12} - I_{21}$ sein Vorzeichen. Für den Spezialfall $a = b$ wird $I_{12} - I_{21} = 0$; das ist der Fall eines vollkommenen Spiegels. Für $a = 0$, $b = \infty$ wird

$$I_{12} - I_{21} = 8\pi F dt \frac{v}{c} \int_0^\infty \mathfrak{K}_\nu \, d\nu ,$$

oder wenn man

$$2 \int_0^\infty \mathfrak{K}_\nu \, d\nu ,$$

d. h. die gesamte Helligkeit der unpolarisierten Strahlung gleich K setzt,

$$I_{12} - I_{21} = 4\pi F dt \frac{v}{c} K = F v \, dt \, . \, u .$$

Dabei ist $u = 4\pi K/c$ die räumliche Energiedichte der Gesamtstrahlung. Dies ist der Fall, daß die Platte für alle Farben durchlässig ist, mit anderen Worten: Die Platte ist dann nur eine geometrisch fingierte Ebene. $I_{12} - I_{21}$ ist daher auch in diesem Fall einfach die Energie, die im Volumen $F v \, dt$ enthalten ist.

Ist speziell $b = a + d\nu$, d. h. ist die Platte nur für das schmale Intervall $d\nu$ durchlässig, oder, wie wir sagen können, ist die Platte nur für die Farbe a durchlässig und setzen wir voraus: $d\nu$ klein gegen $a(v/c)$, dann folgt:

$$I_{12} - I_{21} = \frac{8\pi}{3} F dt \, d\nu \frac{v}{c}\left\{2 \mathfrak{K}_a - a\left(\frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial \nu}\right)_a\right\}.$$

$I_{12} - I_{21}$ ist also der Größe des Intervalls $d\nu$ proportinal. Hat in diesem Fall a noch speziell den Wert, in dem $\mathfrak{K}_a$ ein Maximum wird, dann $(\partial \mathfrak{K}_\nu / \partial \nu)_a = 0$ und

$$I_{12} - I_{21} = \frac{8\pi}{3} F dt\, d\nu \frac{\nu}{c}\, 2 \cdot \mathfrak{K}_{\max.} = \frac{2}{3} F\nu\, dt\, u_{\max.} \cdot d\nu .$$

Dabei ist $u_\nu = (8\pi/c)\mathfrak{K}_\nu$ die räumliche Energiedichte der monochromatischen Strahlung.

Es ist also hier $I_{12} - I_{21}$ gleich $^2/_3$ der ganzen im Raum $F\nu\, dt$ enthaltenen Energie die Farbe $u_{\max.}$

Es ist bemerkenswert, daß der allgemeine Ausdruck von $I_{12} - I_{21}$ ganz ohne Rücksicht auf ein spezielles Energieverteilungsgesetz abgeleitet ist. Wir können $I_{12} - I_{21}$ auch folgendermaßen schreiben:

$$I_{12} - I_{21} = \frac{8\pi}{3} F dt \frac{\nu}{c} \{G(b) - G(a)\}, \tag{25}$$

wo

$$G(\nu) = 3 \int_0^\nu \mathfrak{K}_\nu d\nu - \nu \mathfrak{K}_\nu .$$

Um über das Vorzeichen von $I_{12} - I_{21}$ entscheiden zu können, bilden wir

$$\frac{d G(\nu)}{d\nu} = 2\mathfrak{K}_\nu - \nu \frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial \nu} = H(\nu).$$

Ist $H(\nu)$ stets $\geqq 0$, dann ist $G(b) \geqq G(a)$ und $I_{12} - I_{21}$ ist stets positiv (im Grenzfall $= 0$). Es kommt also auf das Vorzeichen von

$$H(\nu) = 2\mathfrak{K}_\nu - \nu \frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial \nu}$$

an. Ohne auf ein spezielles Energieverteilungsgesetz Rücksicht zu nehmen, können wir von vornherein erkennen, daß nicht für alle ν $H(\nu) < 0$ sein kann. Denn, bezeichnen wir den Wert von ν, der dem Maximum von $\mathfrak{K}_\nu$ entspricht, mit ν_m, dann ist, für alle $\nu > \nu_m$ sicher $\partial \mathfrak{K}_\nu / \partial \nu < 0$ und daher $H(\nu) > 0$. Auch unterhalb ν_m gibt es sicher noch Werte von ν, für die $H(\nu) > 0$; trotzdem ist es prinzipiell nicht ausgeschlossen, daß für noch kleinere Werte von ν $H(\nu)$ negativ wird. Will man über diesen Punkt Sicherheit erlangen, so bleibt nichts übrig, als, zur Diskussion von $H(\nu)$, zu einem speziellen Energieverteilungsgesetz zu greifen.

Wir benutzen hier das von M. Planck aufgestellte Energieverteilungsgesetz, in dem das Wiensche und das Rayleighsche Strahlungsgesetz als Spezialfälle enthalten sind. Nach diesem Gesetz ist

$$\mathfrak{R}_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \tag{26}$$

wo h und k gewisse allgemeine Konstanten sind,

$$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

ν die Schwingungszahl, T die absolute Temperatur.

Legen wir dieses Gesetz hier zugrunde, dann ergibt sich:

$$H(\nu) = 2\mathfrak{R}_\nu - \nu \frac{\partial \mathfrak{R}_\nu}{\partial \nu} = \frac{h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \left\{ \frac{\frac{h\nu}{kT} e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} - 1 \right\}.$$

Für $\nu = 0$ und $\nu = \infty$ ist, wie wir wissen, $H(\nu) = 0$. Wir können diese beiden Werte aus der Betrachtung ausschalten. Setzen wir $h\nu/kT = x$, dann ist

$$H(\nu) = \frac{h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{(e^x - 1)^2} \{x \cdot e^x - e^x + 1\}.$$

Nun ist für $x = 0$

$$g(x) = x \cdot e^x - e^x + 1 = 0.$$

Bildet man $g'(x)$, so ergibt sich

$$g'(x) = e^x + x \cdot e^x - e^x = x \cdot e^x > 0 \quad \text{für} \quad x > 0.$$

Also ist $g(x)$ stets positiv. Damit ist bewiesen, daß $H(\nu)$ stets positiv ist, wenn wir das oben angeführte Strahlungsgesetz zugrunde legen. Es ist dann also stets

$$\underline{I_{12} > I_{21}}, \tag{27}$$

d. h. es geht während der Bewegung der Platte stets mehr Energie von der Seite der zusammengedrückten Strahlung durch die Platte nach oben, als umgekehrt, *wie man auch a und b wählen mag.*

In dem anfangs zitierten Abschnitt der Wienschen Abhandlung bedeuten nun a und b nicht, wie hier, Schwingungs-

zahlen, sondern Wellenlängen. Bezeichnen wir diese Werte für den Augenblick mit a' und b', so soll, nach Wien $a' < b'$ (Wellenlängen) sein.

Da nun hier in der ganzen Rechnung stets $b > a$ (Schwingungszahlen!) angenommen ist, so müssen wir, um mit der Wienschen Bezeichnung im Einklang zu sein, setzen:

$$a' = \frac{c}{b}; \quad b' = \frac{c}{a}.$$

Nun soll ferner für die Strahlungsintensitäten der Wellenlängen a' und b' die Beziehung $\varphi_{a'} > \varphi_{b'}$ bestehen, oder da allgemein

$$\varphi_\lambda = \frac{c\,\mathfrak{R}_\nu}{\lambda^2},$$

$$\frac{c\,\mathfrak{R}_b}{a'^2} > \frac{c\,\mathfrak{R}_a}{b'^2},$$

also

$$b^2\,\mathfrak{R}_b > a^2\,\mathfrak{R}_a.$$

Dann, sagt Wien, wird mehr Energie von der Seite, wo die Strahlung sich ausdehnt, nach der anderen Seite gelangen, als umgekehrt. Dies widerspricht offenbar unserem oben gefundenen Resultat, wonach, wie auch a und b gewählt seien, stets *weniger* Energie von der Seite der sich ausdehnenden Strahlung nach der anderen Seite gelangt, als umgekehrt! Sind die Wellen der Farbe a und b so lang, daß man für sie das Rayleighsche Strahlungsgesetz in Anwendung bringen kann, also $\mathfrak{R}_\nu = (k\,T/c^2)\,\nu^2$ setzen kann, dann wird $G(\nu) = 0$ und

$$I_{12} = I_{21}. \tag{28}$$

Im Grenzfall, für sehr lange Wellen, geht also ebensoviel Energie von unten nach oben, wie von oben nach unten. Nie aber wird $I_{12} < I_{21}$.

§ 4.

Unser nächstes Ziel ist die Bestimmung der in der Zeit dt erfolgten gesamten Entropieänderung δS unseres Systems. Zu ihrer Berechnung verfahren wir, wie folgt:

Wir hatten gesehen: fällt ein Strahl der Schwingungszahl ν unter dem Winkel ϑ von unten auf die Platte, und liegt

$$\nu\left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)$$

außerhalb des Intervalles $a \ldots b$, dann wird er **reflektiert**, und nach der Reflexion ist seine Schwingungszahl:

$$\nu\left(1 + 2\frac{v}{c}\cos\vartheta + 2\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Seine Schwingungszahl hat sich also um

$$2\frac{v}{c}\nu\cos\vartheta + 2\frac{v^2}{c^2}\nu$$

geändert. Setzen wir nun voraus, daß das Intervall $d\nu$, in dem die Energie des einfallenden Strahles vor der Reflexion liegt, klein ist gegen $\nu . v/c$, dann findet sich diese Energie, nach der Reflexion, nicht mehr im Intervall $d\nu$ vor; sie ist, sozusagen, durch Reflexion aus dem Intervall $d\nu$ „hinausgeworfen" und in ein anderes Intervall „hineinreflektiert" worden.

Analoges gilt für die Strahlung über der Platte.

Betrachten wir nun die Änderung der in einem Intervall $d\nu$ enthaltenen Strahlungsenergie auf einer Seite der Platte, so wird sich diese Änderung darstellen lassen in der Form der Differenz:

gewonnene Energie — verlorene Energie.

Verloren ist dem Intervall $d\nu$ die gesamte einfallende Energie, denn sie wird zum Teil, wie wir soeben sahen, durch Reflexion aus dem Intervall $d\nu$ „hinausgeworfen", zum anderen Teil passiert sie die Platte.

Die gewonnene Energie besteht aus zwei Teilen: 1. der aus dem anderen Raum durch die Platte hereinkommenden Energie, 2. der durch Reflexion aus fremden Intervallen ins Intervall $d\nu$ „hereinreflektierten" Energie.

Wir können demnach die Energiegleichung in folgender Form ansetzen:

(29) $\left\{\begin{array}{c}\text{Änderung der Energie im Intervall } d\nu \\ \text{während der Zeit } dt\end{array}\right.$

= „hereinreflektierte" Energie + durch die Platte aus dem anderen Raum kommende Energie

— einfallende Energie.

Die einfallende Energie der Farbe ν ist für Strahlen unter der Platte

$$2\Re_\nu d\nu \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{v}{c}} \sin\vartheta\left(\cos\vartheta+\frac{v}{c}\right)d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \,.\, F dt,$$

$$= 2\pi F dt \Re_\nu d\nu \left(1+\frac{v}{c}\right)^2; \tag{30}$$

für Strahlung über der Platte ist sie

$$= 2\pi F dt \Re_\nu d\nu \left(1-\frac{v}{c}\right)^2. \tag{31}$$

Die aus dem anderen Raum kommende Energie, d. h. die Energie der Strahlen, die die Platte durchsetzen, ist bei Gelegenheit der Berechnung von $I_{12}-I_{21}$ im einzelnen[1]) berechnet worden. Es erübrigt noch, die aus fremden Intervallen ins Intervall $d\nu$ „hereinreflektierte" Energie zu bestimmen. Haben wir diese gefunden, so berechnet sich die Änderung der Energie im Intervall $d\nu$ durch Einsetzen der drei Daten in die aufgestellte Energiegleichung (29). Hieraus bestimmt sich leicht für jedes ν die Änderung der räumlichen Energiedichte (δu_ν) während der Zeit dt; die δu_ν liefern uns dann die während der Zeit dt erfolgte gesamte Entropieänderung unseres Systems (δS).

Wir wissen: trifft ein Strahl der Farbe ν_1 unter dem Winkel ϑ von unten auf die Platte, und wird er reflektiert, dann ändert sich seine Farbe, und es wird nach der Reflexion seine Schwingungszahl den Wert

$$\nu' = \nu_1\left(1+2\frac{v}{c}\cos\vartheta+2\frac{v^2}{c^2}\right)$$

annehmen.

Das Intervall $d\nu_1$ wird durch die Reflexion zu:

$$d\nu' = d\nu_1\left(1+2\frac{v}{c}\cos\vartheta+2\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Ist nun $\nu' = \nu$ und $d\nu' = d\nu$, dann fällt die ganze Energie des Intervalles $d\nu_1$ nach der Reflexion in unser Intervall $d\nu$, ist also ins Intervall $d\nu$ „hereinreflektiert" worden. Ist also

1) Vgl. die Originalarbeit.

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{l} \nu = \nu_1\left(1 + 2\frac{v}{c}\cos\vartheta + 2\frac{v^2}{c^2}\right) \\ \text{und} \\ d\nu = d\nu_1\left(1 + 2\frac{v}{c}\cos\vartheta + 2\frac{v^2}{c^2}\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\textit{Unter}\ \text{der} \\ \text{Platte!}\end{array}$$

dann ist ν_1 nach der Reflexion von der Farbe ν und liefert seine Energie dem Intervall $d\nu$.

Trifft ν_1 unter dem Winkel ϑ auf, so wird, nach (19a), in der Zeit dt reflektiert eine Energie der Größe

$$2\Re_{\nu_1} d\nu_1 F dt d\varphi \sin\vartheta\left(\cos\vartheta + \frac{v}{c}\right)\left(1 + 2\frac{v}{c}\cos\vartheta + 2\frac{v^2}{c^2}\right) d\vartheta$$

oder nach (32)

$$(33)\qquad = 2\Re_{\nu_1} d\nu F dt d\varphi \sin\vartheta\left(\cos\vartheta + \frac{v}{c}\right) d\vartheta.$$

Nun ist, nach dem Taylorschen Satz

$$\Re_{\nu_1} = \Re_\nu + \frac{\nu_1 - \nu}{1!}\left(\frac{\partial \Re_\nu}{\partial \nu}\right)_\nu + \frac{(\nu_1 - \nu)^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \Re_\nu}{\partial \nu^2}\right)_\nu + \ldots,$$

wobei wir, da $\nu_1 - \nu$ von der Ordnung v/c ist, nach unserer Voraussetzung die Entwickelung beim dritten Gliede abbrechen. Aus (32) folgt:

$$\nu_1 - \nu = -\nu\left\{2\frac{v}{c}\cos\vartheta + 2\frac{v^2}{c^2} - 4\frac{v^2}{c^2}\cos^2\vartheta\right\}.$$

Daher

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{l} \Re_{\nu_1} = \Re_\nu - 2\nu\frac{v}{c}\frac{\partial \Re_\nu}{\partial \nu}\cos\vartheta - 2\nu\frac{v^2}{c^2}\cdot\frac{\partial \Re_\nu}{\partial \nu} \\ \qquad\qquad + 2\frac{v^2}{c^2}\cos^2\vartheta\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\nu^2\frac{\partial \Re_\nu}{\partial \nu}\right). \end{array}\right.$$

Setzt man diesen Wert in (33) ein und multipliziert mit $\cos\vartheta + v/c$, dann fallen einige Glieder fort, und man erhält für die ins Intervall $d\nu$ „hereinreflektierte" Energie (geliefert durch Strahlen der Farbe ν_1 im Einfallswinkel ϑ):

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{l} 2F dt d\nu d\varphi \sin\vartheta d\vartheta\left\{\Re_\nu\cos\vartheta + \Re_\nu\frac{v}{c} - 2\nu\frac{v}{c}\frac{\partial \Re_\nu}{\partial \nu}\cos^2\vartheta\right. \\ \qquad\qquad \left. - 4\nu\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial \Re_\nu}{\partial \nu}\cos\vartheta + 2\frac{v^2}{c^2}\cos^3\vartheta\cdot\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\nu^2\frac{\partial \Re_\nu}{\partial \nu}\right)\right\}. \end{array}\right.$$

Es fallen nun aber die ν_1-Strahlen auf die Platte unter allen Einfallswinkeln ϑ zwischen

$$\vartheta = 0 \text{ und } \vartheta = \frac{\pi}{2} + \text{arc sin}\frac{v}{c};$$

nicht alle diese Strahlen werden reflektiert; denn in gewissen ϑ-Richtungen passieren sie ja die Platte. Es empfiehlt sich daher, die Gesamtheit der ν_1 im bestimmte Intervalle zu teilen; jedem dieser Intervalle entspricht ein gewisses Intervall von Einfallswinkeln ϑ folgender Beschaffenheit: liegt der Einfallswinkel des Strahles ν_1 innerhalb dieses ϑ-Intervalles, so wird ν_1 reflektiert, liegt er außerhalb, so passiert der Strahl die Platte. Wir nennen dieses Intervall „das für ν_1 charakteristische ϑ-Intervall".

Nun sieht man ohne weiteres, daß die oben in (35) angegebene „hereinreflektierte" Energie dem Intervall $d\nu$ von einer ganzen Reihe von ν_1-Strahlen geliefert wird, jedesmal unter dem entsprechenden Einfallswinkel ϑ. Und zwar *könnte* nach (32) jedes ν geliefert werden von *jedem* ν_1 zwischen

$$\nu_1 = \nu\left(1 - 2\frac{v}{c} + 2\frac{v^2}{c^2}\right) \quad \text{und} \quad \nu_1 = \nu$$

im Einfallswinkel

$$\vartheta = \arccos\left[\frac{1}{2}\frac{c}{v}\left(\frac{\nu}{\nu_1} - 2\frac{v^2}{c^2} - 1\right)\right].$$

Liefert diese Beziehung, für das entsprechende ν_1, einen ϑ-Wert, der in das für ν_1 „charakteristische" ϑ-Intervall fällt, dann trägt dies ν_1 mit seiner Energie zu der „hereinreflektierten" Energie bei.

Das Problem lautet also jetzt, wie folgt: welche ν_1-Strahlen liefern durch Reflexion ein bestimmtes ν, oder anders ausgedrückt: in welchen Richtungen ϑ müssen die ν_1-Strahlen einfallen, um nach der Reflexion ein bestimmtes ν zu liefern?

Haben wir demgemäß für alle ν diese ϑ bestimmt und den Ausdruck (35) nach ϑ und φ entsprechend integriert, so haben wir damit die „hereinreflektierte" Energie gewonnen.

Für den Raum über der Platte ist die Berechnung analog.

Vor Ausführung der Bewegung ist nun die Energie der Farbe ν unter und über der Platte

$$= V u_\nu d\nu.$$

Ist nach vollzogener Bewegung der Ausgleich der Strahlungsintensität nach allen Richtungen (durch diffuse Reflexion

an den weißen Wänden) eingetreten, so ist nun die Ene der Farbe ν

$$= (V - F v\,dt)(u_\nu + \delta u_\nu)\,d\nu \text{ unter der Platte,}$$

$$(V + F v\,dt)(u_\nu + \delta u_\nu)\,d\nu \text{ über der Platte.}$$

Die Änderung der Energie im Intervall $d\nu$ während der Ze ist daher

$$= (V - F v\,dt)\,\delta u_\nu\,d\nu - F v\,dt\,u_\nu\,d\nu \text{ unter der Platte}$$

und

$$= (V + F v\,dt)\,\delta u_\nu\,d\nu + F v\,dt\,u_\nu\,d\nu \text{ über der Platte.}$$

Nun haben wir alle Daten beisammen, um die oben in aufgestellte Energiegleichung für die einzelnen Schwingu zahlen anzusetzen. Daraus ergibt sich dann δu_ν für jede

Es findet dabei, wie es zu erwarten ist, die Verschiel der Energieverteilung auf die einzelnen Farben nicht gl mäßig statt.

Am stärksten beeinflußt werden natürlich die Farben, ganz außerhalb des von der Platte durchgelassenen Far intervalles liegen, und zwar möglichst weit von den Gren ihre Energieverteilung ändert sich ebenso, als wenn sie einem vollkommenen Spiegel reflektiert würden. Die Far die zwischen a und b liegen, werden der Hauptsache durch die Bewegung der Platte nicht beeinflußt. Ihre s fische Energiedichte ist bei der Bewegung konstant (δu_ν und ihre gesamte Energie ändert sich nur nach Maßgabe Volumänderung. In der Nähe der Farben a und b selbst, in der Nähe der Grenzen des durchgelassenen Farbenintervs treten gewisse Übergangsgebiete auf.

Nun war nach (3) die Gesamtentropie der Strahlung

$$S = S_1 + S_2, \tag{36}$$

wo S_1 die Entropie der Strahlung unter der Platte, S_2 Entropie der Strahlung über der Platte im Anfangszus bezeichneten. Sind also s_1 und s_2 die entsprechenden r lichen Entropiedichten, so können wir setzen:

$$S_1 = V.s_1 = S_2 = V.s_2. \tag{37}$$

Die durch die Bewegung hervorgerufenen Änderungen der Strahlungsentropien sind daher:

$$(38)\quad \begin{cases} \delta S_1 = (V - Fv\,dt)(s_1 + \delta s_1) - V.s_1 \\ \qquad\quad = (V - Fv\,dt)\,\delta s_1 - Fv\,dt.s_1 \\ \text{und} \\ \delta S_2 = (V + Fv\,dt)\,\delta s_2 + Fv\,dt.s_2. \end{cases}$$

Also ergibt sich nach (36) für die gesamte Entropieänderung

$$(39)\quad \delta S = \delta S_1 + \delta S_2 = (V - Fv\,dt)\,\delta s_1 + (V + Fv\,dt)\,\delta s_2.$$

Bezeichnet $\mathfrak{s}_\nu . d\nu$ die Entropie der in der Volumeinheit enthaltenen Strahlung zwischen den Schwingungszahlen ν und $\nu + d\nu$, so können wir setzen[1])

$$(40)\quad s_1 = \int_0^\infty \mathfrak{s}_{\nu_1}\, d\nu, \quad s_2 = \int_0^\infty \mathfrak{s}_{\nu_2}\, d\nu.$$

Die $\mathfrak{s}_\nu$ sind dabei bestimmte Funktionen der ν und u_ν. Es folgt aus (40) unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$(41)\quad \delta s_1 = \delta \int_0^\infty \mathfrak{s}_{\nu_1}\, d\nu = \int_0^\infty \delta \mathfrak{s}_{\nu_1}\, d\nu = \int_0^\infty \frac{\partial \mathfrak{s}_\nu}{\partial u_\nu}\, \delta u_{\nu_1}\, d\nu,$$

da ν unvariiert bleibt. δu_{ν_1} ist dabei die oben im einzelnen berechnete Änderung der spezifischen monochromatischen Energiedichte unter der Platte.

Die Glieder, die in der Entwickelung von $\delta \mathfrak{s}_{\nu_1}$ höhere Potenzen von δu_{ν_1} aufweisen, fallen fort, da δu_{ν_1} den Faktor dt im Zähler und das beliebig groß zu wählende V im Nenner enthält.

Nun ist bekanntlich[2])

$$(42)\quad \frac{\partial \mathfrak{s}_\nu}{\partial u_\nu} = \frac{1}{T},$$

wo T die absolute Temperatur der monochromatischen Strahlung von der Farbe ν ist. Setzt man diesen Wert in (41) ein, und beachtet, daß die ursprünglich herrschende Strahlung die

1) Vgl. M. Planck, Theorie d. Wärmestrahlung p. 87. Formel (113).
2) M. Planck, l. c. p. 88. Formel (117).

„schwarze" Strahlung war, so tritt $1/T$ vor das Integralz und man erhält:

$$\delta s_1 = \frac{1}{T}\int_0^\infty \delta u_{\nu_1}\, d\nu. \tag{43}$$

Analog

$$\delta s_2 = \frac{1}{T}\int_0^\infty \delta u_{\nu_2}\, d\nu, \tag{43a}$$

wo der Index 2 sich auf den Raum über der Platte b

Unter Benutzung von (43) und (43a) wird (39) schli

$$\delta S = \frac{V - F v\, dt}{T}\int_0^\infty \delta u_{\nu_1}\, d\nu + \frac{V + F v\, dt}{T}\int_0^\infty \delta u_{\nu_2}\, d \tag{44}$$

Setzen wir hier für δu_{ν_1} und δu_{ν_2} die oben berec Werte ein, so erhalten wir nach Ausführung der Integ

$$\delta S = \frac{4\pi F dt}{T}\frac{v^2}{c^2}\left\{4\int_0^a \Re_\nu\, d\nu + 4\int_b^\infty \Re_\nu\, d\nu + b\,\Re_b - a \right. \tag{45}$$

Dies ist die Änderung der Gesamtentropie bei Bewegung. Wie man sieht, ist sie von der Ordnung Bei einer Vertauschung von v mit $-v$, d. h. bei eine kehrung der Plattenbewegung, kehrt daher δS sein Vor nicht um, wie es natürlich ist.

Der Wert von δS ist unabhängig von einem spe Energieverteilungsgesetz abgeleitet worden.

Zur Entscheidung über das Vorzeichen von δS *kan* zu einem speziellen Strahlungsgesetz greifen. Wir be hier wieder das Gesetz (26), wonach

$$\Re_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Setzt man in (45) $b = \infty$, dann wird

$$\delta S = \frac{4\pi F dt}{T}\frac{v^2}{c^2}\left\{4\int_0^a \Re_\nu\, d\nu - a\,\Re_a\right\} = \frac{4\pi F dt}{T}\frac{v^2}{c^2}\,\Phi$$

wenn

$$\Psi(\nu) = 4\int_0^{\nu} \mathfrak{K}_\nu \, d\nu - \nu \mathfrak{K}_\nu \tag{46}$$

ist. Nun ist

$$\Psi(0) = 0; \quad \frac{d\Psi}{d\nu} = 3\mathfrak{K}_\nu - \nu \frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial \nu},$$

oder wenn man den Wert von $\mathfrak{K}_\nu$ einsetzt:

$$\frac{d\Psi}{d\nu} = \frac{h\nu^3}{c^2} \frac{\frac{h\nu}{kT} \cdot e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2} > 0. \tag{47}$$

Daher ist $\Psi(a)$ sicher > 0 und ferner auch

$$\Psi(b) > \Psi(a). \tag{48}$$

Für jedes $b < \infty$ kommen zu dem Ausdruck

$$\frac{4\pi F dt}{T} \frac{v^2}{c^2} \Psi(a)$$

in δS noch positive Glieder hinzu, so daß allgemein stets

$$\delta S > 0$$

ist. Es ist aber, um zu erweisen, daß

$$\frac{\delta\Psi}{d\nu} = 3\mathfrak{K}_\nu - \nu \cdot \frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial \nu} > 0$$

ist, *nicht nötig*, zu einem speziellen Energieverteilungsgesetz zu greifen. Führt man nämlich unseren Prozeß mit einem vollkommenen Spiegel aus, und zwar mit so kleiner Geschwindigkeit, daß man Größen der Ordnung v^2/c^2 vernachlässigt, so ist die Änderung der spezifischen Energiedichte u_ν unter dem Spiegel für alle ν[1]):

$$\delta u_\nu = \frac{\delta V}{V}\left(\frac{\nu}{3}\frac{\partial u_\nu}{\partial \nu} - u_\nu\right).$$

δu_ν muß positiv sein, denn es ist an jeder monochromatischen Strahlung unter dem Spiegel von außen Arbeit geleistet worden. Daher ist, weil $\delta V = -Fvdt$,

$$u_\nu - \frac{\nu}{3}\frac{\partial u_\nu}{\partial \nu} > 0$$

und auch

$$3\mathfrak{K}_\nu - \nu\frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial \nu} = \frac{d\Psi}{d\nu} > 0.$$

1) Vgl. auch M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung. p. 80, Gleichung (95).

Es gilt also stets

$$\delta S > 0, \tag{49}$$

d. h.: *unser Prozeß ist irreversibel!*

Für $a = b$ wird

$$\delta_0 S = \frac{4\pi F dt}{T}\frac{v^2}{c^2}\cdot 4\int_0^\infty \mathfrak{K}_\nu\, d\nu = \frac{8\pi F dt}{T}\frac{v^2}{c^2}\cdot K, \tag{50}$$

oder da

$$\frac{4\pi K}{c} = u$$

die räumliche Energiedichte der Anfangsstrahlung ist,

$$\delta_0 S = 2F v dt\,\frac{v}{c}\,\frac{u}{T} = \frac{3}{2}F v dt\,\frac{v}{c}\,s. \tag{51}$$

Dies ist der Wert der Entropiezunahme, wenn unse Platte speziell für keine Farbe durchlässig, d. h. ein vc kommener Spiegel ist.

Da wir (45) unter Benutzung von (46) in der Fo schreiben können

$$\delta S = \frac{4\pi F dt}{T}\frac{v^2}{c^2}\{2K - [\Phi(b) - \Phi(a)]\}, \tag{45a}$$

so erhellt, mit Rücksicht auf (48), daß δS für den Fall d vollkommenen Spiegels ($b = a$) seinen größten Wert erreicl

Wir sehen also, daß unsere Bewegung, ausgeführt n einem vollkommenen Spiegel, eine gewisse maximale Entropi zunahme der Größenordnung v^3 ergibt, d. h. ein irreversibl Vorgang ist.

Führen wir dagegen diesen Prozeß so langsam aus, d wir auch schon die zweite Potenz von v/c vernachlässig können, dann wird sowohl für den Spiegel, als auch allgeme für unsere Platte

$$\delta S = 0.$$

Der Prozeß ist dann reversibel.

Es ist jedoch zu beachten, daß das Moment der Irr versibilität im ersten Falle nicht in der endlichen Geschwindi keit des Spiegels oder der Platte liegt, denn die Reflexion d Strahlung an einem bewegten vollkommenen Spiegel[1]), eben wie die freie Ausbreitung der Strahlung[2]), ist ein reversibl

1) M. Abraham, Elektromagn. Theorie d. Strahlung. p. 356.

2) M. Planck, Theorie d. Wärmestrahlung. p. 168, 169; M. Abraha Elektromagn. Theorie d. Strahlung. p. 352.

Prozeß. Das Moment der Irreversibilität liegt vielmehr in dem Ausgleich der Strahlungsenergie nach allen Richtungen: δS ist ja gerade unter der Annahme berechnet worden, daß dieser Ausgleich sich vollzogen hat. Die Unregelmäßigkeiten und Vorzugsrichtungen, die durch die Bewegung des Spiegels oder der Platte entstanden sind, sind infolge der diffusen Reflexion an den Wänden verschwunden. Von dieser ausgleichenden, diffusen Reflexion rührt die Irreversibilität des Vorganges her, nicht von der Reflexion am bewegten Spiegel, oder von der freien Ausbreitung durch die Platte. Ist der Spiegel oder die Platte dagegen mit unendlich kleiner Geschwindigkeit bewegt worden, so sind die durch die Bewegung entstandenen Unregelmäßigkeiten der Strahlung und ebenso daher auch der Einfluß des Ausgleiches von höherer Ordnung. Es wird dann das Moment der Irreversibilität klein von höherer Ordnung, d. h. der Vorgang ist reversibel.

Wir werden weiter unten zeigen, daß man das in (50) ausgesprochene Resultat auch auf direktem Wege bestätigt, indem man von vornherein die Bewegung mit einem vollkommenen Spiegel ausführt. Der Gang der Untersuchung soll jedoch hier nicht unterbrochen werden.

Nach der in (49) aufgestellten Beziehung können wir sagen: Ein Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz, etwa im Negativwerden von δS, liegt bisher nicht vor.

Wir wollen aber das Problem noch weiter verfolgen.

§ 5.

Die Arbeit, die wir während unseres Prozesses von außen geleistet haben, ist nach (4) gleich der Änderung der Gesamtenergie

$$A = \delta U.$$

δU setzt sich additiv zusammen aus der Änderung der Energie unter der Platte δU_1 und der Änderung der Energie über der Platte δU_2, also

$$\delta U = \delta U_1 + \delta U_2.$$

Nun ist

$$\delta U_1 = (V - Fvdt)(u_1 + \delta u_1) - V u_1,$$

$$\delta U_2 = (V + Fvdt)(u_2 + \delta u_2) - V u_2,$$

wo u_1 und u_2 die räumlichen Energiedichten unter und über der Platte im Anfangszustand sind. Daraus folgt, da $u_1 = u_2$

$$\delta U = \delta U_1 + \delta U_2 = (V - Pvdt)\delta u_1 + (V + Pvdt)\delta u_2$$

oder

$$\delta U = (V - Pvdt)\int_0^\infty \delta u_\nu \, d\nu + (V + Pvdt)\int_0^\infty \delta u_\nu \, d\nu .$$

Vergleicht man dieses Resultat mit (44), so ergibt sich sofort:

(52) $$\underline{\delta U = A = T \cdot \delta S,}$$

in Worten: die von außen an der Strahlung geleistete Arbeit ist gleich der gesamten Entropieänderung, multipliziert mit der Temperatur der ursprünglich herrschenden schwarzen Strahlung.

Es ist also die von uns aufgewendete Arbeit nach (52) und (45)

(53) $$A = 4\pi F dt \frac{v^2}{c^2}\left\{4\int_0^a \mathfrak{K}_\nu \, d\nu + 4\int_b^\infty \mathfrak{K}_\nu \, d\nu + b\,\mathfrak{K}_b - a\,\mathfrak{K}_a\right\}.$$

Aus (52) und (53) folgt: A ist stets positiv, d. h. es wird stets von außen Arbeit geleistet.

Für $a = b$ (Spiegel) hat A seinen größten Wert

(54) $$A_0 = 8\pi F dt \frac{v^2}{c^2} K.$$

Auch dieses Resultat werden wir, wie oben angedeutet, später auf direktem Wege verifizieren.

Ist die Geschwindigkeit v unendlich klein, so werden A und $A_0 = 0$, d. h.: um die Bewegung mit unendlich kleiner Geschwindigkeit auszuführen, ist kein merklicher Arbeitsaufwand nötig. In diesem Fall ist, wie wir sahen, unser Prozeß reversibel.

Auf die Beziehung (52) gestützt sind wir imstande, δS durch die Berechnung von A abzuleiten.

Wir können offenbar setzen:

(55) $$A = A_1 - A_2 ,$$

wo A_1 die Arbeit ist, die man von außen an der Strahlung

unter der Platte leistet, A_2 die Arbeit, die man von der Strahlung über der Platte gewinnt.

Nun wissen wir: fällt ein Strahl der Farbe ν aus dem Kegel $d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ unter dem Einfallswinkel ϑ von unten auf die Fläche F der Platte, so führt er nach (16) in der Zeit dt eine Energie an die Platte:

$$I_1 = 2\mathfrak{K}_\nu\, d\nu \sin\vartheta \left(\cos\vartheta + \frac{v}{c}\right) d\vartheta\, d\varphi\, F dt.$$

Wird er reflektiert, so wird eine Energie $I_2 > I_1$ zurückgeworfen, und zwar ist nach (19 a)

$$I_2 = 2\mathfrak{K}_\nu\, d\nu \sin\vartheta \left(\cos\vartheta + \frac{v}{c}\right)\left(1 + 2\frac{v}{c}\cos\vartheta + 2\frac{v^2}{c^2}\right) d\vartheta\, d\varphi\, F dt.$$

Es ist also an dem Strahl der Farbe ν, der unter dem Winkel ϑ einfiel, bei der Reflexion von außen eine Arbeit geleistet worden

$$I_2 - I_1 = 4\mathfrak{K}_\nu\, d\nu \sin\vartheta \left(\cos\vartheta + \frac{v}{c}\right)^2 \frac{v}{c}\, d\vartheta\, d\varphi\, F dt.$$

Nun entspricht aber, wie wir oben sahen, jedem Strahl der Farbe ν ein „charakteristisches" Intervall von Einfallswinkeln ϑ derart, daß der Strahl nur dann reflektiert wird, wenn sein Einfallswinkel innerhalb dieses Intervalls liegt. In jedem anderen Fall wird der Strahl von der Platte ungehindert hindurchgelassen, und es wird daher keine Arbeit an ihm geleistet.

Integriert man daher unseren Ausdruck $I_2 - I_1$ nach ϑ zwischen den durch das „charakteristische" Intervall bestimmten Grenzen und führt auch die entsprechenden Integrationen nach ν aus, dann ergibt sich offenbar A_1.

Für den Raum über der Platte gilt analoges. Hier ist die von der Strahlung der Farbe ν, die unter dem Winkel ϑ einfällt, geleistete Arbeit:

$$-(I_2 - I_1) = 4\mathfrak{K}_\nu\, d\nu \sin\vartheta \left(\cos\vartheta - \frac{v}{c}\right)^2 \frac{v}{c}\, d\vartheta\, d\varphi\, F dt.$$

Durch Integration über die „charakteristischen" ϑ und die entsprechenden ν gewinnen wir A_2.

Bildet man nun $A = A_1 - A_2$, und läßt Größen der Ordnung v^3/c^3 und Größen höherer Ordnung fort, so ergibt sich:

$$(56)\quad A = 4\pi F dt \frac{v^2}{c^2}\left\{4\int_0^a \mathfrak{K}_\nu\, d\nu + 4\int_b^\infty \mathfrak{K}_\nu\, d\nu + b\,\mathfrak{K}_b - a\,\mathfrak{K}_a\right\}.$$

Nun war nach (52)

$$\delta S = \frac{A}{T};$$

also

$$(57)\quad \delta S = \frac{4\pi F dt}{T}\,\frac{v^2}{c^2}\left\{4\int_0^a \mathfrak{K}_\nu\, d\nu + 4\int_b^\infty \mathfrak{K}_\nu\, d\nu + b\,\mathfrak{K}_b - a\,\mathfrak{K}_a\right\}.$$

(56) und (57) stimmen, wie man sieht, mit den in (53) und (45) erhaltenen Resultaten überein.

§ 6.

Wir wollen nun, nachdem unsere Bewegung mit der Platte zum Ende geführt ist, uns die Platte durch einen vollkommenen Spiegel ersetzt denken und nach vollzogenem Ausgleich der Strahlung mit diesem Spiegel die Bewegung *zurück* ausführen, wieder mit der Geschwindigkeit v.

Wir berechnen die dabei geleistete Arbeit.

Unter dem Spiegel ist die Strahlung komprimiert, daher wird sie an dem Spiegel während der Bewegung eine Arbeit A_1' leisten. Gegen die oberhalb des Spiegels befindliche, dilatierte Strahlung werde die Arbeit A_2' von außen geleistet, so daß im ganzen von außen eine Arbeit

$$(58)\qquad A' = A_2' - A_1'$$

geleistet wird.

Beim Beginn der Bewegung besitzt jeder Strahl der Farbe ν eine spezifische Strahlungsintensität $\mathfrak{K}_\nu'$, die nicht mehr der „schwarzen" Strahlung entspricht, sondern es ist allgemein:

$$(59)\qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_\nu' = \mathfrak{K}_\nu + \delta\mathfrak{K}_\nu, \\ \text{wo} \\ \delta\mathfrak{K}_\nu = \dfrac{c}{8\pi}\delta u_\nu. \end{cases}$$

Die δu_ν sind nun aber oben für die einzelnen ν berechnet worden; es sind also alle $\mathfrak{K}_\nu'$ bekannt.

Es fällt nach (22) von unten auf den vor der Strahlung zurückweichenden Spiegel von allen Seiten eine Energie der Farbe ν

$$\begin{aligned} l_1' &= 2\mathfrak{K}_\nu'\, d\nu \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{v}{c}} \sin\vartheta\left(\cos\vartheta - \frac{v}{c}\right) d\vartheta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \cdot Fdt \\ &= 2\pi\mathfrak{K}_\nu'\, d\nu\, Fdt\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2. \end{aligned}$$

Reflektiert wird nach (23) eine Energiemenge:

$$I_1'' = 2\mathfrak{K}_\nu' d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi F dt \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{v}{c}} \sin\vartheta \left(\cos\vartheta - \frac{v}{c}\right)\left(1 - 2\frac{v}{c}\cos\vartheta + 2\frac{v^2}{c^2}\right) d\vartheta,$$

$$= 2\pi \mathfrak{K}_\nu' d\nu F dt \left\{\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 - \frac{4}{3}\frac{v}{c} + 4\frac{v^2}{c^2}\right\}.$$

Es ist, wie man sieht, die reflektierte Energie kleiner als die einfallende, und zwar beträgt die Differenz:

$$\frac{8\pi}{3}\mathfrak{K}_\nu' d\nu F dt \frac{v}{c}\left(1 - 3\frac{v}{c}\right).$$

Diese Differenz ist die Arbeit, die die Strahlung der Schwingungszahl ν an dem Spiegel geleistet hat. Es wird daher im ganzen:

$$A_1' = \frac{8\pi}{3} F dt \frac{v}{c}\left(1 - 3\frac{v}{c}\right) \int_0^\infty (\mathfrak{K}_\nu + \delta\mathfrak{K}_{\nu_1}) d\nu. \tag{60}$$

Analog

$$A_2' = \frac{8\pi}{3} F dt \frac{v}{c}\left(1 + 3\frac{v}{c}\right) \int_0^\infty (\mathfrak{K}_\nu + \delta\mathfrak{K}_{\nu_2}) d\nu, \tag{61}$$

wo wieder der Index 1 sich auf den unteren, der Index 2 auf den oberen Raum bezieht.

Daher:

$$A' = A_2' - A_1' =$$
$$8\pi F dt \frac{v^2}{c^2} K + \frac{8\pi}{3} F dt \frac{v}{c}\left\{\int_0^\infty \delta\mathfrak{K}_{\nu_2} d\nu - \int_0^\infty \delta\mathfrak{K}_{\nu_1} d\nu\right\},$$

wenn man die Glieder der Ordnung v^3/c^3 vernachlässigt. K ist dabei gleich

$$2\int_0^\infty \mathfrak{K}_\nu d\nu,$$

d. h. die gesamte Strahlungsintensität der unpolarisierten Strahlung.

Unter Berücksichtigung von (59) und den oben für $\delta \mathfrak{u}_\nu$ erhaltenen Werten ergibt sich:

$$\int_0^\infty \delta \mathfrak{R}_{\nu_2}\, d\nu - \int_0^\infty \delta \mathfrak{R}_{\nu_1}\, d\nu$$

$$= \frac{2}{3}\frac{F v\, dt}{V}\left\{ a\,\mathfrak{R}_a - b\,\mathfrak{R}_b - 4\int_0^a \mathfrak{R}_\nu\, d\nu - 4\int_b^\infty \mathfrak{R}_\nu\, d\nu \right\}.$$

So erhalten wir schließlich:

$$(62)\quad \left\{ \begin{aligned} A' = 8\pi F dt \frac{v^2}{c^3}\Big\{ K - \frac{2}{9}\frac{F c\, dt}{V}\Big[4\int_0^a \mathfrak{R}_\nu\, d\nu \\ + 4\int_b^\infty \mathfrak{R}_\nu\, d\nu + b\,\mathfrak{R}_b - a\,\mathfrak{R}_a \Big]\Big\}. \end{aligned} \right.$$

Die eckige Klammer kann man auf die Form

$$[\ldots.] = [2K - (\Phi(b) - \Phi(a))]$$

bringen, wo wieder, wie in (46)

$$\Phi(\nu) = 4\int_0^\nu \mathfrak{R}_\nu\, d\nu - \nu\,.\,\mathfrak{R}_\nu$$

gesetzt ist.

Nun hatten wir in (48) gesehen, daß stets $\Phi(b) > \Phi(a)$ ist.

Die eckige Klammer hat daher ihren größten Wert, und damit A' seinen kleinsten für den Fall: $a = b$. Dann ist:

$$(63)\qquad A_0' = 8\pi F dt \frac{v^2}{c^3} K\left\{1 - \frac{4}{9}\frac{F c\, dt}{V}\right\}.$$

Nach Formel (1) war:

$$c\, dt < 2l - v\, dt,$$

$$\text{a fortiori } c\, dt < 2l, \quad \text{wo} \quad l = \frac{V}{F}.$$

Daher:

$$\frac{F c\, dt}{V} < 2,$$

und

$$1 - \frac{4}{9}\frac{F c\, dt}{V} > \frac{1}{9}.$$

Es ist also:

$$(64)\qquad A_0' > 0$$

und daher a fortiori

$$(65)\qquad A' > 0.$$

A' ist also stets positiv, d. h. *es ist stets notwendig, von außen Arbeit an der Strahlung zu leisten, wenn man mit einem vollkommenen Spiegel den Weg der Platte in umgekehrter Richtung mit derselben Geschwindigkeit v, wie den Hinweg, zurücklegt.*

Dies in (65) ausgesprochene Resultat, inbesondere der in (64) enthaltene Spezialfall, erscheint beim ersten Anblick auffallend. Es ist nämlich durch die erste Bewegung die Energiedichte im unteren Raum vergrößert, im oberen Raum verkleinert worden. Dies ist ohne weiteres evident, falls man die erste Bewegung mit einem vollkommenen Spiegel ausführte; für unsere durchlässige Platte ergibt sich dies Resultat, wenn wir aus den oben angegebenen Werten von δu_ν durch Integration die Werte von

$$\delta u_1 = \int_0^\infty \delta u_{\nu_1} d\nu$$

und

$$\delta u_2 = \int_0^\infty \delta u_{\nu_2} d\nu$$

berechnen. Es folgt dann:

$$\delta u_1 = \frac{2\pi F dt}{V - Fv dt}\left(\frac{4}{3} + \frac{v}{c}\right)\frac{v}{c}\left\{4\int_0^a \mathfrak{K}_\nu d\nu + 4\int_b^\infty \mathfrak{K}_\nu d\nu + b\,\mathfrak{K}_b - a\,\mathfrak{K}_a\right\}.$$

$$\delta u_2 = -\frac{2\pi F dt}{V + Fv dt}\left(\frac{4}{3} - \frac{v}{c}\right)\frac{v}{c}\left\{4\int_0^a \mathfrak{K}_\nu d\nu + 4\int_b^\infty \mathfrak{K}_\nu d\nu + b\,\mathfrak{K}_b - a\,\mathfrak{K}_a\right\}.$$

Also $\delta u_1 > 0$; $\delta u_2 < 0$ und daher

$$u_1'(= u + \delta u_1) > u_2'(= u + \delta u_2).$$

D. h. vor Beginn der zweiten (Rück-)Bewegung ist im unteren Raum die Dichte der Energie größer als im oberen Raum (trotzdem bei der ersten Bewegung mehr Energie durch die Platte von unten nach oben ging, als umgekehrt!).

Nun könnte man argumentieren, wie folgt: Die Energiedichte im unteren Raum ist größer als im oberen; der Strah-

lungsdruck ist aber der Energiedichte proportional. Daher ist der beim Rückweg verwendete Spiegel einem Überdruck von unten ausgesetzt, und man sollte daher denken, daß die zweite (Rück-) Bewegung keinen Aufwand, sondern einen Gewinn von Arbeit bedingt.

Diese Argumentation enthält jedoch einen Fehler.

Es ist nämlich der Strahlungsdruck auf einen bewegten Spiegel nicht allein von der Energiedichte, *sondern auch von der Bewegung* des Spiegels abhängig.

In der Tat, schreibt man (60) und (61) in der Form:

$$A_1' = \frac{1}{3} F v dt \left(1 - 3\frac{v}{c}\right) u_1' = - p_1' \delta V_1,$$

$$A_2' = \frac{1}{3} F v dt \left(1 + 3\frac{v}{c}\right) u_2' = - p_2' \delta V_2,$$

wo u_1' und u_2' die räumlichen Energiedichten vor Beginn der zweiten Bewegung p_1' und p_2' die Strahlungsdrucke, δV_1 bzw. δV_2 die Volumänderungen unter und über dem Spiegel sind, so ergibt sich

$$p_1' = \frac{1}{3} u_1' \left(1 - 3\frac{v}{c}\right), \tag{66}$$

$$p_2' = \frac{1}{3} u_2' \left(1 + 3\frac{v}{c}\right).^{1}) \tag{67}$$

Nun ist zwar, infolge der ersten Bewegung der Platte,

$$u_1' > u_2',$$

wie wir sahen.

Trotzdem ist jedoch A_1' nicht größer, sondern kleiner als A_2', denn es macht sich eben in A_1' und A_2' der Einfluß der Bewegung geltend. Das scheinbare Paradoxon, daß, trotzdem die Strahlungsdichte u_1' unter dem Spiegel größer ist als über dem Spiegel (u_2'), es doch eines *Arbeitsaufwandes* von außen bedarf, um den Spiegel in seine Anfangslage zurückzuführen, erklärt sich also durch die *Bewegung* des Spiegels selbst, infolge derer der Druck der über dem Spiegel befindlichen Strahlung auf den ihr entgegenkommenden Spiegel *gerade infolge dieser Bewegung* größer ist als der Druck der Strahlung

1) Vgl. auch M. Abraham, Elektromag. Theorie der Strahlung p. 351.

im unteren Raume auf den gleichsam vor ihr zurückweichenden Spiegel; in Zeichen:

$$p_2'\left[=\frac{1}{3}u_2'\left(1+3\frac{v}{c}\right)\right] > p_1'\left[=\frac{1}{3}u_1'\left(1-3\frac{v}{c}\right)\right].$$

Wir verifizieren diese Ungleichung, indem wir zeigen, daß ihre weitere Umgestaltung zu einer bekannten Relation führt. Beachten wir, daß wir in dieser Rechnung nur bis zu Gliedern der Ordnung v/c zu entwickeln brauchen (da ja der Ausdruck der Arbeit überall nur bis zu Gliedern der Ordnung v^2/c^2, und daher der Strahlungsdruck nur bis zu Gliedern der Ordnung v/c entwickelt ist), so können wir obige Ungleichung umgestalten, wie folgt:

$$u_2'\left(1+3\frac{v}{c}\right) > u_1'\left(1-3\frac{v}{c}\right)$$

$$(u+\delta u_2)\left(1+3\frac{v}{c}\right) > (u+\delta u_1)\left(1-3\frac{v}{c}\right)$$

$$6u\frac{v}{c} > \delta u_1 - \delta u_2.$$

Nun ist, wie wir oben sahen, unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung:

$$\delta u_1 = \frac{8\pi F dt}{3V}\frac{v}{c}\{2K-[\Phi(b)-\Phi(a)]\},$$

$$\delta u_2 = -\frac{8\pi F dt}{3V}\frac{v}{c}\{2K-[\Phi(b)-\Phi(a)]\},$$

wo $\Phi(v)$ die aus (46) ersichtliche Bedeutung

$$\Phi(v) = 4\int_0^v \Re_v\, dv - v\,.\,\Re_v$$

hat. Setzt man diese Werte ein, so ergibt sich:

$$6u\frac{v}{c} > \frac{16\pi F dt}{3V}\{2K-[\Phi(b)-\Phi(a)]\}$$

oder, unter Benutzung von

$$u = \frac{4\pi K}{c}$$

$$3K > \frac{2}{3}\frac{F c\, dt}{V}\{2K-[\Phi(b)-\Phi(a)]\}.$$

Der Maximalwert der rechten Seite (für $a=b$) ist

$$\frac{4}{3}\frac{F c\, dt}{V}K < \frac{8}{3}K$$

nach (1). Daher besteht die Ungleichung a fortiori: es ist in der Tat

$$p_2' > p_1' \quad \text{und daher} \quad A_1' > A_2'.$$

Aus alledem folgt, daß wir bei unserem Prozeß im ganzen (d. h. beim Hin- und Rückweg) nicht etwa Arbeit gewinnen, sondern im Gegenteil eine positive Arbeit von der Größe

$$(68)\quad \left\{ \begin{aligned} A + A' = 4\pi F d t \frac{v^2}{c^2} \Big\{ & 4K \left(1 - \frac{2}{9} \frac{F c d t}{V}\right) \\ & - [\Phi(b) - \Phi(a)] \left(1 - \frac{4}{9} \frac{F c d t}{V}\right) \Big\} \end{aligned} \right.$$

leisten.

Ein Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz, wie ihn Wien, in dem anfangs zitierten Abschnitt, zum Beweise der theoretischen Unmöglichkeit unserer durchlässigen Platte aufstellt, scheint mir hiernach nicht vorzuliegen. Denn die Argumentation, daß,

> „wenn man mit dem Spiegel den Weg der Platte in umgekehrter Richtung zurücklegt, [infolge des Überdruckes] mehr Arbeit gewonnen wird, als für die Bewegung der Platte aufgebracht wurde",

ist nach dem obigen nicht zutreffend.

§ 7.

Wir wollen am Schlusse noch eine naheliegende Erweiterung unseres Problems behandeln, indem wir die Eigenschaften unserer durchlässigen Platte nicht mehr in der Weise beschränken, wie es bisher geschehen ist.

War die Durchlässigkeit der ruhenden Platte bisher streng auf die Farben des Intervalls $a \ldots b$ beschränkt, während allen anderen Farben gegenüber die Platte sich wie ein vollkommener Spiegel verhielt, so wollen wir jetzt die Durchlässigkeit der Platte (wenn sie ruht) so bestimmen, daß für alle Strahlen der Schwingungszahl ν die Beziehung gilt:

(69) Durchgelassene Energie $= f(\nu)$ Einfallende Energie.

Dabei ist $f(\nu)$ eine beliebige eindeutige, endliche, stetige oder unstetige positive Funktion von ν, und es gilt, wie leicht ersichtlich:

$$(70)\qquad 0 \leqq f(\nu) \gtrless 1 .$$

Um das Problem nicht zu sehr zu komplizieren, nehmen wir an, es sei die Funktion $f(\nu)$, die wir den Durchlässigkeitskoeffizienten nennen können, von der Richtung und Polarisation der einfallenden Strahlung unabhängig und nur Funktion der Farbe ν allein.

Die durch (69) charakterisierte Platte läßt also von den Strahlen aller Farben einen gewissen, nur von der Farbe abhängigen, Bruchteil hindurch, den Rest reflektiert sie wie ein vollkommener Spiegel. Man sieht sofort, daß dieses allgemeinere Problem das früher behandelte als Spezialfall umfaßt:

Setzen wir nämlich

$$f(\nu) = 1 \text{ für alle } \nu \text{ zwischen } a \text{ und } b,$$
$$f(\nu) = 0 \text{ für alle anderen } \nu,$$

so sind wir damit auf unser altes Problem zurückgeführt. —

Es fällt nach (16) aus dem Kegel $d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ unter dem Einfallswinkel ϑ in der Zeit dt von unten auf die Fläche F der Platte eine Energie der Schwingungszahl ν:

$$(71) \qquad I_1 = 2\mathfrak{K}_\nu\, d\nu \sin\vartheta \left(\cos\vartheta + \frac{v}{c}\right) d\vartheta\, d\varphi\, F\, dt.$$

Nun wissen wir: Strahlen der Schwingungszahl ν erscheinen nach (5) an der bewegten Platte als von der Schwingungszahl

$$(72) \qquad \nu\left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right).$$

Es wird daher nach (69) von der einfallenden Energie I_1 durch die Platte hindurchgelassen eine Energie

$$(73) \qquad = f\left[\nu\left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)\right] . I_1 .$$

Ist $f(\nu)$ mit seinen Ableitungen stetig — und an dieser Annahme wollen wir zunächst festhalten —, so kann man

$$f\left[\nu\left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)\right]$$

in bekannter Weise nach der Taylorschen Reihe entwickeln, wie folgt:

$$(74) \quad \begin{aligned} f\left[\nu\left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)\right] &= f(\nu) + \nu\frac{v}{c}\cos\vartheta \,.\, f'(\nu) \\ &\quad + \frac{\nu^2}{2}\frac{v^2}{c^2}\cos^2\vartheta \,.\, f''(\nu), \end{aligned}$$

indem wir aus den früher erörterten Gründen beim dritten Gliede abbrechen. Es wird also die gesamte durchgelassene Energie

$$(75)\quad \left\{ = 4\pi F dt \left\{ \frac{1}{2}\left(1+\frac{v}{c}\right)^2 \mathfrak{J}_1 + \frac{1}{3}\frac{v}{c}\mathfrak{J}_2 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\mathfrak{J}_2 + \frac{1}{8}\frac{v^2}{c^2}\mathfrak{J}_3 \right\} = I_{12}. \right.$$

Dabei sind

$$(75a)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{J}_1 &= \int_0^\infty f(v)\mathfrak{K}_\nu\, dv, \\ \mathfrak{J}_2 &= \int_0^\infty v\cdot f'(v)\mathfrak{K}_\nu\, dv, \\ \mathfrak{J}_3 &= \int_0^\infty v^2 f''(v)\mathfrak{K}_\nu\, dv. \end{aligned} \right.$$

I_{12} ist die von unten nach oben durch die Platte tretende Energie. I_{21}, die von oben nach unten gehende, ergibt sich daraus, wenn man v/c mit $(-v/c)$ vertauscht.

Also

$$(76)\quad \left\{ I_{21} = 4\pi F dt \left\{ \frac{1}{2}\left(1-\frac{v}{c}\right)^2 \mathfrak{J}_1 - \frac{1}{3}\frac{v}{c}\mathfrak{J}_2 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\mathfrak{J}_2 + \frac{1}{8}\frac{v^2}{c^2}\mathfrak{J}_3 \right\}. \right.$$

Aus (75) und (76) folgt:

$$(77)\qquad I_{12} - I_{21} = 8\pi F dt \frac{v}{c}\left\{ \mathfrak{J}_1 + \frac{1}{3}\mathfrak{J}_2 \right\}.$$

$I_{12} - I_{21}$ ist, wie man sieht, von erster Ordnung in v/c. Daher kehrt es, ohne seinen absoluten Wert zu ändern, sein Zeichen um bei einer Umkehrung der Bewegungsrichtung.

Da $f(v)$, $f'(v)$, $f''(v)$ stetig sind, so können wir durch partielle Integration $\mathfrak{J}_2$ umformen, wie folgt:

$$\mathfrak{J}_2 = \int_0^\infty v f'(v)\mathfrak{K}_\nu\, dv = \Big[v\mathfrak{K}_\nu f(v) \Big]_0^\infty - \int_0^\infty f(v)\frac{\partial}{\partial \nu}(v\mathfrak{K}_\nu)\, dv$$

$$= -\int_0^\infty f(v)\left\{ \mathfrak{K}_\nu + v\frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial \nu} \right\} dv.$$

Daher können wir (77) auf die Form bringen:

$$(78) \qquad I_{12} - I_{21} = \frac{8\pi}{3} F\,dt\,\frac{v}{c}\int_0^\infty f(\nu)\left\{2\mathfrak{K}_\nu - \nu\frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial \nu}\right\} d\nu.$$

Da nun, wie wir oben bewiesen haben, unter Zugrundelegung des Planckschen Strahlungsgesetzes

$$2\mathfrak{K}_\nu - \nu\frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial \nu}$$

eine positive Größe ist, so folgt auch hier

$$(79) \qquad I_{12} > I_{21},$$

d. h. es geht während der Bewegung mehr Energie von unten nach oben durch die Platte, als in umgekehrter Richtung. Es ist jedoch zu beachten, daß dies Ergebnis hier vorläufig unter der Annahme bewiesen ist, daß $f(\nu)$, $f'(\nu)$, $f''(\nu)$ stetig sind.

Weiter unten werden wir uns von der Beschränkung freimachen.

§ 8.

Zur Berechnung der Entropieänderung δS werden wir hier, der Kürze halber, den vorhin an zweiter Stelle angegebenen Weg einschlagen, der sich auf die Formel (52)

$$\delta S = \frac{A}{T} = \frac{A_1 - A_2}{T}$$

stützt; dabei ist A_1 die von außen an der Strahlung unter der Platte geleistete Arbeit, A_2 die von der Strahlung über der Platte gewonnene Arbeit.

Nun fällt nach (71) aus dem Kegel $d\Omega = \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$ unter dem Einfallswinkel ϑ in der Zeit dt auf die Fläche F der Platte von unten eine Energie der Farbe ν:

$$I_1 = 2\mathfrak{K}_\nu\,d\nu\sin\vartheta\left(\cos\vartheta + \frac{v}{c}\right) d\vartheta\,d\varphi\,F\,dt.$$

Von dieser Energie geht ein Teil durch die Platte ungehindert hindurch, und zwar nach (73)

$$I_1 \cdot f\left[\nu\left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)\right].$$

An dieser durchgehenden Strahlung wird offenbar keine Arbeit geleistet. Zur Reflexion gelangt von der einfallenden Energie I_1 nur der Teil

$$I_1\left\{1 - f\left[\nu\left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)\right]\right\},$$

oder wenn wir allgemein

$$1 - f(\nu) = g(\nu) \tag{80}$$

setzen, und für I_1 seinen Wert einsetzen:

$$2\,\mathfrak{K}_\nu\, d\nu \sin\vartheta \left(\cos\vartheta + \frac{v}{c}\right) d\vartheta\, d\varphi\, F\, dt\, g\left[\nu\left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)\right].$$

Die reflektierte Energie ist daher nach (19a)

$$I_2 = 2\,\mathfrak{K}_\nu\, d\nu \sin\vartheta \left(\cos\vartheta + \frac{v}{c}\right) d\vartheta\, d\varphi\, F\, dt\, g\left[\nu\left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)\right] \cdot \left(1 + 2\frac{v}{c}\cos\vartheta + 2\frac{v^2}{c^2}\right).$$

$$I_2 - I_1\, g\left[\nu\left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)\right]$$

ist offenbar die Arbeit, die an der monochromatischen Strahlung vom Einfallswinkel ϑ geleistet wird; ihr Wert ergibt sich zu:

$$4\,\mathfrak{K}_\nu\, d\nu \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, F\, dt \left\{ g(\nu)\frac{v}{c}\cos^2\vartheta + 2\,g(\nu)\frac{v^2}{c^2}\cos\vartheta + \nu\, g'(\nu)\frac{v^2}{c^2}\cos^3\vartheta \right\}.$$

Integriert man dieses Arbeitsdifferential über ν von 0 bis ∞, über φ von 0 bis 2π, über ϑ von 0 bis

$$\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{v}{c},$$

so erhält man:

$$A_1 = 8\,\pi\, F\, dt \left\{ \frac{1}{8}\frac{v}{c}\int_0^\infty g(\nu)\,\mathfrak{K}_\nu\, d\nu + \frac{v^2}{c^2}\int_0^\infty g(\nu)\,\mathfrak{K}_\nu\, d\nu + \frac{1}{4}\frac{v^2}{c^2}\int_0^\infty \nu\, g'(\nu)\,\mathfrak{K}_\nu\, d\nu \right\}. \tag{81}$$

Analog erhält man:

$$A_2 = 8\,\pi\, F\, dt \left\{ \frac{1}{8}\frac{v}{c}\int_0^\infty g(\nu)\,\mathfrak{K}_\nu\, d\nu - \frac{v^2}{c^2}\int_0^\infty g(\nu)\,\mathfrak{K}_\nu\, d\nu - \frac{1}{4}\frac{v^2}{c^2}\int_0^\infty \nu\, g'(\nu)\,\mathfrak{K}_\nu\, d\nu \right\}. \tag{82}$$

Daher

$$A = A_1 - A_2 = 8\pi F dt \frac{v^2}{c^2}\left\{2\int_0^\infty g(\nu)\mathfrak{R}_\nu d\nu + \frac{1}{2}\int_0^\infty \nu g'(\nu)\mathfrak{R}_\nu d\nu\right\}.$$

Nun ist nach (80)

$$g(\nu) = 1 - f(\nu),$$
$$g'(\nu) = -f''(\nu).$$

Daher ergibt sich unter Benutzung der in (75a) eingeführten Abkürzungen:

$$A = 8\pi F dt \frac{v^2}{c^2}\left\{K - 2\mathfrak{J}_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{J}_2\right\}, \tag{83}$$

und

$$\delta S = \frac{A}{T} = \frac{8\pi F dt}{T}\frac{v^2}{c^2}\left\{K - 2\mathfrak{J}_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{J}_2\right\}. \tag{84}$$

δS und A sind auch hier, wie man sieht, von der Ordnung v^2 und nehmen daher für unendlich kleine Geschwindigkeiten der Platte den Wert 0 an.

Da nach dem obigen $\mathfrak{J}_2$ in der Form

$$\mathfrak{J}_2 = -\int_0^\infty f(\nu)\left\{\mathfrak{R}_\nu + \nu\frac{\partial \mathfrak{R}_\nu}{\partial \nu}\right\} d\nu$$

geschrieben werden kann, so können wir, unter Beachtung von (80) und Benutzung der leicht zu verifizierenden Relation

$$K = \int_0^\infty 2\mathfrak{R}_\nu d\nu = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left\{3\mathfrak{R}_\nu - \nu\frac{\partial \mathfrak{R}_\nu}{\partial \nu}\right\} d\nu$$

den Formeln (83) und (84) folgende Gestalt geben:

$$A = 4\pi F dt \frac{v^2}{c^2}\int_0^\infty g(\nu)\left\{3\mathfrak{R}_\nu - \nu\frac{\partial \mathfrak{R}_\nu}{\partial \nu}\right\} d\nu, \tag{85}$$

und

$$\delta S = \frac{4\pi F dt}{T}\frac{v^2}{c^2}\int_0^\infty g(\nu)\left\{3\mathfrak{R}_\nu - \nu\frac{\partial \mathfrak{R}_\nu}{\partial \nu}\right\} d\nu. \tag{86}$$

Da nun, wie wir in (47) sahen, $3\mathfrak{R}_\nu - \nu(\partial \mathfrak{R}_\nu/\partial \nu)$ stets positiv ist, so folgt, da auch $g(\nu) > 0$,

$$A > 0 \quad \text{und} \quad \delta S > 0,$$

d. h. im allgemeinen ist der Prozeß irreversibel und erfordert einen äußeren Arbeitsaufwand. Für unendlich kleine Geschwindigkeiten wird auch hier, im Grenzfall, der Prozeß reversibel, und die zu leistende Arbeit wird unendlich klein.

§ 9.

Die vorangegangenen Entwickelungen gelten nur für den Fall, daß $f(v)$ und seine Ableitungen im ganzen Intervall von 0 bis ∞ eindeutig, endlich und *stetig* sind. Wir könnten daher ohne weiteres nie zu unserem früheren Problem (das doch einen Spezialfall des hier behandelten allgemeineren darstellen sollte) zurückgelangen, da ja dort $f(v)$ an den Stellen a und b unstetig ist.

Wir müssen daher unsere Betrachtungen noch erweitern, und setzen von nun an voraus, daß von den hier in Frage kommenden Größen $f(v)$, $f'(v)$, $f''(v)$ eine oder mehrere an den Stellen a und b Unstetigkeiten zeigen. Der noch allgemeinere Fall von mehr als zwei Unstetigkeitsstellen ergibt sich hieraus durch Superposition.

Wenn also in dem Gange einer oder mehrerer der Funktionen $f(v)$, $f'(v)$, $f''(v)$ Unstetigkeiten bei a und b auftreten, so ist die in (74) benutzte Taylorsche Reihe in der Umgebung von a und b nicht mehr anwendbar und muß bei der Berechnung von I_{12} durch eine andere Entwickelung ersetzt werden.

Liegt nämlich v zwischen

$$a\left(1 - \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2}\right) \quad \text{und} \quad a\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right),$$

dann kann, da ϑ zwischen 0 und $\pi/2 + \arcsin v/c$ variiert,

$$v\left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)$$

für gewisse ϑ unterhalb, für andere oberhalb von a liegen, und man muß daher die Betrachtung teilen.

Ist

$$v\left(1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta\right) \gtrless a \quad \text{oder} \quad \vartheta \gtrless \arccos\frac{c}{v}\left(\frac{a}{v} - 1\right),$$

dann entwickeln wir zweckmäßig, wie folgt:

$$f\left[\nu\left(1+\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)\right] = f(a) + \frac{\left[\nu\left(1+\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)-a\right]}{1!}f'(a) + \frac{\left[\nu\left(1+\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)-a\right]^2}{2!}f''(a),$$

wo

$$\begin{cases} f(a) = \lim\limits_{\xi=0} f(a-\xi), \\ f'(a) = \lim\limits_{\xi=0} f'(a-\xi), \\ f''(a) = \lim\limits_{\xi=0} f''(a-\xi). \end{cases}$$

Ist aber

$$\vartheta < \arccos\frac{c}{v}\left(\frac{a}{\nu}-1\right),$$

dann wird man entwickeln:

$$f\left[\nu\left(1+\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)\right] = \lim_{\xi=0} f(a+\xi) + \frac{\left[\nu\left(1+\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)-a\right]}{1!}\lim_{\xi=0} f'(a+\xi) + \frac{\left[\nu\left(1+\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)-a\right]^2}{2!}\lim_{\xi=0} f''(a+\xi).$$

Genau dieselben Betrachtungen gelten für die Unstetigkeitsstelle b.

Macht man bei der Berechnung von I_{21} analoge Entwickelungen und bildet

$$I_{12} - I_{21},$$

so erhält man schließlich das einfache Resultat:

$$(87)\quad \left\{ I_{12} - I_{21} = \frac{8\pi}{3} F\,dt\,\frac{v}{c}\lim_{\xi=0}\left\{\int_0^{a-\xi} f(v)\left[2\Re_\nu - \nu\frac{\partial\Re_\nu}{\partial\nu}\right]dv + \int_{a+\xi}^{b-\xi} f(v)\left[2\Re_\nu - \nu\frac{\partial\Re_\nu}{\partial\nu}\right]dv + \int_{b+\xi}^{\infty} f(v)\left[2\Re_\nu - \nu\frac{\partial\Re_\nu}{\partial\nu}\right]dv\right\}.\right.$$

Sind a und b keine Unstetigkeitsstellen, so geht dies Resultat ohne weiteres in das in (78) erhaltene über.

Der Einfluß der Unstetigkeitsstellen a und b macht sich, wie man sieht, nur in der Weise geltend, daß bei der Integration nach ν diese Unstetigkeitsstellen durch kleine Intervalle, $a - \xi$ bis $a + \xi$ und $b - \xi$ bis $b + \xi$, aus dem Integrationsgebiet auszuschließen sind; man führt dann die Integration in gewöhnlicher Weise aus und geht zur Grenze $\xi = 0$ über.

Bei mehr als zwei Unstetigkeitsstellen gilt dieselbe Vorschrift.

Nur für sehr kleine ν wird, wie wir oben sahen, nach dem Rayleighschen Strahlungsgesetz:

$$2\mathfrak{K}_\nu - \nu \frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial \nu} = 0 \quad \text{und daher} \quad I_{12} = I_{21},$$

d. h. im Grenzfall sehr langer Wellen (oder sehr hoher Temperatur) geht während der Bewegung gleich viel Energie von unten nach oben durch die Platte, wie in umgekehrter Richtung.

Sonst ist stets

$$2\mathfrak{K}_\nu - \nu \frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial \nu} > 0 \quad \text{und daher} \quad I_{12} - I_{21},$$

d. h. im allgemeinen geht auch hier mehr Energie von der Seite der komprimierten Strahlung nach oben, als umgekehrt.

Setzen wir jetzt speziell:

$f(\nu) = 0$ für alle ν zwischen
$\nu = 0$ und $\nu = a$, $\nu = b$ und $\nu = \infty$;

$f(\nu) = 1$ für alle ν zwischen
$\nu = a$ und $\nu = b$,

so sind wir damit zu unserem früheren Problem zurückgekehrt.

Es fallen dann in unserem obigen Ausdruck (87) das erste und dritte Integral fort, und es bleibt:

$$I_{12} - I_{21} = \frac{8\pi}{8} F d t \frac{\nu}{c} \lim_{\xi=0} \int_{a+\xi}^{b-\xi} \left[2\mathfrak{K}_\nu - \nu \frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial \nu} \right] d\nu$$

$$= 8\pi F d t \frac{\nu}{c} \left\{ \int_a^b \mathfrak{K}_\nu \, d\nu + \frac{1}{3} a \mathfrak{K}_a - \frac{1}{3} b \mathfrak{K}_b \right\}.$$

Dies ist in der Tat der in (24) erhaltene Wert.

Ist $f(\nu)$ nur zwischen a und b von 0 verschieden, dann folgt aus (87)

$$I_{12} - I_{21} = \frac{8\pi}{3} F dt \frac{v}{c} \int_a^b f(\nu) \left[2\Re_\nu - \nu \frac{\partial \Re_\nu}{\partial \nu} \right] d\nu .$$

Auch bei der Berechnung der Entropieänderung δS und der Arbeit $A = T . \delta S$ war oben Stetigkeit von $f(\nu)$, $f'(\nu)$, $f''(\nu)$ vorausgesetzt worden.

Führt man auch diese Berechnung unter der Annahme durch, daß bei a und b Unstetigkeiten auftreten können, und geht dabei ganz den eben beschrittenen Weg, dann findet man:

$$(88) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta S = \frac{4\pi F dt}{T} \frac{v^2}{c^2} \lim_{\xi=0} \Big\{ & \int_0^{a-\xi} g(\nu) \left[3\Re_\nu - \nu \frac{\partial \Re_\nu}{\partial \nu} \right] d\nu \\ & + \int_{a+\xi}^{b-\xi} g(\nu) \left[3\Re_\nu - \nu \frac{\partial \Re_\nu}{\partial \nu} \right] d\nu \\ & + \int_{b+\xi}^{\infty} g(\nu) \left[3\Re_\nu - \nu \frac{\partial \Re_\nu}{\partial \nu} \right] d\nu \Big\} . \end{aligned} \right.$$

Dabei ist nach (80)

$$g(\nu) = 1 - f(\nu).$$

$g(\nu)$ ist stets > 0, ebenso ist $3\Re_\nu - \nu(\partial \Re_\nu / \partial \nu)$, wie wir oben in (47) bewiesen haben, stets positiv. Daraus folgt, daß allgemein:

$$(89) \qquad \delta S > 0 .$$

Wie auch die Platte beschaffen sein mag, der Prozeß ist stets mit einer endlichen Entropiezunahme verbunden, die von der Ordnung v^2/c^2 ist.

Der Prozeß ist im allgemeinen irreversibel und wird nur im Grenzfall unendlich kleiner Geschwindigkeit umkehrbar. Über den Einfluß der Unstetigkeitsstellen auf den Wert von δS gilt das im Anschluß an (87) Ausgeführte.

Da

$$(90) \qquad A = T . \delta S \text{ nach (89)} > 0 ,$$

so folgt, daß man bei der Bewegung stets von außen Arbeit an der Strahlung leisten muß.

Setzen wir speziell

$f(\nu) = 1$ für die ν zwischen $\nu = a$ und $\nu = b$,

$f(\nu) = 0$ für alle anderen ν,

so ist

$g(\nu) = 0$ für die ν zwischen a und b,

$g(\nu) = 1$ für alle anderen ν.

Es fällt dann in (88) das mittlere Integral fort, und man erhält:

$$\delta S = \frac{4\pi F dt}{T} \frac{v^2}{c^2} \lim_{\xi=0} \left\{ \int_0^{a-\xi} \left[3\mathfrak{K}_\nu - \nu \frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial \nu} \right] d\nu + \int_{b+\xi}^{\infty} \left[3\mathfrak{K}_\nu - \nu \frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial \nu} \right] d\nu \right\},$$

$$= \frac{4\pi F dt}{T} \frac{v^2}{c^2} \left\{ 4 \int_0^a \mathfrak{K}_\nu d\nu + 4 \int_b^{\infty} \mathfrak{K}_\nu d\nu + b\,\mathfrak{K}_b - a\,\mathfrak{K}_a \right\},$$

dasselbe Resultat, das wir schon früher in (45) fanden. Ist $f(\nu)$ und damit auch $g(\nu)$ stetig im Bereich $\nu = 0$ bis $\nu = \infty$, dann geht δS über in den in (86) aufgestellten Wert:

$$\delta S = \frac{4\pi F dt}{T} \frac{v^2}{c^2} \int_0^{\infty} g(\nu) \left[3\mathfrak{K}_\nu - \nu \frac{\partial \mathfrak{K}_\nu}{\partial \nu} \right] d\nu.$$

Ist $g(\nu) = 1$ für alle ν von 0 bis ∞, dann ist unsere Platte ein vollkommener Spiegel, und es ergibt sich:

$$\delta S = \frac{8\pi F dt}{T} \frac{v^2}{c^2} K$$

in Übereinstimmung mit (50).

§ 10.

Daß auch hier stets ein *Aufwand* von äußerer Arbeitsleistung nötig ist, um mit einem vollkommenen Spiegel den Weg der Platte in umgekehrter Richtung zurückzulegen, läßt sich einfach zeigen, wenn man auch hier das Bestehen der Ungleichung

$$p'_2 \left[= \frac{1}{3} u'_2 \left(1 + 3 \frac{r}{c} \right) \right] > p'_1 \left[= \frac{1}{3} u'_1 \left(1 - 3 \frac{v}{c} \right) \right],$$

oder, wie sich nach einiger Rechnung ergibt:

$$6 u \frac{v}{c} > \delta u_1 - \delta u_2$$

nachweist.

Nun ist die an der Strahlung im unteren Raum bei der Bewegung der Platte von außen geleistete Arbeit

$$A_1 = \delta U_1 = (V - Fv\,dt)(u + \delta u_1) - Vu.$$

Also

$$\delta u_1 = \frac{A_1 + u\,Fv\,dt}{V - Fv\,dt}.$$

Analog:

$$\delta u_2 = -\frac{A_2 + Fv\,dt}{V + Fv\,dt},$$

wenn A_2 die Arbeit ist, die die Strahlung im oberen Raum an der bewegten Platte leistet.

Setzt man diese beiden Werte in die obige Ungleichung ein, so folgt nach einiger Rechnung:

$$6u\frac{v}{c} > \frac{A_1 + A_2}{V} + \frac{Fv\,dt}{V}\,\frac{A_1 - A_2}{V} + 2u\frac{Fv\,dt}{V},$$

oder da

$$A_1 - A_2 = A$$

nach (88) und (90) von der Ordnung v^2/c^2 ist,

$$6u\frac{v}{c} > \frac{A_1 + A_2}{V} + 2u\frac{Fv\,dt}{V}.$$

Den größten Wert haben A_1 und A_2 und daher auch $A_1 + A_2$ für einen vollkommenen Spiegel, d. h. wenn $g(\nu) = 1$ für alle ν zwischen 0 und ∞.

Aus (81) und (82) folgt dann:

$$A_1 + A_2 = \frac{8\pi}{3}\frac{F\,dt}{V}\frac{v}{c}K = \frac{2}{3}\frac{Fv\,dt}{V}u.$$

Der Maximalwert der rechten Seite unserer Ungleichung ist daher

$$\frac{8}{3}u\frac{Fv\,dt}{V}.$$

Da nun nach (1)

$$\frac{Fc\,dt}{V} < 2,$$

so folgt

$$\frac{Fv\,dt}{V} < 2\frac{v}{c}.$$

Daher

$$\frac{8}{3}\frac{Fv\,dt}{V}u < \frac{16}{3}\frac{v}{c}u < 6u\frac{v}{c}.$$

Unsere Ungleichung ist also a fortiori erfüllt, und es ist in der Tat, trotzdem $u'_1 > u'_2$, d. h. trotzdem die Dichte der

Energie im unteren Raume vor Beginn der Rückbewegung größer ist als im oberen Raum, doch der Druck der oberen Strahlung auf den *bewegten* Spiegel (p'_2) größer, als der Druck der Strahlung unter dem Spiegel (p'_1). Daher ist eine äußere *Arbeitsleistung* nötig, um die Rückbewegung zu vollführen.

Ein Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz liegt auch hier demnach *nicht* vor.

§ 11. Zusammenfassung.

Wir stellen hier am Schlusse noch einmal unsere Ergebnisse zusammen und heben die wesentlichen Punkte hervor, die von den Resultaten Wiens abweichen.

I. Eine Platte, deren Durchlässigkeitskoeffizient

$$\left(\text{d. h. der Bruch } \frac{\text{Durchgelassene Energie}}{\text{Einfallende Energie}}\right)$$

eine beliebige, stetige oder unstetige, von der Richtung der einfallenden Strahlen und ihrer Polarisation unabhängige, Funktion der Schwingungszahl allein ist, ruft, wenn sie in einem Gefäß mit schwarzer Strahlung, nach Art eines Stempels, von der Mitte aus während einer sehr kurzen Zeit mit einer endlichen Geschwindigkeit bewegt wird, eine *Entropiezunahme* des ganzen Systems hervor. Die Platte umfaßt als wichtigste Spezialfälle: 1. eine Platte der Eigenschaft, alle zwischen zwei Grenzen liegenden Farben ungehindert hindurchzulassen, alle übrigen zu reflektieren, wie ein vollkommener Spiegel; 2. den vollkommenen Spiegel selbst.

II. Ist die Geschwindigkeit der Platte, v, so klein, daß man in den definitiven Resultaten die Entwickelung bei Gliedern der Ordnung v^3 abbricht, so ist die Entropiezunahme des Systems von der Ordnung v^2. Der Prozeß ist also im allgemeinen *irreversibel*, und nach Beendigung der Bewegung ist die Energieverteilung nicht mehr die der schwarzen Strahlung. Im Grenzfall, für unendlich kleine Geschwindigkeiten, wird der Prozeß reversibel, und die Abweichungen von der Energieverteilung der schwarzen Strahlung werden unmerklich klein.

III. Während der Bewegung der Platte geht stets *mehr* (im Grenzfall, für lange Wellen oder sehr hohe Strahlungs-

temperatur, ebensoviel) Energie von der Seite der komprimierten Strahlung durch die Platte in den anderen Raum, als umgekehrt. Die Differenz der in entgegengesetzter Richtung durch die Platte tretenden Energien ist von erster Ordnung in v.

IV. Die während der Bewegung *von außen zu leistende Arbeit* ist stets *positiv* und von der Ordnung v^2. Den Maximalwert hat diese Arbeit, wenn unsere Platte speziell ein vollkommener Spiegel ist. Wird die Bewegung mit unendlich kleiner Geschwindigkeit ausgeführt, so ist keine merkliche Arbeitsleistung dazu nötig.

V. Trotzdem während der nach unten gerichteten Bewegung unserer Platte mehr Energie von unten nach oben durch die Platte geht, als umgekehrt (vgl. III.), ist dennoch nach Beendigung der Bewegung die Energiedichte, infolge der Volumverkleinerung und der Energiezunahme bei der Reflexion, im unteren Raum größer als im oberen.

VI. Ersetzt man daher die Platte durch einen vollkommenen Spiegel, so ist dieser, *solange er ruht*, einem *Überdruck von unten* ausgesetzt.

VII. Legt man dagegen mit dem Spiegel den Weg der Platte in umgekehrter Richtung mit der Geschwindigkeit v zurück, so drückt die obere Strahlung auf den ihr entgegenkommenden, *bewegten* Spiegel stärker, als die Strahlung im unteren Raum auf den von ihr gleichsam zurückweichenden Spiegel.

VIII. Es folgt, daß man beim Rückwege nicht etwa Arbeit gewinnt, sondern im Gegenteil, *Arbeit leistet.*

IX. Beim Hin- und Rückweg ist also im ganzen eine *positive Arbeit geleistet worden.*

Ein Widerspruch mit dem zweiten Hauptsatz liegt demnach nicht vor.

Es ist daher auch unmöglich, unseren Prozeß zur Ableitung eines Energieverteilungsgesetzes zu benutzen.

Nach alledem scheint mir gegen die *theoretische Möglichkeit* der geschilderten Platte, und speziell gegen die Möglichkeit einer Platte, die nur Strahlen, deren Farbe zwischen zwei bestimmten Wellenlängen liegt, vollkommen hindurchläßt, alle übrigen vollkommen reflektiert (unabhängig von der Richtung

der Strahlen), kein Einwand vorzuliegen. Die Annahme einer solchen Platte führt, wie mir scheint, nicht zu einem Widerspruch mit der Theorie.

Es versteht sich dagegen von selbst, daß damit über die *praktische Verwirklichung* der Platte nichts ausgesagt ist. Denn es ist nicht anzunehmen, daß eine Platte von der geschilderten Art auch nur in Annäherung praktisch realisierbar ist, da ja eine Unabhängigkeit der Durchlässigkeit von der Richtung und dem Polarisationszustand der Strahlung nicht wohl denkbar ist.

Dies ist wohl auch der Grund, der Kirchhoff zu den Worten veranlaßte, „die Annahme einer solchen Platte sei durch nichts gerechtfertigt"; er vermied es daher, sich einer derartigen Lamelle zu bedienen, als er den Beweis seines Satzes von Emissions- und Absorptionsvermögen von der Gesamtstrahlung auf die Strahlungen bestimmter Schwingungszahl übertrug.

Dieser zweite Teil des Beweises ist *mit Hilfe unserer Platte* mit einem Schlage zu gewinnen. Nur muß man sich dann darüber klar sein, daß man damit die Anwendung von Beweishilfsmitteln zuläßt, die, *ohne realisierbar zu sein*, allein vom Standpunkt der Theorie einwandfrei sind. Und dies könnte immerhin prinzipielle Bedenken erregen.

(Eingegangen 18. Januar 1908.)

6. *Über die innere Verdampfungswärme;* *von C. Dieterici.*

Die Gleichung, welche die mechanische Wärmetheorie für die innere Verdampfungswärme ϱ einer Flüssigkeit bei der absoluten Temperatur ϑ und unter dem Sättigungsdruck p_s aufstellt

$$\varrho = \left(\vartheta \cdot \frac{dp_s}{d\vartheta} - p_s\right)(v_2 - v_1), \tag{1}$$

worin v_2 und v_1 die spezifischen Volumina des Dampfes und der Flüssigkeit bedeutet und beide Seiten der Gleichung in gleichem kalorischen oder mechanischen Maße genommen sind, entbehrt wie jedes durch rein energetische Betrachtungen gewonnenes Resultat der mechanischen Deutung.

Eine solche suchen die Zustandsgleichungen zu geben. Die Gleichung von van der Waals

$$p + \pi = \frac{R\vartheta}{v - b} \tag{2}$$

liefert unmittelbar, sofern man die van der Waalssche Hypothese über den von der Temperatur unabhängigen Kohäsionsdruck:

$$\pi = \frac{a}{v^2}$$

hinzunimmt, durch

$$\varrho = \int_{v_1}^{v_2} \left(\vartheta \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_v - p\right) dv = \int_{v_1}^{v_2} \pi \,.\, dv = a\left\{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right\} \tag{3}$$

die Anschauung, daß die innere Verdampfungswärme die Arbeit darstellt, welche gegen den in der Flüssigkeit bestehenden Kohäsionsdruck geleistet werden muß, um die Molekeln der Substanz in den Dampfzustand überzuführen, in dem die Kohäsion wesentlich kleiner ist, als in der Flüssigkeit.

Es ist bekannt, daß der letztere Ausdruck (3) sich in keiner Weise mit der wohlbegründeten Gleichung (1) der

mechanischen Wärmetheorie vereinigen läßt. Die an allen beobachteten Stoffen ausgeführten Berechnungen haben durchaus nicht die van der Waalssche Kohäsionskonstante a als konstant ergeben, und alle Bemühungen, a als Temperaturfunktion zu betrachten, haben nicht zum entscheidenden Erfolg geführt.

In anderer Weise hat Clausius die van der Waalsschen Grundanschauungen ausgesprochen. Er stellte sich vor auf dem Boden kinetischer Anschauungen, daß bei der Koexistenz einer Substanz in zwei Phasen in der Flüssigkeitsoberfläche ein dauernder Austausch der molekularen Bewegungen stattfinde, derart, daß zwar von seiten der Flüssigkeit mehr Molekeln pro Flächen- und Zeiteinheit auf die Trennungsfläche treffen, als von seiten des weniger dichten Dampfes, daß aber nur diejenigen Molekeln aus der Füssigkeit in den Dampf übertreten können, die genügende lebendige Kraft mit sich führen, um die Kohäsionsarbeit zu überwinden.

Diese Grundanschauungen sind von Clausius nur in Worten ausgesprochen; ihre mathematische Formulierung ist später in mehreren Arbeiten von G. Jäger, W. Voigt und von mir selbst gegeben.[1])

Ein Resultat ergab sich als ein durch die Beobachtungen kontrollierbares aus den angeführten Arbeiten; daß, wenn man zunächst von der räumlichen Ausdehnung der Moleküle absieht, also die schon in Gleichung (2) auftretende Größe b von van der Waals vernachlässigt, die Beziehung

$$\frac{v_2}{v_1} = e^{+\frac{1/2\, m\, s^2}{1/3\, m\, c^2}}$$

bestehen müsse, worin $1/3\, m\, s^2$ die lebendige Kraft der Schwerpunktsbewegung der Molekeln darstellt, die zur Überwindung des Kohäsionsdruckes notwendig ist, und $1/3\, m\, c^2 = R\vartheta$ die mittlere lebendige Kraft der Molekularbewegung bei der Temperatur ϑ bedeutet, die nach den angeführten Betrachtungen in Flüssigkeit und Dampf die gleiche sein mußte.

---

1) Literaturnachweis findet sich in meiner früheren Arbeit Wied. Ann. 66. p. 826—858. 1898.

Die Durchbruchsarbeit $^1/_2 m s^2$ mußte auf die Gewichtseinheit, berechnet nach Hrn. Voigt, die innere Verdampfungswärme ϱ sein, und folglich ergab sich

$$\frac{v_2}{v_1} = e^{+\frac{\varrho}{R\vartheta}}$$

oder

$$\varrho = R\vartheta \ln \frac{v_2}{v_1}. \tag{4}$$

Eine Prüfung dieser Gleichung unter Benutzung des damals vorliegenden Beobachtungsmaterials zeigte, daß in dieser einfachen Form die Gleichung nicht bestehen könne, sondern daß von vornherein die Gleichung

$$\varrho = c\, R\vartheta \ln \frac{v_2}{v_1} \tag{5}$$

geschrieben werden mußte, worin c ein Faktor ist, der notwendig größer als Eins sein mußte. Eine theoretische Rechtfertigung für die Einführung dieses Faktors gab auch Hr. Voigt sogleich durch die Annahme, daß sich in der Grenzschicht zwischen Flüssigkeit und Dampf nicht nur die Energie der fortschreitenden Bewegung austausche, sondern die Gesamtenergie, und daß die letztere ebenso wie bei Gasen durch Multiplikation mit einem notwendig positiven Faktor aus der Energie der fortschreitenden Bewegung gewonnen werden kann.

Damals ausgeführte Berechnungen an dem Regnaultschen Beobachtungsmaterial ergaben aber, daß dieser Faktor c von Stoff zu Stoff in ganz unübersichtlicher Weise sich änderte und auch bei einem Stoff nicht konstant war, so daß damals von einer weiteren Verfolgung der Gleichung (5) abgesehen werden mußte.

Zudem stand ihr das Bedenken entgegen, daß sie in keiner Weise Rücksicht nimmt auf die von van der Waals durch unanfechtbar erscheinende Überlegungen eingeführte räumliche Ausdehnung der Moleküle, und es war nur natürlich, die Gleichung (5) in die Form

$$\varrho = c\,.\,R\vartheta \ln \frac{v_2 - b_2}{v_1 - b_1}$$

überzuführen und zu suchen, ob man durch Berücksichtigung

der Abhängigkeit der Größe b vom Volumen bessere Übereinstimmung mit den Beobachtungen erzielen könne.

Alle Versuche in dieser Richtung sind fehlgeschlagen.

2. Bei neueren Berechnungen, die ein anderes Ziel verfolgten, fiel es mir auf, daß bei dem von Hrn. S. Young so vortrefflich beobachteten Isopentan[1] C_5H_{12} die nach der thermodynamischen Gleichung (1) berechnete innere Verdampfungswärme ϱ tatsächlich dem Ausdruck $R\vartheta \ln(v_2/v_1)$ proportional sei, oder daß die Gleichung (5)

$$\varrho = \left(\vartheta \cdot \frac{dp_s}{d\vartheta} - p_s\right)(v_2 - v_1) = c\, R\vartheta \ln \frac{v_2}{v_1}$$

zu Recht bestehe.

Den Beweis hierfür bringt die folgende Tabelle 1, in der neben der absoluten Temperatur die Sättigungsdaten nach den Beobachtungen von S. Young angegeben sind; damit ist unter ϱ die innere Verdampfungswärme nach der thermodynamischen Gleichung (1) in Kalorien berechnet und ebenso der Ausdruck $R\vartheta \ln(v_2/v_1)$. Die letzte Spalte gibt den Quotienten

$$c = \frac{\varrho}{R\vartheta \ln \frac{v_2}{v_1}}.$$

An Konstanten sind verwendet:

$$1\text{ mm Hg} = 1{,}3596 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2},$$

1 Kalorie = 427,4 g-m und die Gaskonstante für 1 g Isopentan

$$R = \frac{84500}{72.1} \frac{\text{g-cm}}{^\circ\text{C.}} = 0{,}02742 \frac{\text{cal}}{^\circ\text{C.}}.$$

Die mit c überschriebene Spalte der Tabelle zeigt, daß der Quotient $\varrho / R\vartheta \ln(v_2/v_1)$ mit überraschender Genauigkeit konstant ist; sieht man von den beiden letzten der kritischen Temperaturen sehr nahe liegenden Werten ab, so liegen alle berechneten Werte zwischen 1,695 und 1,708, zeigen also Schwankungen in dem engen Bereich von nur 0,7 Proz. Systematische Abweichungen sind in keiner Weise erkennbar. Fragt man nach der Genauigkeit, die man bei der Berechnung überhaupt erwarten kann, so ist ersichtlich, daß sie im wesent-

1) S. Young, Zeitschr. f. physik. Chem. 29. p. 193—241. 1899.

Tabelle 1.

Isopentan: $t_\varkappa = 187{,}8°$ C., $p_\varkappa = 25010$ mm Hg, $v_\varkappa = 4{,}266$ cm³.

ϑ	p, mm Hg	v_1 cm³	v_2 cm³	ϱ cal	$R\vartheta \ln \frac{v_2}{v_1}$ cal	c
283	390,5	1,5885	607,5	78,64	46,15	1,704
293	572,6	1,6141	424	75,97	44,76	1,697
303	815,3	1,6413	303	73,52	43,35	1,696
313	1131	1,6700	223,2	71,22	42,01	1,695
323	1533	1,7005	167,6	68,95	40,66	1,696
333	2036	1,7329	127,9	66,67	39,27	1,698
343	2653	1,7679	98,9	64,18	37,86	1,695
353	3401	1,8050	77,9	62,01	36,44	1,702
363	4296	1,8475	61,85	59,49	34,94	1,703
373	5355	1,8940	49,45	56,72	33,39	1,699
383	6596	1,9455	39,80	53,78	31,71	1,696
393	8040	2,0037	32,20	50,98	29,93	1,703
403	9707	2,0720	26,10	47,65	27,99	1,702
413	11620	2,1530	21,15	44,15	25,86	1,707
423	13804	2,2500	17,14	40,18	23,56	1,705
433	16285	2,3780	13,72	35,52	20,80	1,708
443	19094	2,5550	10,71	29,58	17,40	1,697
453	22262	2,8580	7,95	21,23	12,69	1,673
458	23992	3,1830	6,355	14,17	8,68	1,632
460,8	25010	4,266	4,266	0	0	—

lichen bestimmt ist durch die Zuverlässigkeit der Werte, die für ϱ nach der thermodynamischen Gleichung berechnet sind. Die in dieser vorkommenden Werte des Dampfdruckes und der Dampfdruckzunahme mit der Temperatur können wohl mit Rücksicht auf die von Hrn. Young verwendete Briotsche Interpolationsformel als zuverlässig angenommen werden; die wesentliche Ursache einer Ungenauigkeit in ϱ steckt in dem multiplikativen Faktor $(v_2 - v_1)$ und dieser wieder ist bei niedrigen Temperaturen fast allein durch v_2 bestimmt, erst bei Temperaturen, die der kritischen nahe sind, macht sich auch die Ungenauigkeit im Werte von v_1 bemerkbar.

Im Nenner des Quotienten c tritt das Verhältnis v_2/v_1 dieser Größen nur in dem Logarithmus auf; ihre Unsicher-

heit ist also hier nicht von so großem Einfluß, wie im Zähler, wo die Differenz eingeht. Aus der Tatsache, daß die Berechnung der Tabelle 1 den Quotienten c mit einer so großen Schärfe konstant ergibt, muß man also schließen, daß die von S. Young angegebenen Werte der Sättigungsvolumina von Dampf und Flüssigkeit, dank der von ihm ersonnenen ausgezeichneten Beobachtungsmethode, einen über Erwarten hohen Grad von Genauigkeit haben, und es ist weiter auch ersichtlich, warum die Werte, die der kritischen Temperatur nahe liegen, eine etwas größere Ungenauigkeit zeigen müssen.

Als Resultat der an Isopentan ausgeführten Berechnung ergibt sich also:

Die Beziehung

$$\varrho = c\, R\, \vartheta \ln \frac{v^2}{v_1}$$

ist als richtig zu betrachten; das Resultat ist ohne jede hypothetische Annahme allein durch Berechnung gewonnen, die sich unmittelbar auf das Beobachtungsmaterial stützt; ist also als ein reines Beobachtungsergebnis zu betrachten. Der Faktor c ist in dem ganzen Beobachtungsgebiet also bei Isopentan zwischen $t = 10^0$ C. und $t = t_k = 187{,}8^0$ C. konstant und hat den Mittelwert $c = 1{,}70$.

3. Hr. A. Richter[1]) hat auf meine Veranlassung dann die gleiche Berechnung für eine Reihe anderer Stoffe ausgeführt. Das Ergebnis ist kurz folgendes:

Bei Äthyläther[2]) mit den kritischen Daten $t_k = 194{,}4^0$ C., $v_k = 3{,}81$ cm^3, $p_k = 27060$ bestätigt sich die aufgestellte Beziehung in gleicher Weise; die Werte des Faktors c liegen zwischen 1,710 und 1,745, ihr Mittelwert ist $c = 1{,}73$. Nur in unmittelbarster Nähe der kritischen Temperatur sind, wie bei Isopentan, etwas größere Abweichungen.

Bei Benzol[3])

$t_k = 288{,}5^0$ C., $v_k = 3{,}291$ cm^3, $p_k = 36395$ mm Hg

1) Inaug.-Diss. Rostock 1908.

2) Nach den Beobachtungen von Ramsay u. Young, Phil. Trans. 178. p. 57—93. 1887.

3) S. Young, Journ. chem. soc. 55. p. 486—521. 1889; 59. p. 125 bis 139. 1891.

besteht Konstanz des Faktors c in den Grenzen 1,696 und 1,724, der Mittelwert ist $c = 1{,}71$. Bei dieser Substanz ist auch in unmittelbarster Nähe der kritischen Temperatur die Konstanz des Faktors c erhalten.

Um Substanzen ganz anderer chemischer und physikalischer Eigenschaften zu untersuchen, wurden weiter berechnet:

Kohlensäure[1]): $t_\varkappa = 31{,}35^\circ$ C., $v_\varkappa = 2{,}155$ ccm,

$p_\varkappa = 72{,}9$ Atm.

Auch hier ergab sich im Temperaturintervall -25° C. bis $+30^\circ$ C. Konstanz des Faktors c in den Grenzen 1,698 und 1,731 mit dem Mittelwert $c = 1{,}717$.

Schweflige Säure: $t_\varkappa = 156^\circ$ C., $v_\varkappa = 1{,}923$ cm³,

$p_\varkappa = 78{,}9$ Atm.

Die Konstanz des Faktors c ist hier in dem Beobachtungsgebiet zwischen 0 und 156° C. nicht eine so vollkommene wohl deshalb, weil die älteren Beobachtungsdaten von Regnault und Cailletet und Mathias nicht einen solchen Grad von Genauigkeit haben, wie die Daten der vorher angeführten Stoffe. Der Faktor c schwankt zwischen 1,642 und 1,789, ohne jedoch einen systematischen Gang zu verwerten. Der Mittelwert ist: $c = 1{,}73$.

Endlich auch bei

Wasser[2]) $t_\varkappa = 365^\circ$ C., $p_\varkappa = 200{,}5$ Atm., $v_\varkappa = 2{,}33$ cm³,

nach Nadejdim dagegen $v_\varkappa = 4{,}812$ cm³, nach Batelli ergibt sich, daß der Faktor c zwischen 100° C. und 170° C. von den Werten 1,62—1,67 kontinuierlich wächst, dann aber zwischen 170° C. und 270° C. innerhalb der Werte 1,685 und 1,729 konstant bleibt mit dem Mittelwert $c = 1{,}707$. Nach diesen unmittelbar an die Beobachtungen angeschlossenen Berechnungen kann man wohl die Behauptung aufstellen, daß die in Gleichung (5) aufgestellte Beziehung zwischen der inneren Verdampfungswärme,

1) Nach den Daten von Amagat.

2) Nach W. Ramsay u. S. Young, Phil. Trans. 183. p. 107 bis 130. 1892.

der Temperatur und den Sättigungsvoluminis wenigstens für die „normalen" Stoffe allgemeine Gültigkeit hat.

4. Das weitere auffallende Ergebnis, daß der Faktor c bei allen berechneten Substanzen trotz aller Verschiedenheiten der chemischen und physikalischen Eigenschaften den fast gleichen Wert 1,72 hat, findet eine einfache Deutung. Für den kritischen Zustand aller „normalen" Substanzen hat S. Young aus seinen Beobachtungen die erste Regel gefolgert, daß ist:

$$\frac{R\,\vartheta_k}{p_k\,v_k} = 3{,}7,$$

oder, da $R\,\vartheta_k/v_k = P_k$ der Druck ist, der nach den idealen Gasgesetzen eintreten müßte, daß der ideale kritische Druck P_k 3,7 mal so groß ist als der tatsächlich beobachtete Druck p_k. Die Verhältniszahl für P_k/p_k zeigt bei verschiedenen normalen Stoffen geringe Abweichungen, die Zahl 3,7 ist der Mittelwert der zwischen 3,5 und 3,9 liegenden Einzelzahlen, die sich für normale Stoffe ergeben, während anormale Stoffe wie Alkohol und Essigsäure wesentlich verschiedene Verhältniszahlen berechnen lassen.

Ferner folgt aus S. Youngs Beobachtungen die zweite[1]) für den kritischen Punkt bestehende Regel, daß

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_k = \frac{R}{{}^1/_2\, v_k}$$

ist, oder daß — ebenfalls mit geringen Abweichungen bei den normalen Substanzen — der Spannungskoeffizient gerade doppelt so groß ist, als er nach den idealen Gasgesetzen sein müßte. Da in dem bekannten $p\,v$-Diagramm der Spannungskoeffizient gleich dem Vertikalabstand der Druckisothermen bei konstantem Volumen dargestellt ist, so trägt die zweite Regel dem Umstande Rechnung, daß die Druckisothermen in der Nähe des kritischen Punktes stark auseinandergezogen sind, und zwar nach der empirischen Regel so stark, daß ihr Vertikalabstand gerade doppelt so groß ist, als er nach den idealen Gasgesetzen sein sollte.

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 12. p. 144—153. 1903.

Beide Regeln zusammen geben für die Energieänderung im kritischen Zustand

$$(6)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_\varkappa = \vartheta_\varkappa \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_\varkappa - p_\varkappa = 6{,}4 \, . \, p_\varkappa = \frac{6{,}4}{3{,}7} \cdot \frac{R\,\vartheta_\varkappa}{v_\varkappa} \\ \qquad\qquad = 1{,}73 \cdot \frac{R\,\vartheta_\varkappa}{v_\varkappa} \, . \end{cases}$$

Dies ist der Faktor, der aus der Berechnung der Verdampfungswärmen sich ergab, und seine Bedeutung übersieht man am besten, wenn man die vorstehende Gleichung in der Form

$$(6a)\qquad v_\varkappa \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_\varkappa = 1{,}73 \, . \, R\,\vartheta_\varkappa$$

schreibt und sich vergegenwärtigt, daß $(\partial U/\partial v)_\varkappa$ die Energieänderung für die Raumeinheit, $v_\varkappa \, . \, (\partial U/\partial v)_\varkappa$ also die Energieänderung für so viel Raumeinheiten darstellt, als durch $v_\varkappa$ gegeben ist. Und da in $v_\varkappa$ Raumeinheiten die Masseneinheit 1 g Substanz enthalten ist, stellt also der links stehende Ausdruck die auf die Gewichtseinheit berechnete Änderung der Gesamtenergie der Substanz im kritischen Zustand dar; sie ist mit geringen individuellen Abweichungen 1,73 mal so groß als $R\,\vartheta_\varkappa$, einer Größe, die der mittleren lebendigen Kraft der fortschreitenden Molekularbewegung proportional ist.

Das merkwürdige Ergebnis, daß bei Berechnung der Verdampfungswärmen aller untersuchten normalen Substanzen trotz aller Verschiedenheit chemischer und physikalischer Eigenschaften der fast gleiche Faktor c eintritt, hat also darin seinen Grund, daß für alle diese im kritischen Zustand die Änderung der Gesamtenergie zur Energie der fortschreitenden Bewegung in einem bestimmten konstanten Verhältnis steht.

Es würde von Interesse sein, auch für anormale Substanzen die Berechnung durchzuführen; der Umstand, daß auch Wasser sich in hohen Temperaturen „normal" verhält, wie es aus der Berechnung der Verdampfungswärme hervorgeht, ist mir schon einmal bei Berechnung der Dampfdrucke[1]) aufgefallen. Führt man die Gleichung (6) bzw. (6a) in den Ausdruck (5) für die Verdampfungswärme ein, so kommt

$$\varrho = c\,R\,\vartheta_\varkappa \cdot \frac{\vartheta}{\vartheta_\varkappa} \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} = c\,R\,\vartheta_\varkappa \, . \, \tau \ln \frac{v_2}{v_1} \, .$$

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 15. p. 860–864. 1904.

Nach der Theorie der korrespondierenden Zustände ist bei gleichen reduzierten Temperaturen τ, v_1 der gleiche Bruchteil von v_∞ und v_2 das gleiche Vielfache von v_∞. Aus dem Verhältnis fällt v_∞ heraus und folglich hat $\ln v_2/v_1$ bei gleichem τ für alle normalen Substanzen den gleichen Wert.

Folglich ist bei gleichen reduzierten Temperaturen die Verdampfungswärme aller Substanzen proportional $R\vartheta_\infty$ oder auf die Mole berechnet proportional der kritischen Temperatur der Substanz.

Die Theorie der korrespondierenden Zustände trifft nicht genau zu; stellt man sich aber $\ln v_2/v_1$ als Funktion von τ graphisch dar, so zeigen die hier berechneten Substanzen nur so geringe Abweichungen, daß man die Kurven als identisch ansehen kann. Es würde von größtem Interesse sein, die Funktion von τ, welche $\ln v_2/v_1$ darstellt, aufzufinden und damit die Verdampfungswärme ϱ als Funktion der Temperatur allein darzustellen. Dieses Problem, welches auch weiter unten wieder hervortritt, ergibt sich hier als das wichtigste; seine Lösung ist mir bisher nicht gelungen. Es ist aber sicher, daß mit seiner Lösung zugleich auch ein wesentlicher Schritt zu der Fundamentalfrage, den Dampfdruck in rationeller Weise als Funktion der Temperatur darzustellen, getan sein wird, und wahrscheinlich, daß die Abweichungen vom Gesetz der korrespondierenden Zustände sich durch die geringen Differenzen des Faktors c bedingt ergeben werden, die ihrerseits wieder bedingt sind durch die kritischen Daten der verschiedenen Substanzen.

5. Die Übersicht über die nachfolgende Berechnung, die ich allerdings nur für Isopentan durchführen kann, weil nur für diese Substanz die nötigen experimentellen Daten vorliegen, wird wesentlich erleichtert, wenn man, wie ich es für Wasser[1]) in beschränktem Maße getan habe, das Energiediagramm für Isopentan in einem U, v-Blatt entwirft. Hr. Kleiminger[2]) hat auf meine Veranlassung die Berechnung vollständig durchgeführt. Ich entnehme die Zahlen der folgenden Tabelle und das sie darstellende Diagramm seiner Arbeit.

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 16. p. 907—930. 1905.
2) R. Kleiminger, Inaug.-Diss. Rostock 1907.

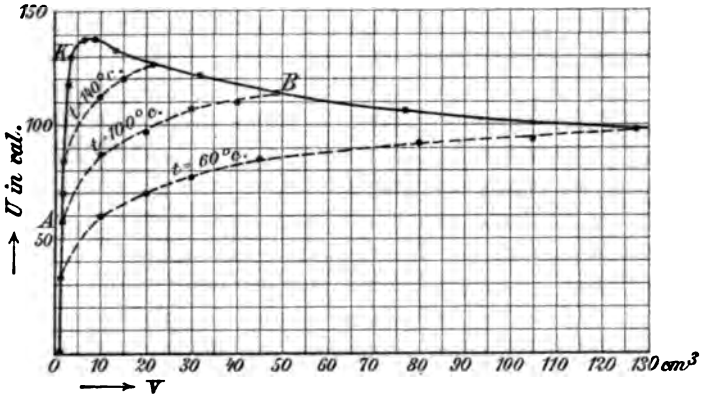
Setzt man den Energieinhalt des flüssigen Isopentans bei $t = 0^\circ$ C. willkürlich $U_0 = 0$, so ist der Energieüberschuß $U_1 - U_0$ bei der Temperatur ϑ, solange die Substanz noch flüssig ist, also in den Temperaturgrenzen ϑ_0 bis $\vartheta_\varkappa$ entsprechend den Volumengrenzen v_0 bis $v_\varkappa$, gegeben durch

$$U_1 - U_0 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} c_i \, d\vartheta,$$

worin c_i, die „innere" spezifische Wärme, definiert ist als die spezifische Wärme c_s der Flüssigkeit im Sättigungszustand, vermindert um die mit der Flüssigkeitsausdehnung verbundene äußere Arbeit; also

$$c_i = c_s - p_s \cdot \frac{d\,v_1}{d\,\vartheta}.$$

Diese spezifische Wärme ist von mir[1]) für Isopentan experimentell bis zur kritischen Temperatur bestimmt, und den Daten entsprechend ist in Tab. 2 der Wert von $U_1 - U_0$ angegeben und in der Figur als Funktion des jeder Temperatur entsprechen-



den Sättigungsvolumens eingezeichnet. Zu jedem Volumen v_1 gehört ein bestimmtes zweites Sättigungsvolumen v_2, und der Energieüberschuß

$$U_2 - U_1 = \varrho$$

ist durch die Verdampfungswärme gegeben. Dadurch ist die Energiekurve der Sättigungszustände in einem Uv-Blatt konstruierbar.

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 12. p. 154—185. 1903.

Tabelle 2.

Isopentan.

ϑ	v_1 cm³	U_1 cal	v_2 cm³	U_2 cal
273	1,5644	0	900	80,48
293	1,614	10,4	424	85,76
313	1,670	21,25	224,2	91,25
333	1,734	32,40	128	98,74
353	1,805	44,6	78	106,35
373	1,895	57,05	49,5	113,39
393	2,004	70,00	32,3	120,96
413	2,154	83,15	21,1	126,95
433	2,378	97,50	13,71	132,74
453	2,859	115,1	7,95	136,09
456	3,020	118,6	7,04	135,85
459	3,303	123,55	5,96	135,42
460,8	4,266	130,70	4,266	130,70

Verfolgt man in der Figur die ausgezogene Sättigungsenergiekurve, so sieht man, daß sie in dem engen Volumintervall von $v_1 = 1{,}5644$ bis $v_\kappa = 4{,}266$ steil ansteigt; aber auch über dieses Volumen hinaus nimmt U_1 noch weiter zu bis zum Werte $U_2 = 136{,}09$ bei dem Volumen $v_2 = 7{,}95$ cm³ entsprechend der Sättigungstemperatur $t = 180^0$ C., um dann bei größeren v_2 wieder abzunehmen.

Das Maximum der Energiekurve liegt also nicht im kritischen Punkt K, sondern bei niederer Temperatur und größerem Volumen. Clausius bezeichnet mit h_s die spezifische Wärme des gesättigten Dampfes; zieht man von ihr die äußere Arbeit $p_s(d\,v_2/d\,\vartheta)$ ab, so gewinnt man die „innere" spezifische Wärme oder die Energieänderung im gesättigten Dampfzustand durch

$$h_i = \left(\frac{d\,U_s}{d\,\vartheta}\right)_s = h_s - p_s \frac{d\,v_2}{d\,\vartheta}$$

analog der inneren spezifischen Wärme der Flüssigkeit.

Im Uv-Blatt ist $\partial\,U_s/\partial\,v$ durch die Neigung der Energiesättigungskurve gegeben. Da diese zwischen v_0 und v_κ stets wächst, ist also auch die auf 1° C. berechnete Energieänderung

$$c_i = \frac{d\,U_1}{d\,\vartheta} = \frac{\partial\,U_s}{\partial\,v} \cdot \frac{d\,v_1}{d\,\vartheta}$$

stets positiv, da $d v_1 / d t$ auch stets positiv ist bis zum kritischen Punkt.

Im Dampfast der Energiekurve ist aber zwischen $v_\varkappa$ und und $v_m = 7{,}95$ cm³, den Temperaturen $t_\varkappa$ und $t = 180^0$ C. entsprechend $\partial U_s / \partial v$ positiv, dagegen $d v_2 / d \vartheta$ negativ und folglich in diesem Intervall

$$h_i = \frac{d U_2}{d \vartheta} = \frac{\partial U_s}{d v} \cdot \frac{d v_2}{d \vartheta}$$

negativ, während es für den weiteren Verlauf der Energiekurve stets positiv ist, weil beide h_i zusammensetzenden Faktoren für sich negativ sind.

Das Diagramm läßt sofort ablesen, daß $\int_{\vartheta}^{\vartheta_\varkappa} c_i \, d \vartheta$ die Höhendifferenz zwischen den Punkten K und A darstellt und ebenso $\int_{\vartheta}^{\vartheta_\varkappa} h_i \, d \vartheta$ die Höhendifferenz zwischen K und B, wenn A und B die zwei Sättigungszustände bei gleicher Temperatur darstellen. Also wird:

$$\int_{\vartheta}^{\vartheta_\varkappa} (h_i - c_i) \, d \vartheta = U_2 - U_1 = \varrho$$

und somit

$$h_i - c_i = \frac{d \varrho}{d \vartheta}.$$

Da nun nach Gleichung (5)

$$\varrho = c R \vartheta \ln \frac{v_2}{v_1}$$

ist, folgt

$$h_i - c_i = \frac{d}{d \vartheta} \left\{ c R \vartheta \ln \frac{v_2}{v_1} \right\}. \tag{8}$$

Oder

$$\begin{cases} c_i = \frac{d}{d \vartheta} \{ c R \vartheta \ln v_1 \} + f(\vartheta) + A, \\ h_i = \frac{d}{d \vartheta} \{ c R \vartheta \ln v_2 \} + f(\vartheta) + A, \end{cases} \tag{8a}$$

worin $f(\vartheta)$ und A eine unbekannte Funktion von ϑ bzw. eine Konstante bedeuten, die bei der Differenzbildung herausfallen.

Aus diesen Gleichungen geht hervor, daß, wenn man c_i und h_i als Funktion der Temperatur allein darstellen will, man wieder

die Vorfrage zu lösen hat, die Sättigungsvolumina v_1 und v_2 als Temperaturfunktionen darzustellen. Das ist dasselbe Problem, welches schon im vorigen Abschnitt hervortrat, dessen Lösung aussteht. Eine allgemeine weitere Verfolgung ist damit abgeschnitten; aber da c_i für Isopentan beobachtet ist und damit auch h_i durch

$$h_i = c_i + \frac{d\varrho}{d\vartheta}$$

gegeben ist, andererseits auch die Ausdrücke $cR\vartheta \ln v_1$ und $cR\vartheta \ln v_2$ ohne weiteres aus den Beobachtungsdaten berechenbar sind, so kann man aus diesen Daten wenigstens einen Schluß ziehen auf die Zusatzglieder in Gleichung (8a).

Es ergibt sich das einfache Resultat, daß man mit großer Annäherung auch setzen kann:

$$(9) \qquad \begin{cases} c_i = \frac{d}{d\vartheta}\{cR\vartheta \ln v_1\} + \alpha\vartheta, \\ h_i = \frac{d}{d\vartheta}(cR\vartheta \ln v_2) + \alpha\vartheta, \end{cases}$$

worin für Isopentan zu setzen ist

$$\alpha = 0{,}0016 \frac{\text{cal}}{^0\text{C.}^2}.$$

Inwieweit diese empirische Darstellung den Beobachtungen genügt, zeigt die Tab. 3 in der unter c_i und h_i „berechnet" die nach dieser Gleichung berechneten Werte verglichen sind mit den direkten Beobachtungswerten von c_i bezüglich von

$$h_i = c_i - \frac{d\varrho}{d\vartheta}.$$

Alle Größen sind in cal/^{0}C. gemessen.

Vergleicht man die berechneten c_i-Werte mit den beobachteten, so bemerkt man, daß die Übereinstimmung zwar durchaus nicht vollkommen, aber doch im ganzen zufriedenstellend ist. Man kann füglich nicht mehr erwarten, denn alle in der Tabelle vorkommenden Größen sind Differentialquotienten, die nur durch Differenzbildung aus den beobachtbaren Integralwerten gewonnen sind.

Auch die „berechnete" Energieänderung h_i des gesättigten Dampfes stimmt recht befriedigend mit der zwar nicht unmittelbar beobachteten, aber doch aus den Beobachtungen in

Tabelle 3.

Isopentan: $c = 1{,}70$.

	$0{,}0016\,\vartheta$	$\frac{d}{d\vartheta} c R \vartheta \ln v_1$	$\frac{d}{d\vartheta} c R \vartheta \ln v_2$	c_i berechnet	h_i berechnet	c_i beobachtet	$\frac{d\varrho}{d\vartheta}$	h_i
283	0,453	0,043	−0,190	0,496	0,263	0,513	−0,280	0,233
293	0,469	0,045	−0,190	0,504	0,279	0,528	−0,260	0,268
303	0,485	0,048	−0,178	0,533	0,307	0,547	−0,238	0,309
313	0,501	0,049	−0,178	0,550	0,323	0,556	−0,228	0,328
323	0,517	0,052	−0,178	0,569	0,339	0,571	−0,228	0,343
333	0,533	0,054	−0,180	0,587	0,353	0,587	−0,238	0,339
343	0,549	0,060	−0,181	0,609	0,368	0,603	−0,233	0,370
353	0,565	0,064	−0,184	0,629	0,381	0,620	−0,235	0,385
363	0,581	0,069	−0,191	0,650	0,390	0,640	−0,265	0,375
373	0,597	0,075	−0,202	0,672	0,395	0,662	−0,285	0,377
383	0,613	0,082	−0,211	0,695	0,402	0,685	−0,287	0,398
393	0,629	0,090	−0,228	0,719	0,406	0,707	−0,306	0,401
403	0,645	0,102	−0,240	0,747	0,405	0,724	−0,342	0,382
413	0,661	0,116	−0,262	0,777	0,399	0,753	−0,374	0,379
423	0,677	0,136	−0,294	0,813	0,383	0,793	−0,432	0,361
433	0,693	0,170	−0,350	0,863	0,343	0,856	−0,532	0,324
443	0,709	0,286	−0,450	0,995	0,259	0,950	−0,715	0,235
453	0,725	0,478	−0,705	1,20	0,020	1,17	−1,20	0,000
458	0,733	?	?	?	?	?	?	?
460,8	0,738	?	?	?	?	?	?	?

anderer Weise abgeleiteten Werten gut überein. Der merkwürdige Verlauf dieser Größe, die von niederen Temperaturen beginnend erst wächst, durch ein Maximum hindurchgeht, um bei Temperaturen nahe der kritischen durch den Wert 0 hindurch zu negativen Werten überzugehen, die aber wegen der Unsicherheit der Bildung der Differentialquotienten nicht sicher berechenbar sind, ist richtig dargestellt.

Hiernach erscheint die Darstellung

$$c_i = \frac{d}{d\vartheta}(c R \vartheta \ln v_1) + \alpha \vartheta,$$

$$h_i = \frac{d}{d\vartheta}(c R \vartheta \ln v_2) + \alpha \vartheta$$

gerechtfertigt, worin für Isopentan $\alpha = 0{,}0016$ zu setzen ist.

Es wäre von Interesse, die Bedeutung des Faktors

$$\alpha = \left[\frac{\text{cal}}{^\circ\text{C.}^2}\right]$$

zu ermitteln. Vermutlich wird auch er mit den kritischen Daten in Zusammenhang stehen. Da bisher nur die eine Substanz, Isopentan, in genügendem Umfange beobachtet vorliegt, ist es mir noch nicht gelungen, diesen Faktor α zu deuten.

6. Alle weiteren Folgerungen, welche aus der Beobachtungstatsache, welche durch Gleichung (5) dargestellt ist, abgeleitet werden können, verlangen eine bestimmte Annahme für die Ausdehnungswärme $(\partial U/\partial v)_\vartheta$.

Es liegt ja natürlich nahe anzunehmen, daß zwischen den Sättigungspunkten

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_\vartheta = \frac{c R \vartheta}{v}$$

zu setzen ist, oder anzunehmen, daß, wie es in der Figur durch die punktierten Kurven angedeutet ist, die Energieisothermen im Zweiphasengebiet logarithmische Kurven sind.

Diese Annahme ist zwar die einfachste, aber nicht die einzig zulässige, denn eine jede beliebige Kurve, welche nur an den Sättigungspunkten zu der gleichen Energiedifferenz

$$U_2 - U_1 = \varrho = c R \vartheta \ln \frac{v_2}{v_1}$$

führt, würde zulässig sein.

Es ist aber weiter sofort ersichtlich, daß eine jede Annahme für die Ausdehnungswärme durch

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_\vartheta = \vartheta \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta} - p$$

auf einen ganz bestimmten Verlauf der Druckisotherme führt. Da nun für den Verlauf der Druckisotherme durch das Maxwellsche Theorem ganz bestimmte Bedingungen gegeben sind, so ist nur eine solche Annahme zulässig, die auch mit diesem Theorem in Einklang sind. Meine umfangreichen Berechnungen, nach dieser Richtung weiter zu kommen und damit auch das Problem der Zustandsgleichung zu fördern, haben noch nicht zu genügend klaren Resultaten geführt.

Kiel, Januar 1908.

(Eingegangen 16. Januar 1908.)

7. *Die magnetischen Eigenschaften elektrolytischer Eisenniederschläge;* *von K. Schild.*

Einleitung.

Die magnetischen Eigenschaften des durch Elektrolyse gewonnenen Eisens sind verhältnismäßig wenig untersucht worden. Insbesondere haben sich Beetz, Leick und Maurain mit der Prüfung dieses Gegenstandes befaßt. Die Versuche von Leik geben Aufschluß über die Permeabilität des elektrolytischen Eisens[1], während Beetz[2] und Maurain[3] im wesentlichen der Frage nach dem magnetischen Verhalten von solchen Eisenniederschlägen sich zuwandten, welche während ihrer Bildung der Einwirkung einer konstanten magnetisierenden Kraft ausgesetzt waren. Maurain variierte diese Kraft innerhalb der Grenzen $H = 0$ bis H ca. 10, also über ein beschränktes Intervall hin. Über die Größe der Hysteresisarbeit für elektrolytisch gewonnenes Eisen gibt die Literatur, soviel ich sehe, keine Auskunft und es scheint, daß diese Frage noch nicht behandelt worden ist. Diese Sachlage veranlaßt mich

1. die Maurainschen Versuche zu wiederholen und dabei das Kraftintervall bedeutend zu vergrößern;
2. die Hysteresisverluste elektrolytischer Eisenniederschläge zu ermitteln und nebenbei auch
3. den Verlauf der Permeabilität derselben festzustellen.

Die gewonnenen Versuchsergebnisse bilden den Inhalt meiner im Eidg. physik. Institut Zürich entstandenen Habilitationsarbeit, welche ich im Auszug folgen lasse.

Die Versuchsobjekte und ihre Herstellung.

Zur Ausführung der Elektrolyse benutzte ich folgenden Apparat (Fig. 1).

1) W. Leick, Wied. Ann. 58. p. 691. 1896.
2) E. Beetz, Fortschritte der Physik 1860.
3) Ch. Maurain, Compt. rend. p. 410. 1900.

Ein zylindrisches Glasgefäß von ca. 4 cm lichter Weite und 41 cm Länge, auf der einen Seite offen, auf der anderen mit Schlauchansatz versehen, diente zur Aufnahme der Flüssigkeit und zur Anbringung der Anoden. Als solche wählte ich Platindrähte von 1 mm Dicke und ca. 37 cm Länge. Das Glasgefäß trug bei der Einkröpfung an der Stelle des Querschnittes *a—b* drei um 120° gegeneinander versetzte kleine Öffnungen und ebenso war der Boden des Gefäßes mit drei korrespondierenden Löchern versehen. Durch diese Öffnungen wurden drei Platindrähte eingeführt. Die Befestigung unten erfolgte durch Umwickeln um kleine, am Boden angebrachte Glaszäpfchen. Nachdem die Platindrähte straff gespannt waren, wurden sie oben an ein über den Kopf der Glasröhre geschobenes Messingband, welches die Stromzuleitung *C* trug, angelötet. In dieses zylindrische Glasgefäß konnte der Kathodenträger eingeschoben werden und zwar so, daß die Kathode genau in die Achse der Röhre fiel. Um diese axiale Stellung bequem zu erreichen, gab ich ihrem Träger folgende Gestalt (Fig. 2).

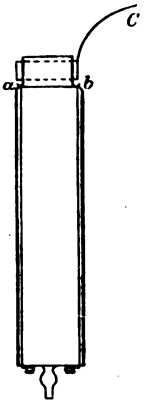


Fig. 1.

Zwei Glasstäbe *c*, *d* von ca. 5 mm Dicke und 34½ cm Länge trugen an den Enden kreisförmige Glasscheibchen von ca. 5 mm Dicke und einem Durchmesser, der so bemessen war, daß der ganze Träger ohne Mühe gerade noch in die eben beschriebene Glasröhre eingeführt werden konnte. Als Kathode verwendete ich ausnahmslos Kupferdraht von 0,9 mm Dicke. Derselbe wurde durch die in der Mitte der Scheiben gelegenen Öffnungen *o—o'* hindurchgezogen und, nachdem das untere Ende mit einem kleinen Knoten versehen war, wickelte man das obere Ende um den kleinen zylindrischen Glasansatz *f* und führte den Leiter von hier nach außen.

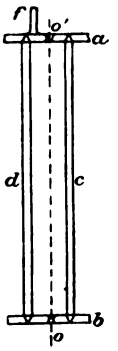


Fig. 2.

Das zylindrische Gefäß konnte oben verschlossen werden mittels eines Gummipfropfens, der zwei Öffnungen besaß: eine

kleine Öffnung zum Durchlassen der Kathode und eine etwas größere, durch welche ein Glasröhrchen eingeschoben war, diente zum Entweichen der bei der Elektrolyse sich bildenden Gase.

Da es nicht im Rahmen meiner Arbeit lag, die magnetischen Eigenschaften des elektrolytischen Eisens in Abhängigkeit von der Lösung zu untersuchen, sondern da es mir nur darauf ankam, ein möglichst reines Eisen zu erhalten, so wählte ich als elektrolytische Flüssigkeit oxalsaures Ammondoppelsalz. Nach den Angaben von B. Neumann erfolgt die Abscheidung des Eisens aus diesem Doppelsalz am besten.

Mein Zersetzungsapparat faßte eine Flüssigkeitsmenge von ca. 500 cm^3 und die Lösung wurde nach folgendem, von Neumann gegebenen Rezept hergestellt:

Ich löste 3 g $FeSO_4$ in 150 cm^3 Wasser. Ebenso brachte ich 18 g Ammoniumoxalat in 325 cm^3 Wasser durch Erwärmen in Lösung. Alsdann wurde die Eisenoxydullösung zu Ammonoxalatlösung gegeben und so lange gerührt, bis der entstehende Niederschlag gelöst war. Es ist darauf zu achten, daß nicht etwa aus Versehen in umgekehrter Weise verfahren wird, denn dann bildet sich ein Niederschlag aus Eisenoxyduloxalat, der nur sehr schwer wieder gelöst werden kann. Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, daß es zum Gelingen eines glatten, kohärenten, tadellosen Niederschlages durchaus erforderlich ist, absolut reine Salze in chemisch reinem, destilliertem Wasser zu lösen; ebenso müssen die Elektroden äußerst sorgfältig vor Beginn der Elektrolyse gereinigt werden, ganz besonders die Kathode; wenn nur die kleinsten Spuren von Unreinheiten, wie z. B. Fett, hier vorhanden sind, so genügt das schon, um mit Sicherheit den Versuch mißlingen zu lassen. Das niedergeschlagene Eisen ist an diesen Stellen nicht kohärent und fällt bei kleinen Erschütterungen ab. Ich habe mit folgender Behandlung der Kathode gute Erfahrungen gemacht: Vor dem Einspannen des Kupferdrahtes in den Kathodenträger wurde jener vermittelst Schmiergelpapier mechanisch gereinigt, alsdann so lange durch ein weißes Fließpapier gezogen, bis kein schwarzer Strich mehr zurückblieb. Nun folgte, nachdem der Kupferdraht an seinem Träger befestigt war, die chemische Reinigung, zunächst durch Behandlung mit reiner, verdünnter Salpetersäure, dann mit konzentriertem Alkohol oder Äther und schließlich

mit reinem, destilliertem Wasser. — Die Elektrolyse wurde mit einer Stromdichte von 1 bis 1,5[a] (pro 100 cm^2) durchgeführt; dies erwies sich als zweckmäßig, da für größere Ströme die Niederschläge oft rauh und brüchig, für kleinere oft schwammig wurden.

Das gewonnene elektrolytische Eisen hatte durchwegs eine hellglänzende, graue Farbe und eine äußerst glatte, homogene Oberfläche.

In folgender Tabelle sind alle Daten sämtlicher hergestellten Versuchsobjekte enthalten.

Die Objekte I, II und III wurden zur Messung der Permeabilität und der Hysteresisverluste benutzt. Da die gefundenen Werte der Permeabilität nicht unerheblich abweichen von denjenigen Werten, welche Leick in seiner Arbeit angibt, so stellte ich nachträglich, um einen Kontrollversuch ausführen zu können, einen Eisenniederschlag her unter genau denselben Bedingungen, wie sie bei Leick bestanden. Dieser Eisenüberzug trägt in der Tabelle die Marke „*A*". Als Kathode wurde bei der Bildung dieses Objektes in Übereinstimmung mit Leick ein Stab aus „reinstem käuflichen Eisen" verwendet. Ferner benutzte ich als Flüssigkeit, wie Leick, eine Lösung von $FeSO_4$ und zwar brachte ich 10 g $FeSO_4$ in 500 cm^3 Wasser in Lösung. Die Eisenmasse des Stabes *A* ist nach Tabelle

$$M = 3{,}8793 \text{ g}.$$

10 g $FeSO_4$ enthalten aber nur 2,01 g Eisen. Sobald diese 2 g elektrolytisch nahezu ausgeschieden waren, wurde der Zersetzungsapparat entleert, gereinigt und mit frisch hergestellter Lösung wieder in Tätigkeit gesetzt. — Diese Erneuerung der Flüssigkeit war für die Objekte *A* und III eine Notwendigkeit; sie ist indessen überall da empfehlenswert, wo sich die Elektrolyse über mehrere Stunden hin erstreckt, denn es kann sich leicht im Laufe der Zeit der Elektrolyt verunreinigen, so daß unhomogene Niederschläge erhalten werden.

Die Orientierung des Apparates, in welchem die Ausscheidung des Eisens vor sich geht, darf während der Dauer der Elektrolyse keine beliebige sein. Schon Beetz hat die Beobachtung gemacht, daß eine beliebig kleine, während der Ausscheidung wirksame magnetisierende Kraft genügte, um die

Nr.	Lösung	Masse	Vol.	Länge	Polabstand	Dicke der Eisenschicht	i Elektrolyse	Stromdichte	i_m	H
		g	cm^3	cm	cm	mm	ca.	ca.		
I	$(NH_4)_2C_2O_4$	0,2856	0,03641	33,98	28,32	0,0340	0,125[a]	1,11[a]	—	—
II	„	0,3822	0,04875	33,14	27,62	0,0468	„	„	—	—
III	„	1,7433	0,2223	33,43	27,86	0,212	„	„	—	—
1	„	0,1540	0,01964	32,50	27,08	Mittel 0,0177	0,127	1,12	0	0,2
2	„	0,1343	0,01713				„	„	0,0455[a]	1,00
3	„	0,1427	0,01820				„	„	0,0853	2,10
4	„	0,1442	0,01839				„	„	0,1504	3,70
5	„	0,1495	0,01906				„	„	0,260	6,40
6	„	0,1338	0,01706				„	„	0,360	8,87
7	„	0,1411	0,01799				„	„	0,547	13,80
8	„	0,1397	0,01781				„	„	0,702	17,30
9	„	0,1259	0,01605				„	„	0,873	21,50
10	„	0,1520	0,01938				„	„	1,174	29,0
A	$FeSO_4$	3,8793	0,4948	34,39	28,66	0,448	0,116	1,07	—	—

Eisenmoleküle teilweise zu „richten" und so dem niedergeschlagenen Eisen permanenten Magnetismus zu verleihen. Schon der Einfluß des erdmagnetischen Feldes genügt, um dieses Resultat zu erzielen.

Um nach Möglichkeit die sich niederschlagenden Eisenmoleküle dem Einfluß der erdmagnetischen Richtkraft zu entziehen, stellte ich vor Beginn der Elektrolyse die Zersetzungsröhre in der Ebene des Meridians so auf, daß ihre Achse $\perp$ stand zur Richtung der erdmagnetischen Kraft. Die so erhaltenen Eisenniederschläge besaßen denn auch keinen wahrnehmbaren permanenten Magnetismus. Es war mir daher möglich, den Verlauf der Permeabilitätskurve auch für kleine magnetisierende Kräfte zu bestimmen, was bei den Leickschen Versuchen nicht der Fall war. Leick gibt selbst an, daß er wegen des Einflusses des erdmagnetischen Feldes seine Magnetisierungskurven erst von Kräften $H =$ ca. 5 an aufzunehmen in der Lage war.

Die Eisenniederschläge, welche in der Tabelle der Versuchsobjekte die Ziffern 1 bis 10 tragen, waren während ihrer Bildung einer konstanten magnetisierenden Kraft ausgesetzt. Um dies zu erreichen, schob ich das zylindrische Zersetzungsgefäß, das eine Länge hatte von ca. 41 cm und einen Durchmesser ca. 45 mm, in eine Magnetisierungsspule (Fig. 3) hinein, deren Daten die folgenden sind:

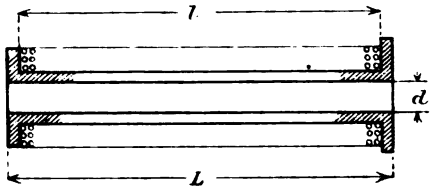


Fig. 3.

Auf diese Spule waren 1177 Windungen aus Kupferdraht von 15 mm Dicke aufgewickelt. Führen dieselben den Strom i, dann liefert die Spule ein Feld H von der Größe

$$H = \frac{0{,}4 \,.\, \pi \,.\, 1177}{59{,}96} \,.\, i,$$

$$= 24{,}65 \,.\, i^{\text{amp.}}.$$

Ein jeder der Stäbe 1 bis 10 wurde nun während seiner Bildung einem Feld ganz bestimmter Stärke ausgesetzt. Diese Feldintensitäten können der Tabelle in Kolonne „*H*" entnommen werden. Die Bedeutung der übrigen dort zusammengestellten Größen dürfte ohne weitere Erläuterung klar sein.

Die Massenbestimmung.

Anfänglich versuchte ich, die Massen der gewonnenen Eisenüberzüge durch Wägung zu bestimmen, durch Wägung der Kathode vor und nach der Elektrolyse. Verschiedene Gründe veranlaßten mich, diese Methode zu verlassen, und die Massenbestimmung meiner Versuchsobjekte durch die chemische Analyse vorzunehmen. Zum guten Gelingen der Eisenniederschläge ist es äußerst wichtig, daß die Kathode in sorgfältigst gereinigtem Zustande ins Eisenbad kommt. Hierfür dürfte man die höchste Gewähr haben, wenn unmittelbar nach dem Reinigungsprozeß zur Elektrolyse geschritten wird. Durch eine Wägung nach der Reinigung wäre es möglich, daß Staubteilchen der Luft usw. an der Kathode haften bleiben, und nur durch ein wiederholtes Reinigen brächte man sie in den Zustand, wie er für die Elektrolyse gefordert wird. Aber auch ein weiterer Grund, der zusammenhängt mit der Anordnung und Befestigung der Kathode während des Versuches, spricht gegen die Wägung, ja schließt sie beinahe vollständig aus.

Wie schon erwähnt, wurde die Kupferkathode an einem gläsernen Träger in der Weise befestigt, daß man jene unten bei 0 (Fig. 3) umbog, so daß sie nicht mehr durch die kleine Öffnung in der Glasscheibe hindurchgezogen werden konnte. Oben am Träger erfolgte die Fixierung des Kupferdrahtes durch paarmaliges Umwickeln um den kleinen gläsernen Ansatz *f*. Wohl wurden nun, um eine Ablagerung des Eisens an den Stellen der Kathode oberhalb der Scheibe *a* zu verhindern, die paar Windungen bei *f* und die Ableitung nach außen durch Auftragen einer dünnen Schellackschicht unleitend gemacht. Die beschriebene Anordnung der Kathode zwang mich aber doch, nur ein Stück derselben von passender Länge als Versuchsobjekt zu benutzen. Es handelt sich nun darum, die Eisenmasse zu kennen, welche auf diesem heraus-

geschnittenen Stücke abgelagert ist; an eine Bestimmung derselben durch Wägung kann wohl kaum gedacht werden. Ebenso dürfte die Massenbestimmung aus dem elektrochemischen Äquivalent heraus ausgeschlossen erscheinen, so daß als einziger Weg noch die chemische Analyse verbleibt.

Ich benutzte denn auch zur Bestimmung der Massen die maßanalytische Methode nach Margueritte, welches Verfahren darauf beruht, daß Ferrosalze in saurer Lösung durch Kaliumpermanganat zu Ferrisalzen oxydiert werden. Ist die Oxydation vollkommen beendet, so bewirkt schon der nächste Tropfen des Permanganats eine bleibende Rötung der Lösung, so intensiv, daß der Endpunkt der Reaktion äußerst scharf erkannt werden kann. Bei der Herstellung der Permanganatlösung, bei der Stellung des Titers sowohl, wie bei der Durchführung der Analyse selbst, folgte ich strenge den Angaben von Treadwell.[1]) Die durch dieses Verfahren gelieferten Massen sind in der Tabelle p. 590 enthalten.

Die Meßmethode.

Die Stab- bzw. Röhrenform meiner Versuchsobjekte bedingt zur Ermittelung ihrer magnetischen Eigenschaften die Wahl einer Magnetometermethode. Da die gegebenen Eisenmassen nur gering sind, so werden auch die Magnetometerausschläge nur klein sein können. Wohl ließe sich durch passende Astasierung die Empfindlichkeit des Magnetometers erhöhen. Frühere Erfahrungen haben mich indessen belehrt, daß der so erreichte Gewinn an Empfindlichkeit eine nicht wesentliche Verfeinerung der Methode bedeutet, weil der astasierte Magnet in viel höherem Maße störenden äußeren Einflüssen preisgegeben ist, und daß zudem die Kompensierung des Ausschlages, der herrührt vom Feld der Magnetisierungsspule, ganz besondere Schwierigkeiten bietet. Aus diesen Gründen habe ich von vornherein es unterlassen, auf dem angedeuteten Wege eine Verfeinerung meiner Meßmethode zu erreichen. Vielmehr war ich bestrebt, die Methode so zu wählen, daß alle äußeren Einflüsse nach Möglichkeit unschädlich gemacht werden und Vorkehrungen zu treffen, um die

1) Treadwell, Analyt. Chem. 2. p. 66.

„Kompensierung der Magnetisierungsspule“ zu einer möglichst vollkommenen zu machen. Um jenes zu erreichen, schien mir die Wahl einer Nullmethode am zweckmäßigsten zu sein, einer Nullmethode, wobei ähnlich dem Vorgehen von Lord Rayleigh[1]) und W. Schmidt[2]) der Magnetometerausschlag kompensiert wird vermittelst der berechenbaren Kraft eines stromdurchflossenen kreisförmigen Leiters. Th. Simon und E. Madelung veröffentlichten in der Physik. Zeitschr. (p. 410. 1904) eine Abhandlung, betitelt: „Über ein neues magnetometrisches Verfahren zur Messung magnetischer Momente“. Wurde auf diese Arbeit aufmerksam aus dem Grunde, weil ich glaubte, eine wirklich neue Methode zu finden, die sich für meine Zwecke vielleicht verwenden ließe. Dieses dort dargelegte Verfahren enthält indessen keine neuen Gedanken; prinzipiell wird lediglich von der Methode gesprochen, von der W. Schmidt vor ca. 10 Jahren schon Gebrauch machte. Außer der größeren Unempfindlichkeit gegen äußere Einflüsse bietet eine Nullmethode gegenüber der üblichen Magnetometermethode noch weitere wesentliche Vorteile. Es ist nämlich nicht erforderlich, daß man für den Ort des Magnetometers die Größe der Horizontalintensität der erdmagnetischen Kraft kennt. Dieser Umstand bedeutet bei der Vornahme absoluter Messungen nicht nur eine Bequemlichkeit, sondern hat auch den Vorzug, daß die Messungen von Schwankungen der Horizontalintensität völlig unabhängig sind. Wenn aber die Nullmethode unabhängig von H ist, so liegt hierin ein weiterer bedeutender Vorzug, auf den Erhard[3]) hinweist. Erhard konstatiert, daß die Magnetometermethode mit der üblichen Anordnung mit einem erheblichen Fehler behaftet ist. Die Wirkung, welche das Feld der Magnetisierungsspule auf die Magnetometernadel ausübt, wird in der Weise kompensiert, daß man den Magnetisierungsstrom durch eine zweite Spule, die „Kompensationsspule“ hindurchsendet, welche auf der anderen Seite des Magnetometers aufgestellt ist. Hat man durch passende Verschiebung derselben erreicht, daß die Kompensation eine voll-

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 23. p. 225. 1887.
2) W. Schmidt, Wied. Ann. 54. p. 655. 1895.
3) Th. Erhard, Ann. d. Phys. 9. p. 724. 1902.

kommene ist, so darf hieraus nicht geschlossen werden, daß die beiden Spulenfelder keinerlei Kraftwirkungen auf die Magnetometernadel ausüben. Es können ganz wohl Kräfte auftreten, welche in der Ebene des magnetischen Meridians wirksam sind, und unter ihrem Einflusse wird die Nadel sich nicht bewegen. Wohl aber bedingen solche Kräfte eine Vergrößerung oder Schwächung der Horizontalintensität H, die aber als konstant vorausgesetzt wird. Th. Erhard bringt nun in seiner erwähnten Arbeit die Resultate von Messungen, die er über die durch die Spulenfelder bewirkten Änderungen von H angestellt hat.

Ehrhard fand:

für $H=$	0,92	Änderung	der Horizontalintensität	$= + 0{,}024$	Proz.
„ $H=$	8,04	„	„ „	$= + 0{,}08$	„
„ $H=$	128,3	„	„ „	$= + 3{,}4$	„

Bei sehr starken Feldern stieg die Änderung der Horizontalintensität sogar an auf 8 Proz., war aber in diesem Falle negativ.

Hieraus geht hervor, daß die Horizontalintensität um mehrere Prozent gefälscht werden kann und ein Fehler von derselben Größe müßte auch im Meßresultat stecken. Eine Nullmethode macht die Kenntnis von H überflüssig; diese Größe tritt bei der Berechnung der magnetischen Momente gar nicht auf. Es darf daher der Satz ausgesprochen werden, daß eine Nullmethode der üblichen Magnetometermethode ganz entschieden überlegen ist, und zwar sowohl was die Bequemlichkeit der Messung anbetrifft, als, was schwerwiegender ist, was die Zuverlässigkeit und Genauigkeit der Meßresultate anbelangt.

So kam ich dazu, zur magnetischen Ausmessung meiner Versuchsobjekte eine Nullmethode zu wählen, die mit ihren Einzelheiten in folgendem dargelegt werden soll (Fig. 4).

Als Magnetometer wird eine Tangentenbussole T benutzt, welche einen Magnetring m und einen drehbaren Spiegel p besitzt. Auf einem $\perp$ zum Meridian stehenden Balken ruhen, zu beiden Seiten des Magnetometers, verschiebbar angeordnet, zwei Spulen: die Magnetisierungsspule A und die Kompensationsspule B. Diese beiden Spulen sind so aufgestellt, daß sie eine gemeinschaftliche geometrische Achse haben (c—d),

die durch den Mittelpunkt des ringförmigen Magneten *m* geht, horizontal verläuft und senkrecht zum magnetischen Meridian steht. Bevor der zu untersuchende Eisenstab *q* in die Spule *A* hineingeschoben wird, verstellt man Spule *B* längs der Achse *c—d* so lange, bis ein magnetisierender Strom *i* keine, oder doch nur eine kleine Ablenkung der Magnetometernadel hervorruft. Das feine Kompensieren erfolgt dann mittels des verschiebbaren Stromkreises *k*, welcher in der Ebene des magnetischen Meridians liegt und dessen Zentrum in die Achse *c—d* fällt.

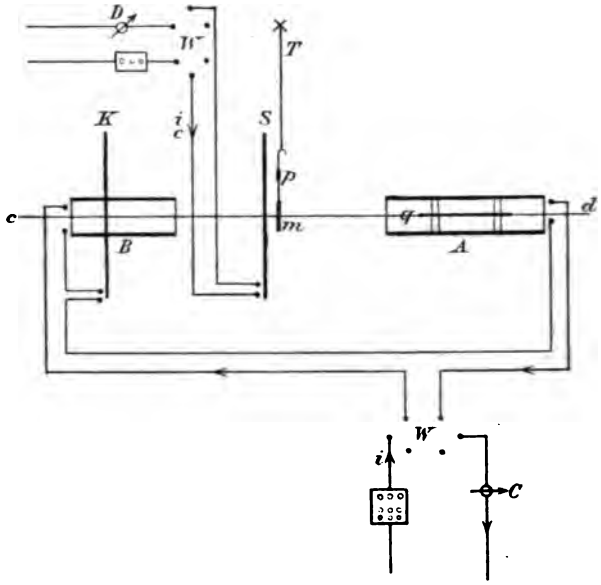


Fig. 4.

Hierdurch gelingt es, die Kompensierung in äußerst feiner Weise durchzuführen. Nun wird das Versuchsobjekt *q* in die Spule *A* eingeführt und die axiale Lage desselben in der üblichen Weise fixiert. Durch die Fernwirkung der Pole des magnetisierten Eisenstabes wird die Magnetnadel aus der Ebene des Meridians hinausgedreht und die Größe dieses Ablenkungswinkels ist es, woraus man bei der üblichen Magnetometermethode das magnetische Moment ermittelt. Ich schlug indessen folgendes Verfahren ein: Betrachten wir eine Windung *S* der Tangentenbussole (Magnetometer) *T*, die so aufgestellt sein möge, daß

ihre Ebene in den magnetischen Meridian fällt. Es wird nun möglich sein, durch diese Windung einen Strom i_c von solcher Stärke und Richtung zu senden, daß die abgelenkte Magnetnadel gerade wieder in den Meridian zurückkehrt, d. h. es wird durch dieses Verfahren möglich sein, die Magnetometerausschläge zu kompensieren.

In folgendem soll der Zusammenhang erläutert werden zwischen Kompensationsstrom i_c und magnetischem Moment M_1 pro Volumeneinheit (Fig. 5):

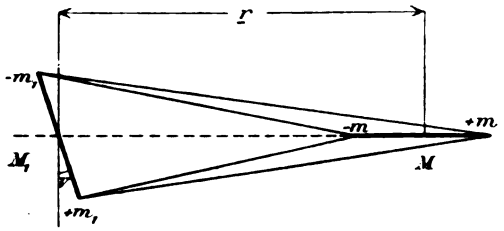


Fig. 5.

Die magnetischen Momente seien:

$$M_1 = 2\,l_1\,m_1,$$
$$M = 2\,l\,m.$$

Zur Berechnung des Drehmomentes soll die Potentialfunktion aufgestellt werden. Es ist:

$$P = \underset{(1)}{\frac{-m\,.\,m_1}{\sqrt{(r-l)^2 + l_1^2 - 2\,l_1\,(r-l)\sin\nu}}} + \underset{(2)}{\frac{m\,.\,m_1}{\sqrt{(r-l)^2 + l_1^2 + 2\,l_1\,(r-l)\sin\nu}}}$$
$$+ \underset{(3)}{\frac{m\,.\,m_1}{\sqrt{(r+l)^2 + l_1^2 - 2\,l_1\,(r+l)\sin\nu}}} - \underset{(4)}{\frac{m\,.\,m_1}{\sqrt{(r+l)^2 + l_1^2 + 2\,l_1\,(r+l)\sin\nu}}}.$$

Das erste Glied dieses Summenausdruckes (1) läßt sich schreiben in der Form:

$$\frac{-m\,.\,m_1}{\sqrt{(r-l)^2 + l_1^2 - 2\,l_1\,(r-l)\sin\nu}} = \frac{-m\,.\,m_1}{(r-l)\sqrt{1 + \left(\frac{l_1}{r-l}\right)^2 - 2\,\frac{l_1}{r-l}\sin\nu}}.$$

Der bewegliche Magnet ist ein kleiner Ringmagnet, bei welchem der Polabstand $2\,l_1$ ca. 1 cm beträgt. Für die Größen $r+l$ wären einzuführen die Werte

r = ca. 45 cm, l = ca. 14 cm } für die Versuchsobjekte I, II, III und A.

r = ca. 30 cm, l = ca. 14 cm } für die Versuchsobjekte 1—10.

Das Verhältnis $(l_1/r-l)^2$ nimmt daher Werte von folgender Größenordnung an:

$$\left(\frac{0{,}5}{31}\right)^2 = \frac{0{,}25}{960} = \frac{1}{3840} \Big\} \text{ I, II, III und } A.$$

$$\left(\frac{0{,}5}{16}\right)^2 = \frac{0{,}25}{256} = \frac{1}{1024} \Big\} \text{ 1 bis 10.}$$

Die Einheit unter dem Wurzelzeichen im Ausdruck für Glied (1) des Potentials P ist die bei weitem dominierende Größe, da das subtraktive Glied $(2\,l_1/r-l)\sin\nu$ nur klein ist. Wenn wir daher das Verhältnis $(l_1/r-l)^2$ vernachlässigen, so ist das statthaft, da der hieraus entstehende Fehler kleiner als 1 Promille ist. Demnach läßt sich Glied (1) die Form geben:

$$(1) \quad = \frac{-m \cdot m_1}{(r-l)\sqrt{1 - \frac{2\,l_1}{r-l}\sin\nu}}$$

oder entwickelt:

$$= \frac{-m \cdot m_1}{(r-l)\left\{1 - \frac{l_1}{r-l}\sin\nu\right\}} = \frac{-m \cdot m_1}{r-l}\left\{1 + \frac{l_1}{r-l}\sin\nu\right\}.$$

Es kann nun sofort übersehen werden, wie die ähnlich umgeformten Glieder (2), (3) und (4) beschaffen sind. Man erhält

$$(2) \quad = \frac{m \cdot m_1}{r-l}\left\{1 - \frac{l_1}{r-l}\sin\nu\right\},$$

daher:

$$(1)+(2) \quad = \frac{-2\,m \cdot m_1}{(r-l)^2}\,l_1 \sin\nu.$$

Ferner ist:

$$(3) \quad = \frac{m \cdot m_1}{r+l}\left\{1 + \frac{l_1}{r+l}\sin\nu\right\}$$

und

$$(4) \quad = \frac{-m \cdot m_1}{r+l}\left\{1 - \frac{l_1}{r+l}\sin\nu\right\},$$

also:

$$(3)+(4) \quad = \frac{2\,m \cdot m_1}{(r+l)^2}\,l_1 \sin\nu.$$

Und das Potential P ist somit:

$$P = -2m \cdot m_1 l_1 \sin v \left\{ \frac{1}{(r-l)^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right\}$$

$$= -2m \cdot m_1 l_1 \sin v \cdot \frac{4rl}{(r^2-l^2)^2} .$$

Da nun aber:

$$2lm = M$$

und

$$2l_1 m_1 = M_1$$

ist, so hat man:

$$P = \frac{-2M \cdot M_1}{(r^2-l^2)^2} r \cdot \sin v .$$

Das Drehmoment D ist gegeben durch

$$D = -\frac{\partial \varrho}{\partial v} = \frac{2M \cdot M_1}{(r^2-l^2)^2} r \cdot \cos v .$$

Schickt man nun einen Strom i_c durch die *eine* Windung S der (T der) Tangentenbussole T, so läßt sich das nun entstehende Drehmoment herleiten wie folgt (Fig. 6):

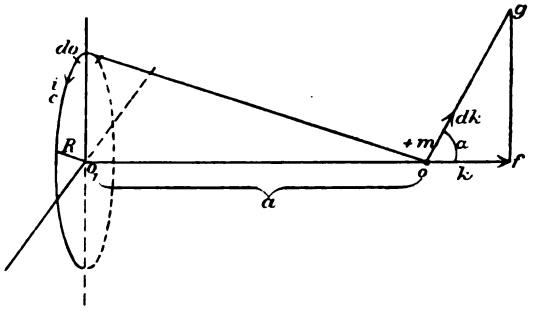


Fig. 6.

Ein Element des Kreisstromes ds übt auf die magnetische Masse $+m$ eine Kraft dk aus, welche gegeben ist durch:

$$dk = \frac{m \cdot i_c \cdot ds}{\varrho^2}$$

und die Komponente dieser Elementarkraft nach der Richtung a ist:

$$dk \cos \alpha = \frac{m \cdot i_c \cdot ds}{\varrho^2} \cos \alpha .$$

Welches Element des Stromkreises wir auch wählen, immer hat die Kraftkomponente nach der Richtung a die obige Form; daher ist:

$$\int d\,k \cos\alpha = K = \frac{m \cdot i_c}{\varrho^2} \cos\alpha \cdot \int_0^{2\pi} d\,s$$

$$= \frac{m \cdot i_c}{\varrho^2} \cdot 2\,R\,\pi \cdot \cos\alpha .$$

Nun ist:

$$\cos\alpha = \frac{o\,f}{o\,g} = \frac{R}{\varrho},$$

$$R = \frac{m \cdot i_c \cdot 2\,R^2\,\pi}{\varrho^3} = \frac{m \cdot i_c \cdot 2\,R^2\,\pi}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}}.$$

Wir machen nun die Annahme, der Ringmagnet sei so klein, daß er als ganz in der Achse a liegend gedacht werden kann; dann wird die auf die Pole des abgelenkten Magneten ausgeübte Kraft der Größe und Richtung nach durch die Ablenkung nicht verändert. In jeder beliebigen Stellung des Magneten hat demnach diese Kraft die Größe R und ihre Richtung ist eine der Achse a parallele (Fig. 7).

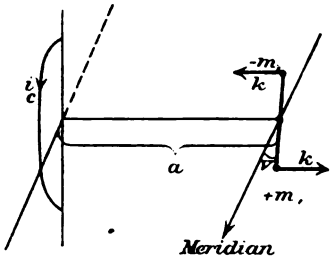


Fig. 7.

Das Drehmoment für einen Ablenkungswinkel v hat also die Form:

$$\text{Dr.M.} = 2\,R\,l_1 \cos v$$

$$= 2 \cdot M \cdot i_c \cdot \frac{2\,R^2\,\pi}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}} \cos v,$$

$$= \frac{M_1 \cdot i_c \cdot 2\,R^2\,\pi}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}} \cos v.$$

Ist der Magnetometerausschlag durch passende Wahl des Stromes i_c kompensiert, so müssen diese beiden aufgestellten Drehmomente einander gleich sein.

$$\frac{M_1\,i_c \cdot 2\,R^2\,\pi \cdot \cos v}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}} = \frac{2\,M \cdot M_1}{(r^2 - l^2)^2}\,r \cdot \cos v,$$

$$i_c \cdot \frac{R^2 \cdot \pi}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}} = \frac{M}{(r^2 - l^2)^2}\,v,$$

$$M = \frac{R^2\,\pi}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}} \cdot \frac{(r^2 - l^2)^2}{r}\,i_c .$$

Das magnetische Moment der Volumeneinheit hat also die Form:

$$M_1 = \frac{R^2\pi}{\sqrt{(R^2+a^2)^3}} \cdot \frac{(r^2-l^2)^2}{r} \cdot \frac{1}{\text{Vol.}} \cdot \frac{1}{10} \cdot i_c^{\text{amp.}}$$

Setzen wir:

$$\frac{R^2\pi}{\sqrt{(R^2+a^2)^3}} \cdot \frac{(r^2-l^2)^2}{r} \cdot \frac{1}{\text{Vol.}} \cdot \frac{1}{10} = \text{Konst.},$$

so ist:

$$\underline{M_1 = \text{Konst.}\, i_c}.$$

Die Abszissen der Magnetisierungskurven, die Feldstärke H wurde erzeugt mittels einer Spule von folgenden Dimensionen (Fig. 8):

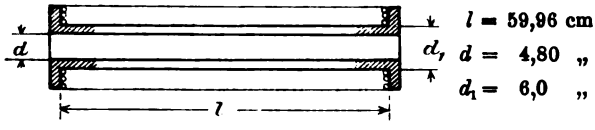


Fig. 8.

und die angebrachte Wicklung besaß 1177 Windungen. Schickt man durch dieselben einen Strom i, so ist das im Innern entstehende Feld längs der Spulenachse ein homogenes, sofern man nur Punkte derselben betrachtet, welche genügend weit von den Enden der Spule abstehen. Ein zu untersuchender Eisenstab wird bekanntlich so in der Spulenachse fixiert, daß er symmetrisch zur Spulenmitte ist. — Da mir nun nur

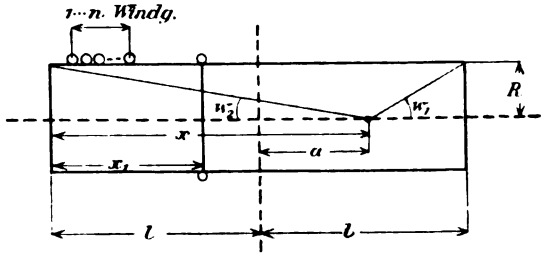


Fig. 9.

Solenoide von den erwähnten Dimensionen zur Verfügung standen, so mußte nachgesehen werden, welche maximale Länge den Versuchsobjekten gegeben werden durfte, damit

sie bei der Magnetisierung ihrer ganzen Länge nach im homogenen Felde stecken. Eine kleine Überlegung gibt über diese Frage Aufschluß (Fig. 9).

Ein Solenoid von der Länge $2l$ und dem Radius R sei gegeben. Die Wicklung sei so beschaffen, daß auf die Längeneinheit n Windungen entfallen. Auf der Spulenachse im Abstande x befinde sich eine magnetische Masse $+1$, so ist die Kraft, welche von einer den Strom i führenden Windung im Abstande x_1 auf dieselbe ausgeübt wird, in Richtung der Achse wirksam und hat die Größe:

$$X = \frac{2R^2\pi \cdot i}{\{\sqrt{R^2 + (x - x_1)^2}\}^3}.$$

Geben wir nun der Abszisse x_1 einen unendlich kleinen Zuwachs dx_1, so liegen auf dieser Strecke $n \cdot dx_1$ Windungen und es ist die auf die betrachtete Masse $+1$ ausgeübte Kraft

$$dH = \frac{2R^2\pi i n \cdot dx_1}{\{\sqrt{R^2 + (x - x_1)^2}\}^3},$$

$$H = 2R^2\pi i n \cdot \int_{x_1=0}^{x_1=2l} \frac{dx_1}{\{\sqrt{R^2 + (x - x_1)^2}\}^3},$$

$$H = 2\pi i R^2 n \cdot \left\{ -\frac{1}{R^2} \frac{n - n_1}{\sqrt{R^2 + (x - x_1)^2}} \right\}_0^{2l}$$

$$= 2\pi i n \cdot \left\{ -\frac{x - 2l}{\sqrt{R^2 + (x - 2l)^2}} + \frac{x}{\sqrt{R^2 + (x)^2}} \right\}.$$

Setzt man:

$$n = l + a,$$

$$H = 2\pi i n \left\{ \frac{l - a}{\sqrt{R^2 + (l - a)^2}} + \frac{l + a}{\sqrt{R^2 + (l + a)^2}} \right\}$$

$$= 2\pi i n \cdot \{\cos W_1 + \cos W_2\}.$$

Bei der verwendeten Spule ist nun

$$l = 30 \text{ cm},$$

$$R = 3{,}0 \text{ cm}.$$

Bezeichnet man die Klammergröße mit y, so nimmt sie folgende Werte an:

für $a = 0$	$y = 1{,}990$
$= 5$ cm	$= 1{,}989$
$= 10$ „	$= 1{,}986$
$= 15$ „	$= 1{,}978$
$= 20$ „	$= 1{,}953$
$= 25$ „	$= 1{,}855$
$= 30$ „	$= 0{,}999$

Wenn man eine Änderung der Feldstärke von ca. 0,5 Proz. zuläßt, so ist man auf das Intervall $a = \pm 15$ cm angewiesen. Allen meinen Versuchsobjekten habe ich daher eine Länge von ca. 30 cm gegeben, wie aus der Tabelle (p. 590) ersichtlich ist. — Da die Größe y in dem in Frage kommenden Bereich weniger als 1 Proz. von der Ziffer 2 verschieden ist, so darf gesetzt werden:

$$H = 4\pi i M$$
$$= 4\pi \cdot i \cdot \frac{1177}{59{,}96} = 24{,}65 \, . \, i^{\text{amp.}}$$

Die Versuchsergebnisse.

A. Die Permeabilität.

Der Verlauf der Permeabilitätskurve des elektrolytischen Eisens wurde für die Versuchsobjekte I, II und III bestimmt, und zwar für ein Intervall der magnetisierenden Kraft von 0 bis ca. 120. Wählt man für die magnetischen und elektrischen Größen die Bezeichnungen:

H = Feldstärke,
M_1 = Moment der Volumeneinheit,
B = Magnetische Induktion,
R = Suszeptibilität,
μ = Permeabilität,
i_m = Magnetisierender Strom,
i_c = Kompensationsstrom,

so können die gewonnenen Versuchsresultate in folgender Form gegeben werden:

Stab I.

i_m	H	i_c	M_1	K	B	μ
0,100	2,46	0,00080	24,8	10,1	314	127
0,190	4,70	0,00207	64,8	13,7	812	172
0,289	7,10	0,00334	104	14,6	1313	184
0,392	9,67	0,00466	145	14,9	1831	189
0,503	12,3	0,00630	196	15,9	2474	201
0,624	15,3	0,00836	260	16,9	3281	214
0,816	20,1	0,01092	340	16,9	4290	213
0,970	23,9	0,01384	430	17,9	5425	222
1,136	27,9	0,01625	505	18,1	6371	228
1,303	32,0	0,01865	580	18,1	7317	228
1,457	35,8	0,0209	650	18,1	8200	229
1,610	39,6	0,0224	697	17,6	8794	222
1,79	43,9	0,0241	750	17,0	9464	215
1,97	48,3	0,0256	796	16,4	10046	208
2,14	52,7	0,0268	818	15,5	10327	195
2,62	64,6	0,0300	933	14,4	11783	182
3,08	76,0	0,0326	1014	13,3	12812	168
3,55	87,5	0,0350	1094	12,5	13828	158
3,93	97,1	0,0370	1150	11,8	14541	149
4,48	109,4	0,0388	1207	11,0	15269	139
4,82	118,7	0,0398	1238	10,4	15668	132

Daten:
l = 14,16 cm,
r = 44,92 „
R = 19,95 „
a = 2,4 „
Masse = 0,2856 g,
Vol. = 0,03642 cm³,
$M_1 = 31095 \,.\, i_c$.

Die Größen M_1 und K, in Funktion der magnetisierenden Kraft H aufgetragen, liefern die Kurven in Fig. 10.

Ich stehe davon ab, auch die Versuchsresultate der Niederschläge II und III hier in ausführlicher Weise wiederzugeben und begnüge mich mit der Bemerkung, daß die Abweichungen der drei gewonnenen Magnetisierungskurven untereinander so

unwesentlich sind, daß sie sich fast vollkommen decken. Entnimmt man nämlich allen drei Kurven für einige runde Werte

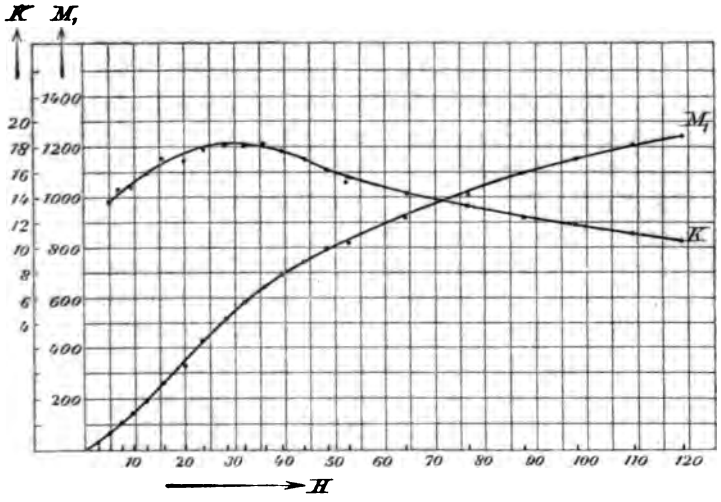


Fig. 10.

von H die Momente M_1, so ergibt sich folgende Zusammenstellung:

H	Stab I M_1	Stab II M_1	Stab III M_1
5	64	78	68
10	151	162	153
15	246	254	250
20	345	351	353
25	450	454	453
30	546	555	548
35	633	640	622
40	703	707	693
50	815	809	810
60	902	892	900
70	975	972	973
80	1047	1046	1045
90	1111	1110	1112
100	1167	1163	1162
110	1211	1210	1207
120	1250	1246	1240

Diese befriedigende Übereinstimmung der Resultate dürfte eine Gewähr bieten für die Sicherheit und Zuverlässigkeit der Messung. — Aus der abgerundeten Form der erhaltenen Magnetisierungskurven geht hervor, daß das elektrolytische Eisen beträchtliche magnetische Härte besitzt. Der Wendepunkt der M_1-H-Kurve ist ein wenig ausgesprochener und daher verläuft die Kurve der Suszeptibilität K in der Gegend des maximalen Wertes sehr flach. Es ist daher schwierig, diejenige Kraft, für welche K ein Maximum wird, scharf zu bekommen. Während dasselbe bei weichem Eisen bei einer Kraft H ca. 2 bis 3 auftritt und von der Größenordnung etwa 200 und darüber sich ergibt, so ist das Verhalten des elektrolytischen Eisens durch folgende Ziffern charakterisiert:

Stab	I:	$K_{max.} = 18{,}2$	für	$H = 28{,}0$
„	II:	$K_{max.} = 18{,}4$	„	$H = 30{,}0$
„	III:	$K_{max.} = 18{,}3$	„	$H = 25{,}0$
	Mittel	$K_{max.} = 18{,}3$	Mittel	$H = 27{,}7$

Bei kleinen Kräften nimmt die spezifische Magnetisierung nur geringe Werte an. Es verhält sich im Intervall $H = 0$ bis H ca. 15 das elektrolytische Eisen ähnlich wie das reine Kobalt, welches nach Ewing und Rowland eine bei $H =$ ca. 25 auftretende maximale Magnetisierungsfunktion von $K =$ ca. 15 aufweist. Für größere Kräfte indessen ist das Verhalten dieser beiden Metalle ein völlig verschiedenes, indem bei ganz großen Kräften dem elektrolytischen Eisen Induktionen von ähnlicher Höhe, wie sie weiches Schmiedeeisen aufweist, erteilt werden können, während Kobalt bei $B =$ ca. 10000 schon nahezu magnetisch gesättigt ist.

Die durch die Leickschen Versuche[1]) gelieferten Magnetisierungskurven für elektrolytische Eisenniederschläge weichen beträchtlich von meinen Resultaten ab, und es soll versucht werden, die Ursachen der Differenzen aufzudecken und zu beleuchten. Leick führte in seiner Arbeit unter anderen auch drei Versuchsobjekte an, die mit I_0, II_0, III_0 bezeichnet werden mögen und welche die Massen besitzen:

I_0: $M = 0{,}004$ g
II_0: $M = 0{,}016$ „
III_0: $M = 0{,}060$ „

1) W. Leick, Wied. Ann. 58. p. 691. 1896.

Die Versuchsergebnisse dieser drei Niederschläge sind in folgenden Tabellen enthalten:

I_0			II_0			III_0		
H	M_1	K	H	M_1	K	H	M_1	K
0	−94	—	9	149	16,6	9	223	24,8
3,6	0	—	14,4	335	23,3	14,4	361	25,2
7,2	+94	13	23,4	623	27,0	23,4	670	28,6
10,8	188	17,4	36	806	22,3	36	797	22,1
14,4	282	19,6	54	1060	19,6	54	1040	19,3
18	366	20,3	68	1190	17,3			
21,6	469	21,7	75,6	1320	17,5			
25,2	562	22,3						
28,8	677	23,5						
32,4	761	23,5						
36	846	23,5						
39,9	912	23,0						
46,8	1043	22,3						
54	1156	21,4						
72	1363	18,9						
90	1500	16,7						

Die drei Niederschläge I_0, II_0, III_0 hat Leick unter genau gleichen Bedingungen sich bilden lassen und es muß daher auffallen, daß ihre Kurven so beträchtlich voneinander verschieden sind. Um die Differenzen bequem übersehen zu können, ist es zweckmäßig, den Knrven für einige gleiche Werte von H die Ordinaten zu entnehmen. Dann ergibt sich:

H	I_0 M_1	II_0 M_1	III_0 M_1	I M_1
5	42	—	—	64
10	164	176	246	151
15	292	330	376	246
20	420	484	498	345
25	555	606	603	450
30	702	705	700	546
35	824	790	780	633
40	921	867	853	703
50	1070	1005	988	815
60	1196	1131	—	902
70	1313	1252	—	975
80	1412	—	—	1047
90	1500	—	—	1111

In Kolonne I sind die Resultate, die mein Versuchsobjekt I lieferte, enthalten. Man erkennt, daß diese Werte durchwegs bedeutend kleiner sind, als die Leickschen. Das wäre nun wohl erklärlich, denn Leick stellte seine Niederschläge unter Bedingungen her, die mit den meinen nicht identisch sind. Er verwendete als Anoden nicht Platin, sondern Stäbe aus „reinstem" Eisen und zudem gewann er die Niederschläge I_0, II_0 und III_0 nicht aus einer Lösung von Ferroammoniumoxalat, sondern aus Ferrosulfat. Wie Leick selber festgestellt hat, ist der Einfluß der Natur der Flüssigkeit auf das magnetische Verhalten des ausgeschiedenen Eisens kein nennenswerter. Die Ursache der Differenzen müßte demnach mit der Verwendung von Eisenanoden zusammenhängen. Da nun aber die Leickschen Resultate unter sich beträchtliche Verschiedenheiten zeigen, so ist es vielleicht doch fraglich, ob die Eisenanode tatsächlich eine so große Rolle spielt. Denn jener Umstand dürfte vielleicht darauf hinweisen, daß eine gewisse Unsicherheit in den Leickschen Resultaten steckt. Zu dieser Vermutung könnte man auch etwa durch folgende Erwägungen noch gelangen:

Nach den Angaben von Leick sind die Massen seiner Stäbe:

I_0: $M = 0{,}004$ g
II_0: $M = 0{,}016$ „
III_0: $M = 0{,}060$ „

Ein jeder Fehler in der Massenbestimmung beeinflußt in proportionaler Weise das Resultat. In diesen Angaben sind nun aber möglich die Fehler:

I_0: ca. 18 Proz.
II_0: ca. 6 „
III_0: ca. 1,5 „

Wohl darf nun angenommen werden, daß diese Fehler nicht bestehen und daß obige Ziffern die wahren Massen sind. Es ist aber auffallend, daß dieselben, um jeden Zweifel zu beseitigen, nicht präziser gegeben werden.

Weiterhin benutzte Leick zur Ausmessung seiner Stäbe das übliche magnetometrische Verfahren, welches aber nach Erhard, wie früher erwähnt wurde, mit einem Fehler behaftet ist, der bis ca. 8 Proz. heranreichen kann.

In Anbetracht dieser Erwägungen erachtete ich es als von Interesse, einen Eisenniederschlag auf seine magnetischen Eigenschaften zu untersuchen, der unter genau Leickschen Bedingungen gebildet wurde. Dieser Niederschlag ist in der Tabelle (p. 590) mit der Marke *A* angeführt und seine Ausmessnng ergab folgendes Resultat:

i_m	H	i_c	M_1	K	B	μ
0,176	4,33	0,00706	33	7,6	419	96,7
0,338	8,33	0,0200	93	10,2	1176	141
0,443	11,0	0,0305	142	12,9	1795	163
0,525	13,0	0,0380	177	13,6	2236	172
0,649	16,1	0,0510	238	14,7	3006	186
0,849	20,9	0,0740	345	16,3	4353	207
0,997	24,5	0,0910	425	17,2	5362	218
1,164	28,6	0,1115	521	18,2	6572	229
1,328	32,6	0,1285	600	18,4	7569	232
1,430	35,2	0,1383	645	18,3	8136	231
1,624	40,0	0,1544	720	17,9	9083	227
1,974	48,8	0,1785	833	17,0	10511	215
2,337	57,5	0,1972	920	16,0	11613	201
2,765	68,1	0,2160	1008	14,7	12728	185
3,125	77,2	0,2277	1062	13,7	13415	173
3,490	86,0	0,2385	1112	12,9	14153	163
4,101	101,0	0,2535	1182	11,7	14946	147
4,48	110,5	0,2650	1236	11,1	15634	141

Daten: $r = 55{,}60$ cm, $l = 14{,}33$ „, $R = 19{,}95$ „, $a = 2{,}40$

Masse = 3,8793 g,
Vol. = 0,4948 cm³,
$M = 4663 \cdot i_c$.

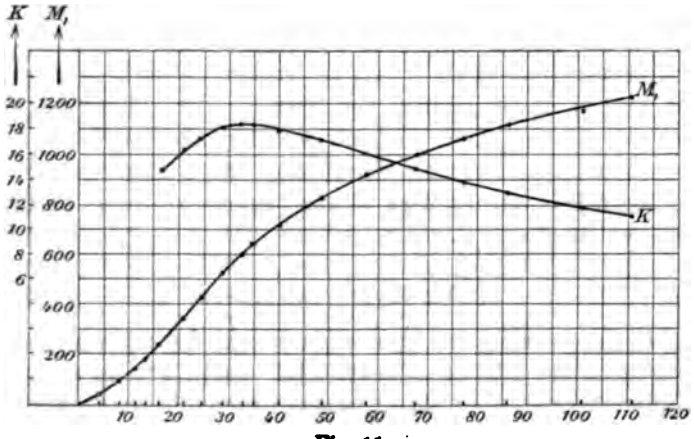


Fig. 11.

Diese Ergebnisse liefern als graphischen Ausdruck die vorstehenden Kurven (Fig. 11).

Es sollen nun diese an Stab *A* gewonnenen Resultate verglichen werden einmal mit den Leickschen, und dann auch mit den vom reinen Eisen der Stäbe I, II, III gelieferten Werten. Über ihr gegenseitiges Verhältnis gibt folgende Tabelle Aufschluß:

H	I_0 M_1	I M_1	A M_1
5	42	64	41
10	164	151	122
15	292	246	216
20	420	345	321
25	555	450	435
30	702	546	551
35	824	633	643
40	921	703	720
50	1070	815	848
60	1196	902	943
70	1313	975	1017
80	1412	1047	1080
90	1500	1111	1132
100		1167	1180

Hiernach verhalten sich tatsächlich die Niederschläge *A* und I etwas verschieden. Für Kräfte von 30 an aufwärts sind die Momente von Stab A etwas größer, unterhalb $H = 30$ etwas kleiner als diejenigen von Stab I. Die Differenzen sind jedoch bei weitem nicht so hoch wie diejenigen zwischen den Stäben I und I_0, so daß die Vermutung, die Leickschen Werte seien besonders für größere Kräfte, etwas zu hoch, bestätigt erscheinen dürfte.

B. Die Hysteresisarbeit.

Zur Ausmessung der Hysteresisverluste des elektrolytischen Eisens benutzte ich die Objekte „III“ und „*A*“, da dieselben von allen hergestellten Eisenniederschlägen die größten Eisenmassen besitzen. „Stab III“ ergab folgende Resultate:

Zyklus 1.

i_m	H	i_c	M_1
0,998[a]	24,60	0,1062[a]	540
0,760	18,7	0,0946	482
0,450	11,1	0,0776	395
0,146	3,60	0,0556	283
0	0	0,0417	212
−0,145	−3,57	0,0266	135
0,450	11,1	−0,00941	−48
0,758	18,7	0,04375	223
0,996	24,5	0,0686	350
0,758	18,7	0,0596	304
0,450	11,1	0,0420	214
0,145	3,57	0,0192	98
0	0	0,00568	29
+0,146	+3,60	+0,00824	+42
0,450	11,10	0,0448	229
0,760	18,75	0,0794	405
0,999	24,6	0,1072	545

Zyklus 2.

i_m	H	i_c	M_1
1,480[a]	36,5	0,1360[a]	693
1,018	25,1	0,1166	594
0,730	18,0	0,1034	527
0,486	12,0	0,0874	445
0,1014	2,50	0,0569	290
0	0	0,0475	242
−0,1010	−2,49	0,0372	190
0,487	12,0	−0,01155	−59
0,734	18,2	0,04337	221
1,020	25,1	0,0733	374
1,480	36,5	0,1145	583
1,020	25,1	0,0965	492
0,734	18,2	0,08204	418
0,487	12,0	0,0670	341
0,1010	2,49	0,0365	186
0	0	0,02765	141
+0,1014	+2,50	0,01650	84
0,486	12,0	+0,03373	172
0,730	18,0	0,06516	332
1,018	25,1	0,09405	480
1,480	36,5	0,1366	697

Daten: $r = 44{,}88$ cm, $l = 18{,}93$ „, $R = 19{,}45$ „, $a = 2{,}40$ „

Masse = 1,7483 g,
Vol. = 0,2223 cm³,
$M_1 = 5095 \cdot i_c$.

Zyklus 3.

i_m	H	i_c	M_1	i_m	H	i_c	M_1
1,950	48,1	0,1448[a]	738	1,280	31,4	0,1377[a]	703
1,285	31,7	0,1200	611	0,820	20,2	0,1166	595
0,829	20,4	0,0978	498	0,354	8,72	0,0865	441
0,353	8,71	0,0691	352	0	0	0,0569	290
0	0	0,376	192	+0,353	+8,71	0,1176	60
+0,354	−8,72	−0,00491	−25	0,829	20,4	+0,0488	+249
0,820	20,2	0,0657	335	1,285	31,6	0,0927	473
1,280	31,4	0,1153	589	1,950	48,1	0,1445	737
1,945	47,9	0,1615	825				

Zyklus 4.

i_m	H	i_c	M_1
3,240°	79,9	0,1880°	958
2,085	51,4	0,1605	818
1,220	30,1	0,1233	629
0,519	12,8	0,0822	419
0	0	0,0487	229
−0,520	−12,8	−0,01196	− 61
1,215	29,9	0,1013	517
2,075	51,1	0,1710	871
3,240	79,9	0,2195	1121
2,070	51,0	0,1914	976
1,215	29,9	0,1560	796
0,520	12,8	0,1160	591
0	0	0,0771	393
+0,517	+12,7	0,02075	106
1,220	30,1	+0,0606	+309
2,090	51,5	0,1347	687
3,240	79,9	0,1864	949

Zyklus 5.

i_m	H	i_c	M_1
5,02°	123,7	0,2420°	1233
3,96	97,6	0,2245	1144
2,66	65,6	0,1914	975
1,94	48,0	0,1707	870
1,260	31,0	0,1393	710
0,400	9,84	0,0917	467
−0,400	−9,84	0,02845	145
1,260	31,0	−0,0785	−400
1,97	48,2	0,1354	690
2,67	65,8	0,1805	920
3,98	98,1	0,2300	1172
5,03	124,0	0,2485	1266
3,97	97,8	0,2350	1197
2,66	65,6	0,201	1025
1,95	48,2	0,1821	928
1,250	30,7	0,1512	770
0,400	9,84	0,1040	530
+0,400	+9,84	0,0411	210
1,260	31,0	+0,0667	+340
1,97	48,0	0,1267	646
2,67	65,8	0,1688	860
3,97	97,8	0,2160	1100
5,03	124,0	0,2414	1230

Die Ausmessung der Flächen der Hysteresisschleifen ergibt:

Zyklus	$H_{max.}$	$M_{1\ max.}$	$B_{max.}$	A_{II}
1	24,6	446	5627	7442 Erg
2	36,5	639	8062	19600
3	48,1	781	9857	21800
4	79,9	1037	13105	40000
5	123,8	1246	15773	56900

Bei magnetisierenden Kräften von der Größe $H =$ ca. 120 steigt die Magnetisierungskurve elektrolytischer Eisenniederschläge immer noch verhältnismäßig steil an. Der magnetische Sättigungszustand ist daher bei Kräften, solcher Größe offenbar noch lange nicht erreicht. Die Hysteresisverluste,

bezogen auf 1 Zyklus und die Volumeneinheit, werden daher für einen Zustand, welcher der Sättigung nahe ist, Werte annehmen, die vermutlich weit über 57000 Erg liegen. Demnach verhält sich elektrolytisches Eisen bezüglich der Hysteresisverluste ähnlich wie harter Stahl.

Nachfolgende Kurve (Fig. 12) gibt die Abhängigkeit der Verluste von der maximalen Induktion:

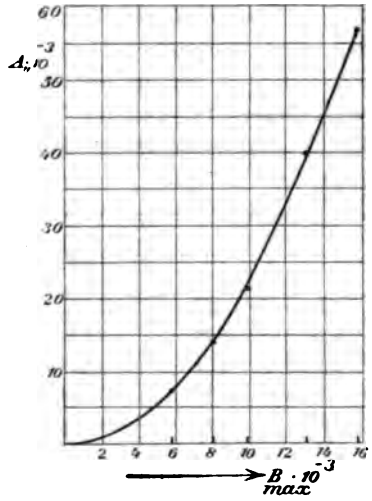


Fig. 12.

Entnimmt man für einige runde Werte der Induktion die Verluste A_{II}, so findet man:

$B_{max.}$	A_{II}	$\frac{A_{II}}{(B_{max.})^2}$
4000	3600 Erg	0,225 × 10^{-3}
6000	8100	0,225 „
8000	14100	0,220 „
10000	22300	0,223 „
12000	33000	0,228 „
14000	45000	0,229 „
16000	58000	0,229 „

Mittel: $\frac{A_{II}}{(B_{max.})^2} = 0{,}2256 \cdot 10^{-3}$.

Die Verhältnisse $A_{II}/(B_{max.})^2$ sind fast konstant und es läßt sich daher die vorige Kurve durch die Form ausdrücken.

$$A_{II} = 0{,}0002256\, B^2_{max.}.$$

Aus den Hysteresisschleifen geht weiterhin hervor, daß elektrolytisches Eisen sehr beträchtliche Koerzitivkraft (H_c) besitzt. Weiches Eisen verlangt höchstens eine Kraft von 1—3 Einh., um ein remanentes Moment beliebiger Höhe vollkommen aufzuheben. Eisenniederschläge indessen erfordern hierzu viel größere Kräfte, nämlich 5 bis ca. 15 Einh., je nach der Größe der Induktion. H_c nimmt mit $B_{max.}$ fast linear zu, wie folgende Tabelle zeigt, in welcher zudem eine weitere charakteristische Größe der Hysteresisschleifen, das remanente Moment M_r enthalten ist.

Zyklus	H_c	$M_{1\,max.}$	$H_{max.}$	M_r
1	5,5	446	24,6	122
2	8,0	639	36,5	190
3	9,5	781	48,1	240
4	13,5	1037	79,7	310
5	17,0	1246	123,8	365

Die Untersuchung des Niederschlages „A“ ergab die Resultate:

Zyklus 2.

i_m	H	i_c	M_1	i_m	H	i_c	M_1
1,267[a]	31,2	0,1646[a]	540	1,027[a]	25,3	0,1660[a]	545
1,025	25,3	0,1547	507	0,720	17,5	0,1523	500
0,720	17,5	0,1387	455	0,430	10,6	0,1410	430
0,430	10,6	0,1220	400	0,146	3,6	0,1005	330
0,142	3,5	0,0906	297	0	0	0,0807	265
0	0	0,0685	225	+0,142	+3,5	0,0532	175
−0,146	−3,6	0,0396	130	0,430	10,6	+0,0134	+44
0,435	10,7	−0,0198	−65	0,720	17,5	0,0700	230
0,720	17,5	0,0800	262	1,025	25,3	0,1227	403
1,027	25,3	0,1340	440	1,267	31,2	0,1660	545
1,267	31,2	0,1767	580				

Daten: $l = 14{,}33$ cm, $r = 50{,}00$ „, $R = 19{,}95$ „, $a = 2{,}40$ „; Masse = 3,8793 g, Vol. = 0,4948 cm³, $M_1 = 3278 \cdot i_c$.

Zyklus 1.				Zyklus 3.			
i_m	H	i_c	M_1	i_m	H	i_c	M_1
0,473[a]	11,6	0,1203[a]	394	2,060[a]	50,8	0,2600[a]	852
0,402	9,9	0,1170	384	1,760	43,4	0,2510	823
0,334	8,2	0,1146	376	1,430	35,2	0,2384	782
0,286	7,0	0,1112	365	1,210	29,8	0,2253	740
0,243	6,0	0,1067	355	1,010	24,8	0,2105	691
0,212	5,2	0,1084	345	0,860	21,1	0,2008	659
0,166	4,1	0,1016	334	0,630	15,5	0,1801	592
0,136	3,3	0,0985	323	0,420	10,3	0,1590	521
0	0	0,0855	281	0	0	0,1073	352
−0,136	−3,3	0,0714	234	−0,420	+10,3	0,0305	100
0,166	4,1	0,0686	225	0,640	15,7	−0,0366	−121
0,212	5,2	0,0630	206	0,860	21,1	0,1029	337
0,245	6,0	0,0589	193	1,010	24,8	0,1397	458
0,288	7,1	0,0533	175	1,220	30,0	0,1831	601
0,337	8,3	0,0465	152	1,430	35,2	0,2171	712
0,408	10,1	0,0363	119	1,76	43,4	0,2480	815
0,481	11,8	0,0260	85	2,06	50,8	0,2694	884
0,408	10,1	0,0308	101	1,75	43,1	0,2610	860
0,339	8,3	0,0356	117	1,420	34,9	0,2509	823
0,290	7,1	0,0397	131	1,210	29,8	0,2394	784
0,246	6,0	0,0436	143	1,000	24,6	0,2274	746
0,218	5,2	0,0461	151	0,860	21,1	0,2175	713
0,166	4,1	0,0500	164	0,630	15,5	0,1996	655
0,137	3,3	0,0533	175	0,420	10,3	0,1793	587
0	0	0,0643	211	0	0	0,1247	410
+0,137	3,3	0,0796	261	+0,420	+10,3	0,0396	130
0,165	4,1	0,0820	269	0,640	15,7	+0,0244	+80
0,212	5,2	0,0878	288	0,870	21,4	0,0845	278
0,244	6,0	0,0916	301	1,010	24,8	0,1204	395
0,287	7,0	0,0959	314	1,220	30,0	0,1988	522
0,336	8,3	0,1016	334	1,435	35,4	0,1984	650
0,402	9,9	0,1100	361	1,76	43,4	0,2360	775
0,474	11,7	0,1195	393	2,060	50,8	0,2584	848

Zyklus 4.

i_m	H	i_c	M_1	i_m	H	i_c	M_1
4,08[a]	100,6	0,3480[a]	1140	3,66[a]	90,0	0,365[a]	1196
3,69	90,9	0,343	1125	3,16	77,8	0,356	1170
3,18	78,2	0,335	1100	2,79	68,6	0,348	1140
2,79	68,6	0,327	1074	2,05	50,5	0,318	1045
2,06	50,8	0,304	998	1,430	35,2	0,285	936
1,430	35,2	0,277	910	1,010	24,9	0,256	840
1,010	24,9	0,252	829	0,630	15,5	0,227	747
0,630	15,5	0,223	732	0,418	10,3	0,206	676
0,420	10,3	0,202	663	+0,420	+10,3	0,0730	239
−0,420	−10,3	0,0740	242	0,640	15,7	0,0110	36
0,640	15,7	0,0140	46	1,020	25,1	−0,1000	+328
1,020	25,1	−0,1000	−328	1,445	35,4	0,1880	617
1,440	35,4	0,195	640	2,07	51,0	0,2610	857
2,07	51,0	0,274	900	2,81	69,2	0,302	991
2,81	69,2	0,323	1060	3,20	78,7	0,317	1042
3,18	78,2	0,338	1110	3,69	90,9	0,331	1087
3,67	90,3	0,356	1170	4,05	99,6	0,341	1120
4,04	99,3	0,369	1210				

Die Arbeitswerte der Flächen dieser vier Hysteresisschleifen sind:

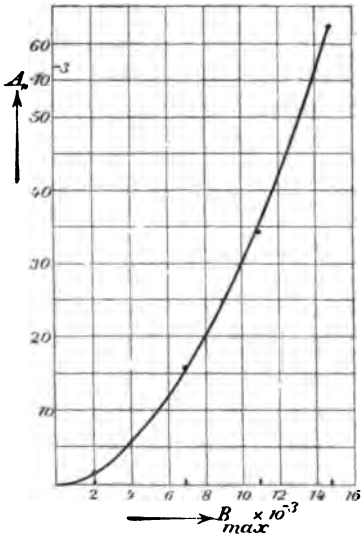


Fig. 13.

Zyklus	$H_{max.}$	$M_{1\,max.}$	$B_{max.}$	A_{II}
1	11,6	154	1945	1130
2	31,2	561	7077	16450
3	50,8	867	10940	34200
4	100,0	1165	14695	62500

A_{II}, aufgetragen in Funktion von $B_{max.}$ ergibt die Kurve (Fig. 13), deren Verlauf ein von dem für Stab III gefundenen etwas abweichender ist; sie läßt sich durch die Form darstellen:

$$A_{II} = 0{,}000606\,(B_{max.})^{1{,}92}.$$

Stab *A* weist demnach wesentlich höhere Hysteresisverluste

auf als Stab III. Dieses Resultat wäre verständlich dann, wenn der Niederschlag *A* magnetisch härter ist als III. Hierüber geben aber Aufschluß: die Koerzitivkraft und die Lage des Wendepunktes der Magnetisierungskurven.

Die Koerzitivkraft für den Niederschlag *A* kann folgender Tabelle entnommen werden:

Zyklus	H_c	$M_{1\,max.}$	$B_{max.}$	M_r
1	2,4	154	1945	37
2	8,4	561	7077	245
3	13,0	867	10940	383
4	17,0	1165	14695	490

Trägt man für die Stäbe *A* und III H_c in Funktion von $B_{max.}$ auf, so zeigt sich, daß die Kurve „*A*" durchwegs über der Kurve „III" verläuft (Fig. 14).

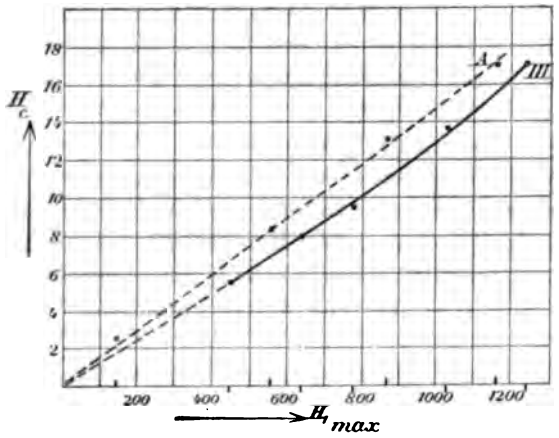


Fig. 14.

Wenn aber Stab *A* tatsächlich magnetisch härter ist als Stab III, so wäre zu erwarten, daß bei diesem das Maximum der Permeabilität früher, d. h. bei einer kleineren magnetisierenden Kraft *H* auftritt, als bei jenem. Diese Erwartung bestätigt sich, denn es ist:

für Stab III: $K_{max.} = 18{,}3$ bei $H = 25{,}0$
„ „ *A*: $K_{max.} = 18{,}4$ „ $H = 33{,}0$.

Das Verhalten des im magnetischen Feld gewonnenen elektrolytischen Eisens.

Es waren, wie in der Einleitung angedeutet wurde, die einschlägigen Arbeiten von Beetz, die mich zu den nun folgenden Versuchen anregten. Nachforschungen, die ich nachträglich in der Literatur anstellte, ergaben, daß über diesen Gegenstand schon gearbeitet worden ist. Es hat C. Maurain[1]) hierüber einige Resultate veröffentlicht, die zunächst besprochen werden sollen.

Maurain elektrolysierte zur Gewinnung von Eisenniederschlägen eine Lösung von Ferroammoniumoxalat, wobei die Elektroden bestanden aus:

Kathode: Messingdraht von 50 cm Länge und 4 mm Dicke.
Anode: Platinspirale.

Flüssigkeit und Elektroden waren in einem zylindrischen Glasgefäß untergebracht. Dieses wurde, um den Niederschlag schon während seiner Bildung magnetisieren zu können, vor Beginn der Elektrolyse in eine Magnetisierungsspule hineingeschoben. Diese Niederschläge verhielten sich nach Maurain wie folgt:

Wurde die Elektrolyse unterbrochen und der Magnetometerausschlag abgelesen, so blieb derselbe unverändert, auch wenn das während der Bildung tätige Feld H aufgehoben wurde, d. h. das temporäre Moment blieb auch nach Aufhören der magnetisierenden Kraft H als permanentes Moment bestehen, ein Resultat, das durch Beetzsche Versuche bestätigt ist.

Nacheinander, unter vollkommen analogen Bedingungen stellte nun Maurain sechs Niederschläge her; dabei wurde einzig die während der Bildung wirksame Kraft H variiert. Er fand für die remanenten Momente (stimmen überein mit den temporären) der Stäbe folgende Resultate:

H =	M_1 =
0,67	33,6
1,80	43,8
1,72	51,0
2,70	119,0
5,70	124,0
10,60	167,0

1) Ch. Maurain, Compt. rend. p. 410. 1900.

welches Ergebnis die Kurve (Fig. 15) liefert:

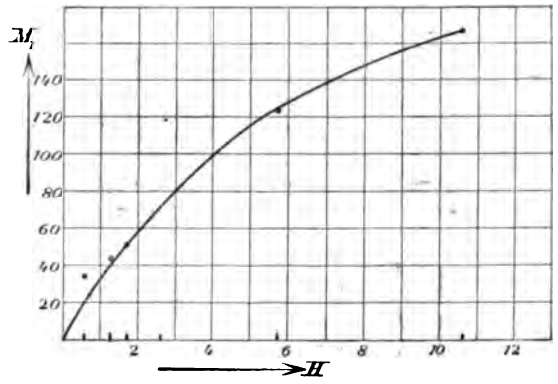


Fig. 15.

Da nur vier Punkte der Kurve in Betracht fallen können die zwei anderen fallen vollständig heraus), so dürfte dieser Verlauf der Momente keine große Sicherheit bieten, und Maurain gibt selbst zu, daß von diesen Messungen keine große Genauigkeit erwartet werden kann, besonders weil die Eichung seines Magnetometers unzuverlässig war.

Ich habe nun, da eine solche Kurve mancherlei Interesse hat, versucht, den Verlauf derselben womöglich präziser festzustellen. Zu dem Zwecke erachtete ich es als unumgänglich, viele Punkte derselben aufzunehmen und es sind die Stäbe mit der Bezeichnung 1 bis 10, welche mir die gewünschten Resultate liefern sollten. Die Gewinnung dieser Niederschläge ist eine den Stäben I, II, III analoge und ist demnach auch in Übereinstimmung mit der Maurainschen Anordnung.

Die gewonnenen Resultate sind in folgender Tabelle enthalten:

Bezeichnung	i_m	H	i_c	M_1
1	0	0,2	0,01132[a]	145
2	0,0455[a]	1,2	0,03124	460
3	0,0853	2,3	0,04748	658
4	0,1504	3,9	0,05854	800
5	0,260	6,6	0,06615	875

Fortsetzung der Tabelle.

Bezeichnung	i_m	H	i_c	M_1
6	0,360	9,1	0,06117	904
7	0,547	13,7	0,06564	920
8	0,702	17,5	0,06641	940
9	0,873	21,7	0,06131	963
10	1,174	29,2	0,07548	982

Daten: $r = 29{,}67$ cm, $l = 13{,}54$ „, $R = 19{,}95$ „, $a = 2{,}40$ „

$$M_1 = \frac{1978}{\text{Masse}} \cdot i_c.$$

Die Momente M_1 in Funktion von H aufgetragen, ergeben die Kurve Fig. 16:

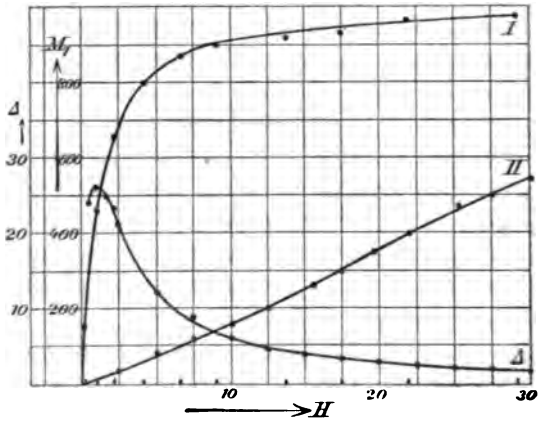


Fig. 16.

Wir gewinnen damit das Resultat, daß die Momente mit wachsender, während der Bildung der Niederschläge tätigen Kraft H stetig zunehmen. Die Maurainschen Werte sind so bedeutend kleiner als die obigen, daß die Vermutung nahe liegt, die Maurainschen Ziffern seien nur Relativwerte.

Vom Gesichtspunkt der Theorie des Magnetismus aus betrachtet erscheint es wichtig, die Kurve I zu vergleichen mit

einer gewöhnlichen Magnetisierungskurve II, welche identische Eisenniederschläge liefern, die im Feld von der Stärke Null gebildet wurden und erst nachher der Wirkung magnetisierender Kräfte ausgesetzt sind. Die eingezeichnete Kurve II ist die früher gefundene Magnetisierungskurve für Stab III.

Bei $H = 10$ z. B. ergibt Kurve II das Moment $M_1 = 155$, Kurve I: $M_1 = 905$. Letzterer Wert bedeutet das höchste Moment, welches das Eisen unter der Einwirkung einer Kraft $H = 10$ überhaupt annehmen kann; die Differenz Δ der beiden Momente liefert daher ein Maß für die Größe der Molekularkräfte, welche der Magnetisierung entgegenwirken. Die Größe dieser widerstrebenden Kraft hängt offenbar ab von der Feldstärke. Es erscheint wichtig, sich ein Bild jener Molekularkräfte zu verschaffen. Zu dem Zwecke sollen für einige runde Werte von H die dazugehörigen Momente der Kurven I und II entnommen werden; die Verhältnisse Δ dieser Momente, aufgetragen in Funktion der Feldstärke, werden das gewünschte Bild liefern. Man findet:

H	Kurve I M_1	Kurve II M_1	Δ
0,5	240	10	24,0
1,0	400	15	26,6
1,5	520	21	25,0
2,0	620	27	23,0
2,5	670	33	20,3
5,0	840	70	12,0
7,5	886	110	8,0
10,0	903	158	5,7
12,5	920	205	4,5
15,0	930	252	3,6
17,5	943	310	3,0
20,0	953	360	2,6
22,5	968	410	2,3
25,0	980	460	2,1
27,5	986	503	1,9
30,0	990	540	1,8

Der Verlauf der Ziffern Δ beweist, daß die der Magnetisierung widerstrebenden Molekularkräfte sich mit der Kraft H stark verändern. Es ist bemerkenswert, daß ihre Abhängigkeit durch eine Kurvenform gegeben ist, welche an den Verlauf der Permeabilität der magnetischen Metalle erinnert.

Dieses Resultat dürfte in seinen Konsequenzen geeignet sein, einiges Licht zu bringen in das Wesen der molekularen Kraftwirkungen und auf die inneren Vorgänge bei der Magnetisierung. Auch die so charakteristische Form der Magnetisierungskurven dürfte hierin ihre innere Begründung haben.

(Eingegangen 3. Januar 1908.)

8. *Berichtigung zu dem Aufsatze: „Untersuchungen über Entladungserscheinungen in Geisslerschen Röhren“*[1]*; von Eduard Riecke.*

Die in dem angeführten Aufsatze enthaltenen Druckangaben beruhen auf Messungen, welche nach der von Hagen angegebenen Methode ausgeführt waren. Bei einer Nachmessung der Dimensionen der Pumpe stellte sich heraus, daß bei den früheren Messungen ein Fehler begangen worden war. Infolge davon ist an den Werten des Druckes eine Korrektion anzubringen von verschiedener Größe, je nachdem bei der Kompression das Vorvakuum, oder die Auslaßkapillare benützt worden war. In dem letzteren Falle sind die Druckangaben mit dem Faktor 1,085 zu multiplizieren, um den Druck auf Millimeter Quecksilber zu reduzieren. Bei den Druckmessungen, welche in dem genannten Aufsatze benützt sind, wurde stets bis in die Ausflußkapillare komprimiert, zur Reduktion der Druckangaben ist also die Zahl 1,085 zu benützen.

Die Korrektion ist von besonderer Bedeutung mit Bezug auf zwei Formeln, die ich aus den Beobachtungen abgeleitet hatte; die eine bezieht sich auf den Abstand der inneren Grenze des Kathodenglimmlichtes von der Kathodenfläche, die andere auf die Dicke der leuchtenden Kathodenschichte.

Bezeichnet man den Druck in Millimeter Quecksilber mit p, den Minimalabstand zwischen der inneren Grenze des Glimmlichtes und der Kathodenfläche in Zentimeter mit g, so ergibt sich die neue Formel:

$$pg = 0{,}167.$$

Die folgende Tabelle enthält die beobachteten Wertpaare von p und g, sowie die Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Werten von g, $\delta = g_{\text{beob.}} - g_{\text{ber.}}$

1) E. Riecke, Ann. d. Phys. 16. p. 282. 1905.

p	g	δ	p	g	δ
0,250	0,64	−0,03	0,260	0,63	−0,01
0,241	0,70	+0,01	0,215	0,79	+0,01
0,126	1,32	+0,01	0,179	0,93	0,00
0,122	1,39	+0,03	0,159	1,04	−0,01
0,116	1,47	+0,03	0,146	1,18	+0,03
0,108	1,51	−0,03	0,132	1,22	−0,04
0,104	1,60	0,00	0,130	1,30	+0,02
0,098	1,71	+0,02	0,123	1,32	−0,03
0,092	1,82	+0,01	0,121	1,39	+0,02
0,086	1,96	+0,01	0,117	1,42	0,00
0,080	2,04	−0,04	0,113	1,47	−0,01
0,075	2,23	0,00	0,108	1,57	+0,03
0,069	2,41	+0,01	0,094	1,78	+0,01
0,066	2,53	+0,01			

Die Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Werten gehen kaum über die Beobachtungsfehler hinaus. Bei einem Drucke von 1 mm ergibt sich aus meiner Formel für g der Wert 0,167 cm; aus der von Ebert aus seinen Beobachtungen abgeleiteten Formel ergibt sich bei demselben Drucke für die Dicke des Kathodendunkelraumes der Wert 0,211 cm. Die Gründe für diese Abweichung habe ich schon früher besprochen; der Hauptgrund dürfte darin liegen, daß die Beobachtungen von Ebert sich auf eine unbeeinflußte Kathode beziehen, während bei meinen Beobachtungen der Rand der Kathode von der Wand der Glasröhre nur durch einen Zwischenraum von 0,33 mm getrennt war.

Die zweite der in der angeführten Arbeit enthaltenen Formeln gibt den Zusammenhang zwischen dem Drucke und der Dicke δ der leuchtenden Kathodenschichte. Nach Ausführung der Druckkorrektion wird die Gleichung:

$$\delta \,.\, p^{0{,}902} = 0{,}133\,.$$

(Eingegangen 24. Januar 1908.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1908. № 4.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 25.

1. *Über die Dämpfung von Kondensatorschwingungen. I. Rückwirkung eines resonierenden Systems. II. Erzeugung wenig gedämpfter Schwingungen;*

von Max Wien.

Bezeichnungen von Abschnitt I und II.

α	Galvanometerausschlag. α_{100} auf den Maximalausschlag 100 umgerechneter Ausschlag.
$C_1\ C_2\ C_3$	Kapazitäten der verschiedenen Systeme.
γ	Zusatzdekrement im Meßkreis.
$\delta_{01}\ \delta_{02}\ \delta_{03}$	Dämpfungen in den ungekoppelten Systemen.
$\delta_1\ \delta_2\ \delta_3$	Dämpfungen der gekoppelten Schwingungen.
$b_{01}\ b_{02}\ b_{03}$	Dekremente der ungekoppelten Systeme.
$b_1\ b_2\ b_3$	Dekremente der gekoppelten Schwingungen.
F	Funkenpotential. F_s Funkenstrecke in cm.
$J^2_{\text{eff.}}$	Stromeffekt im Meßkreis. $J^2_{r\text{eff.}}$ Stromeffekt bei Resonanz.
$k\ k_{12}\ k_{23}$	Koppelungskoeffizienten.
$L_{11}\ L_{22}\ L_{33}$	Selbstinduktionskoeffizienten.
$L_{12}\ L_{23}$	Gegenseitige Induktionskoeffizienten.
$\nu_{01}\ \nu_{02}\ \nu_{03}$	Schwingungszahlen der ungekoppelten Systeme in 2π Sek.
$\nu_1\ \nu_2\ \nu_3$	Schwingungszahlen der gekoppelten Schwingungen in 2π Sek.

$$p_{12} = 2\,\frac{L_{12}}{L_{11}}\cdot\frac{C_2}{C_1}, \qquad p_{21} = \frac{1}{2}\,\frac{L_{21}}{L_{22}}\cdot\frac{C_1}{C_2}.$$

τ	Schwingungsdauer in der Sekunde.	
V_1	Potentialdifferenz im Primärsystem	vgl. Drude p. 519.
V_2	Potential im sekundären System	vgl. Drude p. 519.
x	Verstimmung $= 1 - \nu_{02}/\nu_{01}$.	

$$y = \frac{100 \cdot J^2_{\text{eff.}}}{J^2_{r\text{eff.}}}.$$

§ 1. Bei der wachsenden Bedeutung der Dämpfung elektrischer Schwingungen erscheint eine bessere Ausbildung ihrer Messung wünschenswert. Die wichtigste Meßmethode ist die von Bjerknes[1]), bei der mit Hilfe eines resonierenden Meß-

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. 55. p. 120. 1985.

kreises die „Resonanzkurve" aufgenommen, und aus ihr die Dämpfung berechnet wird. Die Mängel dieser Methode beruhen einmal darauf, daß eine der größten Fehlerquellen: die Rückwirkung des resonierenden Meßkreises weder theoretisch noch experimentell genügend untersucht ist, ferner darauf, daß die dämpfende Wirkung des Funkens nicht den Voraussetzungen der Bjerknesschen Theorie entspricht, und schließlich darauf, daß die verschiedenen Dämpfungsursachen: Funke, Joulesche Wärme, Strahlung usw. alle gleichzeitig gemessen werden und schwer voneinander zu trennen sind.

Schon seit längerer Zeit bin ich bemüht, diese Mängel zu beseitigen; über die bisherigen Ergebnisse soll jetzt berichtet werden. In den folgenden beiden ersten Abschnitten der Arbeit handelt es sich zunächst um die Rückwirkung eines resonierenden Systems und um die Erzeugung schwach gedämpfter Schwingungen unter Elimination des Funkens.

I. Rückwirkung eines resonierenden Systems.[1])

A. Theorie der Rückwirkung.

§ 2. Die Theorie der Schwingungen zweier gekoppelter elektrischer Systeme ist am ausführlichsten von Drude[2]) behandelt.

Drude hat die Theorie für *enge* Koppelung ganz durchgeführt, ebenso für *unendlich lose* Koppelung, also für ein resonierendes System ohne merkliche Rückwirkung. Weder von Drude noch von Bjerknes sind jedoch die Gleichungen für *lose, aber nicht unendlich lose* Koppelung abgeleitet, so daß man die Fehler, welche von einer eben beginnenden Rückwirkung herrühren, nicht danach beurteilen kann.

Die Drudesche Theorie läßt sich aber leicht auf den Fall loser Koppelung ausdehnen.

Ich unterscheide im folgenden zwischen den für die ungekoppelten Systeme geltenden Werten der Schwingungsdauer

1) Über einen Teil der Ergebnisse dieses Abschnittes wurde schon auf der Naturforscherversammlung in Dresden berichtet. Vgl. Verh. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 5. p. 478. 1907; Physik. Zeitschr. 8. p. 764. 1907.

2) P. Drude, Ann. d. Phys. 13. p. 512. 1904. Auf die Gleichungen dieser Arbeit ist im folgenden mehrfach verwiesen in der Weise, daß zu der Nummer der Gleichung „D" hinzugefügt ist, z. B. (28 D).

und Dämpfung $\nu_{01}\,\nu_{02}$, $\delta_{01}\,\delta_{02}$ und denen, welche für die gekoppelten Systeme gelten: $\nu_1\,\nu_2$, $\delta_1\,\delta_2$, wobei zu bemerken ist, daß, da die Koppelung als lose vorausgesetzt ist, ν_1 nur wenig von ν_{01} usw. verschieden ist.

Aus den simultanen Differentialgleichungen[1]) (I D)

$$\frac{d^2V_1}{dt^2} + 2\,\delta_{01}\frac{dV_1}{dt} + (\nu_{01}^2 + \delta_{01}^2)V_1 = p_{12}\frac{d^2V_2}{dt^2},$$

$$\frac{d^2V_2}{dt^2} + 2\,\delta_{02}\frac{dV_2}{dt} + (\nu_{02}^2 + \delta_{02}^2)V_2 = p_{21}\frac{d^2V_1}{dt^2}$$

leitet Drude die determinierende Gleichung (28 D) ab:

$$\text{(I)}\quad z^2+2\delta_{01}z+\nu_{01}^2+\delta_{01}^2)(z^2+2\delta_{02}z+\nu_{02}^2+\delta_{02}^2)=p_{12}p_{21}z^4.$$

Diese Gleichung vierten Grades wäre eigentlich zu behandeln, Drude jedoch vernachlässigt die Rückwirkung und damit das Glied $p_{12}p_{21}z^4$; dadurch erhält er einfach die vier Wurzeln der Gleichung:

$$z_1 = -\delta_{01} + i\nu_{01},\quad z_2 = -\delta_{01} - i\nu_{01},\quad z_3 = -\delta_{02} + i\nu_{02},$$
$$z_4 = -\delta_{02} - i\nu_{02},$$

also Schwingungsdauern und Dämpfungen der ungekoppelten Systeme; während wir mit Beibehaltung des Gliedes $p_{21}p_{12}z^4$ als Lösung der Gleichung erhalten

$$z_1 = -\delta_1 + i\nu_1,\quad z_2 = -\delta_1 - i\nu_1,\quad z_3 = -\delta_2 + i\nu_2,$$
$$z_4 = -\delta_2 - i\nu_2,$$

also die Schwingungszahlen und Dämpfungen der gekoppelten Systeme.

§ 3. Die formale Lösung ist durchaus analog der Drudeschen. Wir erhalten für das Potential im Resonanzsystem:

$$V_2 = 2B\sin\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2} + \chi\right)\quad (51\text{ D}),$$

worin B sich von dem Drudeschen Wert nur durch den Faktor ν_2^2/ν_{02}^2 unterscheidet, also (55 D)

$$B = \frac{p_{21}F.\nu_1^2\nu_2^2}{2(\nu_1+\nu_2)\nu_{02}^2}\sqrt{\frac{e^{-2\delta_1 t}+e^{-2\delta_2 t}-2e^{-(\delta_1+\delta_2)t}\cos\varphi}{(\nu_1-\nu_2)^2+(\delta_1-\delta_2)^2}},$$

wobei (56 D)

$$\varphi = (\nu_1-\nu_2)t + \frac{\delta_1\nu_2+\delta_2\nu_1}{\nu_1+\nu_2}\left(\frac{1}{\nu_1}-\frac{1}{\nu_2}\right).$$

1) Die Bezeichnungen sind am Anfang der Arbeit zusammengestellt.

Der für uns vor allem wichtige Stromeffekt ergibt sich hiernach (84 D) zu:

$$\text{(II)} \qquad J_{2\text{eff.}}^2 = p_{21}^2 \cdot F^2 \cdot \frac{\nu_1^4 \nu_2^4}{4 \nu_0^4} C_2^2 \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_1 \delta_2} \frac{1}{(\nu_1 - \nu_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2}.$$

In diese Formeln sind nun die Wurzeln der Gleichung vierten Grades für z (I) einzusetzen. Diese Wurzeln habe ich bereits in einer älteren Arbeit[1]) abgeleitet und in eine bequeme Näherungsform gebracht, die hier bei loser Koppelung völlig streng genug ist. Danach ist zu unterscheiden, ob die Dämpfung oder die Koppelung (k) vorherrschend ist, d. h. ob

$$|\delta_{01} - \delta_{02}| > k \cdot \nu \quad \text{oder} \quad |\delta_{01} - \delta_{02}| < k \cdot \nu.$$

Der erste Fall ist bei loser Koppelung der viel häufigere.

§ 4. $|\delta_{01} - \delta_{02}| > k \cdot \nu$ *Dämpfung vorherrschend.* Die Lösung der Gleichung (I) gibt:

$$\nu_1 = \nu_{01} + \frac{k^2 \nu_{01}^2 (\nu_{01} - \nu_{02})}{4\{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + (\delta_{01} - \delta_{02})^2\}}, \quad \nu_2 = \nu_{02} - \frac{k^2 \nu_{01}^2 (\nu_{01} - \nu_{02})}{4\{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + (\delta_{01} - \delta_{02})^2\}},$$

$$\delta_1 = \delta_{01} - \frac{k^2 \nu_{01}^2 (\delta_{01} - \delta_{02})}{4\{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + (\delta_{01} - \delta_{02})^2\}}, \quad \delta_1 = \delta_{02} + \frac{k^2 \nu_{01}^2 (\delta_{01} - \delta_{02})}{4\{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + (\delta_{01} - \delta_{02})^2\}}.$$

Für den Fall der Resonanz $\nu_{01} = \nu_{02}$ ist:

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_{01} = \nu_{02}, \quad \delta_1 = \delta_{01} - \frac{k^2 \nu_{01}^2}{4(\delta_{01} - \delta_{02})}, \quad \delta_2 = \delta_{02} + \frac{k^2 \nu_{01}^2}{4(\delta_{01} - \delta_{02})}.$$

Im Falle der Resonanz hat B genau die gleiche Form wie bei Drude (58 D)

$$B = \frac{p_{21} F \cdot \nu_1}{3} \cdot \frac{e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t}}{\delta_1 - \delta_2}$$

und die Maximalamplitude (60 D) wird

$$B_{\max.} = - \frac{p_{21} F \cdot \nu_1}{4 \delta_2} \cdot \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{\frac{\delta_1}{\delta_2 - \delta_1}},$$

worin für δ_1 und δ_2 die obigen Resonanzwerte einzusetzen sind.

Unsere Gleichung für den Stromeffekt (II) wird nach Einsetzung der allgemeinen Werte etwas umständlich:

---

1) M. Wien, Wied. Ann. 61. p. 151. 1897.

$$J_{2\,\text{eff.}}^2 = \frac{p_{21}^2 F^2 \cdot C_2^2}{4 \nu_{02}^4}$$

$$\left[\nu_{01}\nu_{02} - \frac{k^2 \nu_{01}^2 (\nu_{01}-\nu_{02})^2}{4\{(\nu_{01}-\nu_{02})^2+(\delta_{01}-\delta_{02})^2\}} - \frac{k^4 \cdot \nu_{01}^4 (\nu_{01}-\nu_{02})^2}{16\{(\nu_{01}-\nu_{02})^2+(\delta_{01}-\delta_{02})^2\}^2}\right]^4,$$

$$\left[\frac{\delta_{01}+\delta_{02}}{\left\{\left(\delta_{01} - \frac{k^2 \nu_{01}^2 (\delta_{01}-\delta_{02})}{4\{(\nu_{01}-\nu_{02})^2+(\delta_{01}-\delta_{02})^2\}}\right)\left(\delta_{02} + \frac{k^2 \nu_{01}^2 (\delta_{01}-\delta_{02})}{4\{(\nu_{01}-\nu_{02})^2+(\delta_{01}-\delta_{02})^2\}}\right)\right\}}\right.$$

$$\left.\frac{}{\left\{(\nu_{01}-\nu_{02})^2\left(1+\frac{k^2 \cdot \nu_{01}^2}{2\{(\nu_{01}-\nu_{02})^2+(\delta_{01}-\delta_{02})^2\}}\right)^2 + (\delta_{01}+\delta_{02})^2\right\}}\right].$$

Indem wir jetzt lose Koppelung voraussetzen, so daß k^2 neben 1 vernachlässigt werden darf, wird:

$$J_{2\,\text{eff.}}^2 = \frac{p_{21}^2 F^2 C_2^2 \nu_{01}^4}{4}$$

$$\left[\frac{\delta_{01}+\delta_{02}}{\left\{\delta_{01}\delta_{02} + \frac{k^2 \nu_{01}^2 (\delta_{01}-\delta_{02})^2}{4\{(\nu_{01}-\nu_{02})^2+(\delta_{01}-\delta_{02})^2\}}\right\}}\right.$$

$$\left.\frac{}{\left\{(\nu_{01}-\nu_{01})^2\left(1+\frac{k^2 \nu_{01}^2}{(\nu_{01}-\nu_{02})^2+(\delta_{01}-\delta_{02})^2}\right)+(\delta_{01}+\delta_{02})^2\right\}}\right].$$

Führt man hierin die Dekremente

$$\mathfrak{d}_{01} = \frac{2\pi\delta_{01}}{\nu_{01}}, \quad \mathfrak{d}_{02} = \frac{2\pi\delta_{02}}{\nu_{01}},$$

ferner die Verstimmung

$$x = 1 - \frac{\nu_{02}}{\nu_{01}}$$

und für p_{21} seinen Wert

$$\frac{1}{2}\frac{L_{21}C_1}{L_{22}C_2} \quad (23\text{ D.})$$

ein und setzt

$$k^2 = \frac{L_{21}^2}{L_{11}L_{22}},$$

so wird schließlich:

(III)
$$\left\{J_{2\,\text{eff.}}^2 = \frac{F^2 C_1}{2}\frac{k^2\pi^2}{\nu_{01}L_{22}}\right.$$

$$\left[\frac{\mathfrak{d}_{01}+\mathfrak{d}_{02}}{\left\{\mathfrak{d}_{01}\mathfrak{d}_{02} + \frac{\pi^2 k^2 (\mathfrak{d}_{01}-\mathfrak{d}_{02})^2}{4\pi^2 x^2 + (\mathfrak{d}_{01}-\mathfrak{d}_{02})^2}\right\}}\right.$$

$$\left.\left.\frac{}{\left\{4\pi^2 x^2\left(1+\frac{4\pi^2 k^2}{4\pi^2 x^2+(\mathfrak{d}_{01}-\mathfrak{d}_{02})^2}\right)+(\mathfrak{d}_{01}+\mathfrak{d}_{02})^2\right\}}\right]\right.$$

Von der Bjerknesschen Formel für verschwindende Koppelung

$$J_{2\,\text{eff.}}^2 = \frac{F^2 \cdot C_1}{2}\frac{k^2\pi^2}{\nu_{01}L_{22}}\left[\frac{\mathfrak{d}_{01}+\mathfrak{d}_{02}}{\mathfrak{d}_{01}\mathfrak{d}_{02}\{4\pi^2x^2+(\mathfrak{d}_{01}+\mathfrak{d}_{02})^2\}}\right]$$

unterscheidet sich unsere Formel durch das Hinzutreten zweier Korrektionsglieder A und B:

$$J^2_{2\,\mathrm{eff.}} = \frac{F^2 \cdot C_1}{2} \cdot \frac{k^2 \pi^2}{r_{01} L_{22}} \left[\frac{\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02}}{\{\mathfrak{d}_{01}\mathfrak{d}_{02} + A\}\{4\pi^2 x^2 (1 + B) + (\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02})^2\}} \right],$$

worin

$$A = \frac{\pi^2 k^2 (\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02})^2}{4\pi^2 x^2 + (\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02})^2} \quad \text{und} \quad B = \frac{4\pi^2 k^2}{4\pi^2 x^2 + (\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02})^2} \quad \text{ist.}$$

§ 5. Der Einfluß von A und B besteht einmal darin, daß die ganze Resonanzkurve abgeflacht wird, so daß die aus ihr berechneten Dekremente zu groß ausfallen, außerdem jedoch wird die Kurve deformiert, d. h. die einzelnen Teile der Kurve geben verschiedene Werte für die Dekremente. Das Ganze kann am besten durch Beispiele erläutert werden. In der Tab. 1 (Fig. 1)

Tabelle 1, Fig. 1.

$\mathfrak{d}_{01} = 0{,}10$, $\mathfrak{d}_{02} = 0{,}02$.

x	$k = 0$	$k = 0{,}01$			
1	2	3 (A)	4 (A u. B)	5 (A)	6 (A u. B)
0 %	100	67	67	100	100
0,5	93,5	65,3	63,2	97,5	94,3
1,0	78,7	60,1	55,6	89,7	82,9
1,5	61,8	51,2	46,7	76,3	69,6
2,0	47,7	41,7	38,2	62,2	56,9
2,5	36,8	33,5	31,0	49,9	46,3

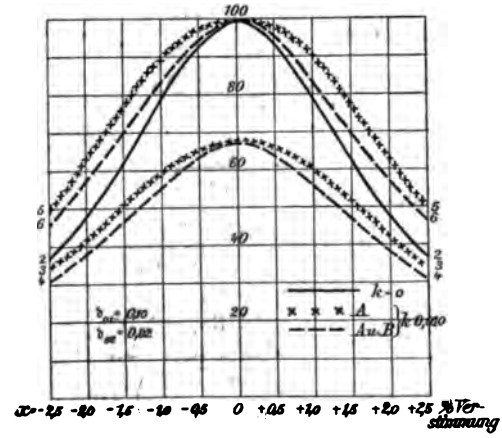


Fig. 1. Berechnung der Rückwirkung.

sind für den Fall $\mathfrak{d}_{01} = 0{,}10$, $\mathfrak{d}_{02} = 0{,}02$ die Resonanzkurven berechnet. Die Reihe 1 der Tabelle enthält die Verstimmung x in

Prozenten, die 2. Reihe den Stromeffekt J^2_{eff} für verschwindende Koppelung $k = 0$. Die entsprechende Resonanzkurve ist in der Figur ausgezogen und ebenfalls mit „2“ bezeichnet. Die übrigen Reihen und Kurven beziehen sich auf eine Koppelung $k = 0{,}01$. Zunächst zeigen die Reihen 3 und 4 und die entsprechenden Kurven 3 × × × und 4 – – –, die Einwirkung der Korrektion A allein und die der Korrektionen A und B zusammen auf den Stromeffekt. Die Kurven verlaufen wesentlich flacher als die für $k = 0$. Da es nun bei der Bestimmung von $\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02}$ aus der Resonanzkurve nicht auf die absoluten, sondern auf die relativen Werte des Stromeffektes ankommt, sind schließlich in den beiden letzten Reihen 5 und 6 die Werte der Stromeffekte für einen Maximalwert 100 umgerechnet. Die entsprechenden Kurven 5 und 6 gestatten nun einen direkten Vergleich mit der Resonanzkurve für $k = 0$ und geben ein Bild der Änderung der Kurve durch die Koppelung.

Wir sehen deutlich, daß durch das Zusatzglied A die Resonanzkurve abgeflacht wird, durch das Glied B hingegen die Wirkung zum Teil wieder aufgehoben wird: B verursacht ein Steilerwerden der Resonanzkurve besonders in der Mitte. A bewirkt mithin eine Vergrößerung, B eine Verkleinerung der aus der Kurve berechneten Werte von $\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02}$. Der Einfluß von A ist jedoch im ganzen stets größer als der von B. *Es wird also durch zu enge Koppelung die Kurve zu flach verlaufen;* $\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02}$ *zu groß ausfallen.*

§ 6. Um nun schließlich zu zeigen, wie sich die Resonanzkurve mit dem Koppelungsgrad ändert, sind in der Tab. 2 die Zahlen für $k = 0$, $k = 0{,}005$ und $k = 0{,}010$ zusammengestellt. Unter Δ ist die prozentuale Änderung des Stromeffektes gegen den Wert für $k = 0$ daneben angegeben.

Tabelle 2.

$\mathfrak{d}_{01} = 0{,}1$, $\mathfrak{d}_{02} = 0{,}02$.

x	$k = 0$	$k = 0{,}005$	Δ	$k = 0{,}010$	Δ
0	100	100	0 %	100	0 %
0,5	93,5	94,1	0,6	94,3	0,7
1,0	78,7	80,4	2,1	82,9	5,4
1,5	61,8	64,5	4,3	69,6	12,5
2,0	47,7	50,4	5,5	56,9	19,2
2,5	36,8	39,6	7,6	46,3	24

In Tab. 3, Fig. 2 ist noch ein zweites Beispiel gegeben, worin $b_{01} = 0{,}20$, $b_{02} = 0{,}01$ ist, also die Korrektion B mehr hinter A zurücksteht.

Tabelle 3, Fig. 2.

$b_{01} = 0{,}20$, $b_{02} = 0{,}01$.

x	$k = 0$	$k = 0{,}005$	$k = 0{,}010$	$k = 0{,}020$
0	100	100	100	100
1	91,9	92,7	94,1	95,1
2	73,6	75,7	80,2	85,3
3	55,4	58,2	64,6	75,2
4	41,4	48,9	50,8	64,8
5	—	—	—	56,7
6	—	—	—	47,9

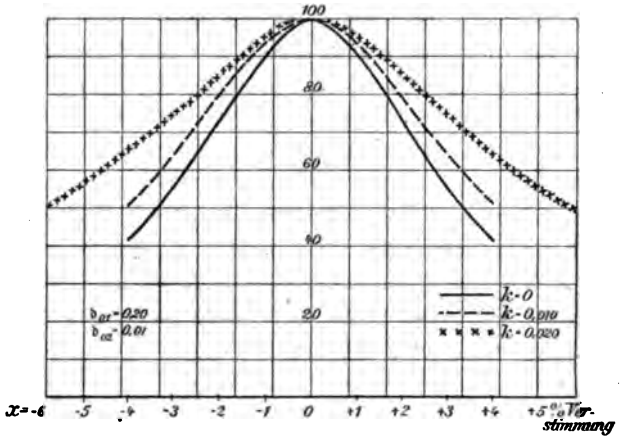


Fig. 2. Berechnung der Rückwirkung.

Die Verflachung der Resonanzkurven mit wachsender Koppelung tritt in den Kurven deutlich hervor. Aus den Kurven bestimmt sich:[1])

$k =$	0	0,005	0,010	0,020
$b_{01} + b_{02} =$	0,210	0,222	0,254	0,328

Der letzte Wert ist also schon um 50 Proz. zu groß.

1) Über die Berechnung vgl. J. Zenneck, Elektromagn. Schwingungen usw. Stuttgart 1900. p. 1008.

Bei wachsender Koppelung oder wenn die Differenz der Dekremente $|\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}|$ kleiner wird, tritt die Korrektion B mehr in den Vordergrund. *Dies bewirkt, daß die Kurve etwas deformiert wird und zwar wird ihr Gipfel verhältnismäßig zu steil;* bei einigen der oben angeführten Beispiele ist das auch schon merklich. Sehr groß kann aber diese Einwirkung nicht werden, denn für großes k oder sehr kleines $\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}$, wo unsere Formel eine größere Deformation ergeben würde, ist die Anwendung dieser Formel nicht mehr statthaft, weil eine Voraussetzung ihrer Berechnung nicht mehr gültig ist. Diese Voraussetzung war, daß $\nu k < |\delta_{01} - \delta_{02}|$ oder $2\pi k < |\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}|$. Für gewöhnlich ist in den praktischen Fällen diese Voraussetzung ja erfüllt, da die Koppelung bei der Aufnahme der Resonanzkurve als lose vorausgesetzt wird, und meist der Oszillator wesentlich stärker gedämpft ist wie der Resonator. Unter Umständen ist jedoch die Dämpfung in beiden Systemen annähernd gleich, und dann kann trotz loser Koppelung $\nu k > |\delta_{01} - \delta_{02}|$ sein. Dieser Fall bedarf daher einer besonderen Betrachtung.

§ 7. $\nu k < |\delta_{01} - \delta_{02}|$. *Koppelung vorherrschend.* In unsere Gleichung (II) p. 628 haben wir jetzt diejenigen Werte von $\delta_1\ \delta_2$, $\nu_1\ \nu_2$ einzusetzen, welche bei gekoppelten Systemen mit vorherrschender Koppelung gelten. Diese sind:[1])

$$\left.\begin{matrix}\nu_1\\ \nu_2\end{matrix}\right\} = \frac{\nu_{01} + \nu_{02}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + k^2\nu_{01}^2} - \frac{\nu_{01}^2 k^2 (\delta_{01} - \delta_{02})^2}{(\nu_{01} - \nu_{02}) + \nu_{01}^2 k^2},$$

$$\left.\begin{matrix}\delta_1\\ \delta_2\end{matrix}\right\} = \frac{\delta_{01} + \delta_{02}}{2} \pm \frac{(\nu_{01} - \nu_{02})(\delta_{01} - \delta_{02})}{2\sqrt{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + \nu_{01}^2 k^2}}.$$

Wir erhalten für den Stromeffekt, indem wir wieder k^2 gegen 1 vernachlässigen:

$$J_{2\,\text{eff.}}^2 = \frac{p_{21}^2 F^2 \cdot C_2^2 \nu_{01}^4}{4}$$

$$\left[\frac{\delta_{01} + \delta_{02}}{\left\{\delta_{01}\delta_{02} + \frac{k^2\nu_{01}^2(\delta_{01} - \delta_{02})^2}{4\{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + k^2\nu_{01}^2\}}\right\}\left\{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + k^2\nu_{01}^2 - \frac{(\delta_{01} - \delta_{02})^2 k^2 \nu_{01}^2}{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + k^2\nu_{01}^2} + (\delta_{01} + \delta_{02})^2\right\}}\right],$$

1) M. Wien, l. c. p. 174.

oder unter Einführung der Dekremente $\mathfrak{d}_{01}$, $\mathfrak{d}_{02}$ und der Verstimmung x

$$(IV)\quad \left\{ J_{2\,\text{eff.}}^2 = \frac{F^2 . C_1}{2} \cdot \frac{k^2 \pi^2}{\nu_{01} L_{22}} \left[\frac{\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02}}{\left\{ \mathfrak{d}_{01}\mathfrak{d}_{02} + \frac{k^2 (\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02})^2}{4 (x^2 + k^2)} \right\} \left\{ 4\pi^2 x^2 + 4\pi^2 k^2 - \frac{k^2 (\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02})^2}{x^2 + k^2} + (\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02})^2 \right\}} \right] \right.$$

Ist $\mathfrak{d}_{01} = \mathfrak{d}_{02}$ oder $\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}$ so klein, daß die Glieder mit $(\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02})^2$ vernachlässigt werden können, so ist:

$$J_{2\,\text{eff.}}^2 = \frac{F^2 C_1}{2} \cdot \frac{k^2 \pi^2}{\nu_{01} L_{22}} \left[\frac{\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02}}{\mathfrak{d}_{01}\mathfrak{d}_{02} \{ 4\pi^2 x^2 + 4\pi^2 k^2 + (\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02})^2 \}} \right],$$

d. h. es tritt infolge der Koppelung in der gewöhnlichen Bjerknesschen Resonanzgleichung zu dem Glied $(\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02})^2$ das Glied $4\pi^2 k^2$ hinzu: die Resonanzkurve ergibt uns also bei der Berechnung an Stelle von $\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02}$ den zu großen Wert

$$\sqrt{(\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02})^2 + 4\pi^2 k^2}\,.$$

Bei größeren Werten von $\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}$ sind die Glieder mit $(\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02})^2$ nicht mehr ohne weiteres zu vernachlässigen, jedoch ist zu berücksichtigen, daß die beiden Glieder mit $(\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02})^2$ entgegengesetztes Vorzeichen haben, also gegeneinander wirken; sie werden daher nur einen geringen Einfluß ausüben und das Korrektionsglied $4\pi^2 k^2$ vorherrschend sein, solange $|\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}|$ kleiner ist als $2\pi k$, und das ist ja bei unserer Berechnung hier vorausgesetzt.

Wir erhalten also als Resultat, *daß, wenn die Differenz der Dämpfungen so klein ist, daß die Koppelung vorherrscht* — $2\pi k > |\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}|$ — *ebenfalls eine Verflachung der Resonanzkurven eintritt und man statt* $\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02}$ *aus der Kurve*

$$\sqrt{(\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02})^2 + 4\pi^2 k^2}$$

erhält; eine merkliche Deformation der Resonanzkurve tritt jedoch nicht ein. Eine Erläuterung der Wirkung durch Kurven ist daher hier nicht notwendig.

§ 8. *Bestimmung von* $\mathfrak{d}_{02}$. Aus der Resonanzkurve erhält man nur die Summe der Dekremente $\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02}$, um $\mathfrak{d}_{01}$ selbst zu erhalten, muß $\mathfrak{d}_{02}$ für sich gemessen werden. Das geschieht

durch Vermehrung des Dekrementes $\mathfrak{d}_{02}$ um einen bekannten Betrag γ, indem ein Zusatzwiderstand eingeschaltet wird, und Vergleich der beiden Stromeffekte mit und ohne γ bei Resonanz ($x = 0$).

Für $x = 0$ ergeben beide betrachteten Fälle

$$2\pi k > |\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}| \quad \text{und} \quad 2\pi k < |\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}|$$

den gleichen Ausdruck für den Stromeffekt: $J_{r\,\text{eff.}}^2$

$$J_{r\,\text{eff.}}^2 = \frac{F^2 C_1}{2} \cdot k^2 \cdot \pi^3 \frac{\nu_{01}}{L_{22}} \cdot \left[\frac{1}{(\mathfrak{d}_{01}\mathfrak{d}_{02} + \pi^2 k^2)(\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02})} \right],$$

mithin können wir beide Fälle zugleich betrachten. Ist $J_{r\,\text{eff.}}'^2$ der Stromeffekt nach Vermehrung von $\mathfrak{d}_{02}$ um γ, so erhalten wir für das Verhältnis der Galvanometerausschläge α_γ/α:

$$\frac{\alpha_\gamma}{\alpha} = \frac{J_{r\,\text{eff.}}'^2}{J_{r\,\text{eff.}}^2} = \frac{(\mathfrak{d}_{01}\mathfrak{d}_{02} + \pi^2 k^2)(\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02})}{\{\mathfrak{d}_{01}(\mathfrak{d}_{02} + \gamma) + \pi^2 k^2\}\{\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02} + \gamma\}}.$$

Hieraus, indem wir $\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02} = \mathfrak{d}_0$ setzen:

$$\mathfrak{d}_{02} + \frac{\pi^2 k^2}{\mathfrak{d}_{01}} = \gamma \cdot \frac{\alpha_\gamma/\alpha\,(\mathfrak{d}_0 + \gamma)}{\mathfrak{d}_0 + \alpha_\gamma/\alpha\,(\mathfrak{d}_0 + \gamma)} = \gamma \frac{1 + \gamma/\mathfrak{d}_0}{\alpha/\alpha_\gamma - (1 + \gamma/\mathfrak{d}_0)}.$$

Statt $\mathfrak{d}_{02}$ messen wir $\mathfrak{d}_{02} + \pi^2 k^2/\mathfrak{d}_{01}$, erhalten also ebenfalls ein zu großes Dekrement. Dies ist auch insofern von Bedeutung, als vielfach diese Methode zur Messung kleiner Dekremente geschlossener Schwingungskreise dient.

§ 9. *Die theoretische Betrachtung der Rückwirkung des resonierenden Systems bei Dämpfungsmessungen ergibt folgendes Resultat: Infolge der Rückwirkung treten in der Bjerknesschen Gleichung Glieder hinzu, die dem Quadrat des Koppelungskoeffizienten k proportional sind. Diese Glieder bewirken eine Verflachung der Resonanzkurve und verursachen Fehler bei der Bestimmung des Dekrementes, das zu groß ausfällt. Um diese Fehler zu vermeiden, muß man k^2 nicht nur, wie Bjerknes und Drude angeben, klein gegen 1 machen, sondern klein gegen $\mathfrak{d}_{01}\mathfrak{d}_{02}/\pi^2$. In den gewöhnlichen Fällen* ($\mathfrak{d}_{01} = 0{,}1$, $\mathfrak{d}_{02} = 0{,}01$) *muß also k^2 klein gegen 10^{-4}, in extremen Fällen sehr geringer Dämpfung* ($\mathfrak{d}_{01} = 0{,}01$, $\mathfrak{d}_{02} = 0{,}005$) *klein gegen $5 \cdot 10^{-6}$ sein.*

B. Versuche über die Rückwirkung des Resonanzkreises.

§ 10. Die Versuche wurden zunächst in der Weise angestellt, daß eine durch Funkenentladung erregte Kondensator-

schwingung in verschieden fester Koppelung auf einen Resonanzkreis wirkte. Der Stromeffekt im Resonanzkreis bei Änderung seiner Kapazität wurde in der bekannten Weise bolometrisch gemessen, und diente zur Konstruktion der Resonanzkurve.

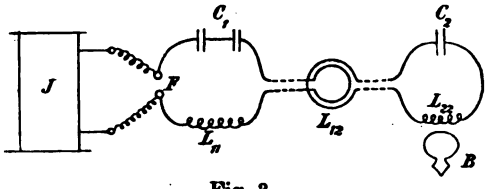


Fig. 3.

Die Versuchsanordnung ist in Fig. 3 skizziert. Den Strom lieferte ein 80 cm-Induktorium von R. Seiffert & Co. in Hamburg, das durch einen A.E.G.-Turbinenunterbrecher betrieben wurde. Das Induktorium gab sowohl für kleine wie für große Kapazitäten, für kleine und für große Funkenstrecken bei geeigneter Schaltung der Primärspule sehr regelmäßige Funken. Die Kapazität (C_1) des Kreises I bestand in Leydener Flaschen aus Flintglas, zur Vermeidung von Sprühwirkungen in Serie geschaltet. Im Resonanzkreis wurde ein variabler Luftkondensator der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie benutzt. Als Selbstinduktionen dienten sowohl im Oszillator wie im Resonator ringförmig gewickelte Spulen aus 3 mm-Cu-Draht.

Für die absolute Messung der Selbstinduktion derartiger dickdrähtiger Spulen mit kleinem Radius besteht die Schwierigkeit, daß bei ihnen wegen des Skineffektes die Selbstinduktion für schnelle Schwingungen wesentlich kleiner ist als für langsame. Deshalb wurde zunächst eine Spule mit großem Radius und wenigen Windungen, bei der diese Wirkung verschwindend ist, bei langsamen Schwingungen mit einer Selbstinduktionsnormale verglichen und dann durch Vergleich mit dieser Spule bei schnellen Schwingungen die Selbstinduktion der ringförmigen Spulen durch Resonanzversuche bestimmt.

Die Koppelung zwischen Oszillator und Resonanzkreis wurde durch zwei koaxiale Drahtkreise bewirkt, deren Abstand verändert werden konnte. Ihr gegenseitiger Induktionskoeffizient L_{12} wurde nach den bekannten Maxwellschen

Formeln berechnet. Daraus ergab sich dann der Koppelungskoeffizient $k = L_{12} / \sqrt{L_{11} L_{22}}$.

§ 11. Es sei zunächst eine Versuchsreihe als Beispiel angeführt.

Tabelle 4.

$C_1 = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$, $L_{11} = 25400$, $\delta_{01} = 0{,}11$, $C_2 = 2{,}05 \cdot 10^{-10}$, $L_{22} = 5900$, $\delta_{02} = 0{,}015$.

x	$k = 0{,}0044$	0,0056	0,0081	0,0105	0,014
−4,3 %	10,5	12	14	15,5	18,5
−3,4	17	19	21	23	26
−2,6	32	33	36	39	41
−1,7	58	62	66	66	68
−0,8	88	89	90	91	91
±0,0	100	100	100	100	100
+0,8	88	89	91	94	93
+1,7	62	64	67	70	73
+2,5	34	37	40	43	45
+3,3	20	21	23	26	29
+4,2	13,5	14	16	19	21,5

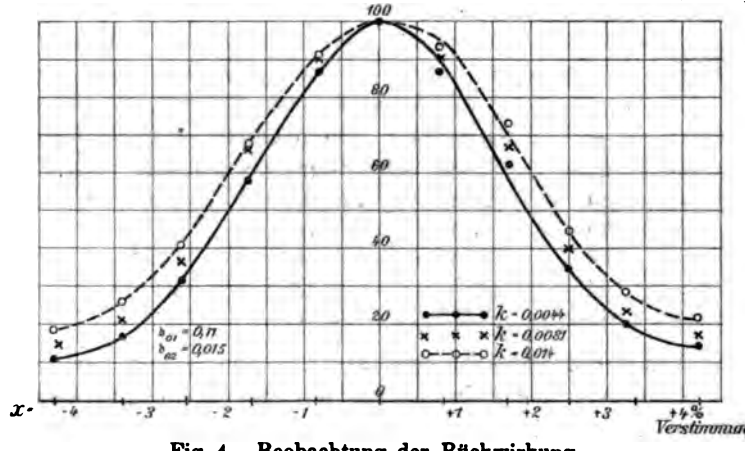


Fig. 4. Beobachtung der Rückwirkung.

In der Fig. 4 sind für die Koppelungen $k = 0{,}0044$ und $k = 0{,}014$ die Kurven gezeichnet, und außerdem die Beobachtungen bei $k = 0{,}0081$ als Kreuze eingetragen.

Die Beobachtung ergibt offenbar qualitativ dasselbe Resultat wie die Theorie: mit steigender Koppelung werden die Resonanzkurven flacher, so daß die daraus berechneten Dekremente zu groß ausfallen.

Quantitativ zeigen sich jedoch erhebliche Differenzen. Zunächst ist die Vergrößerung des Dekrementes besonders für engere Koppelung kleiner als die Theorie es verlangt. Ferner ergab sich bei den Versuchen, daß die Wirkung der Koppelung auch von der Beschaffenheit des Schwingungskreises abhängt; in den meisten Fällen, besonders bei größerer Kapazität ist die Wirkung noch geringer als in den hier angeführten Beispielen.

§ 12. Ferner tritt eine erhebliche *Deformation* der Resonanzkurve hervor, und zwar wird im Gegensatz zur Theorie, nach der bei engerer Koppelung infolge der Korrektion *B*, p. 633, eher ein etwas zu steiler Gipfel der Resonanzkurve zu erwarten wäre, der Gipfel der Resonanzkurve mit wachsender Koppelung immer breiter.

In der folgenden Tab. 5 sind die aus den verschiedenen Teilen der Resonanzkurven sich ergebenden Werte von $\mathfrak{d}_{01}+\mathfrak{d}_{02}$ zusammengestellt und zwar sind, während es sonst zweckmäßig ist, das Dekrement nur aus den zwischen den Ordinaten 50 und 80 liegenden Teilen zu berechnen, hier, um die Erscheinung besser hervortreten zu lassen, auch die Ordinaten 40 und 90 herangezogen.

Tabelle 5.

y	$k=0{,}0044$	0,0081	0,014
90	0,141	0,157	0,182
80	0,137	0,152	0,169
70	0,133	0,147	0,160
60	0,128	0,142	0,154
50	0,123	0,135	0,144
40	0,118	0,126	0,136

Aus der Tabelle ist deutlich zu ersehen, daß nicht nur der Mittelwert des Dekrementes mit der Koppelung wächst, sondern auch gleichzeitig die Deformation der Resonanzkurve; bei der Koppelung 0,0044 beträgt der Unterschied zwischen den Werten von $\mathfrak{d}_{01}+\mathfrak{d}_{02}$ für $y=40$ und $y=90$ 0,023, bei $k=0{,}014$ schon 0,046.

§ 13. Bei der Bestimmung des Dekrementes $\mathfrak{d}_{02}$ durch Hinzufügung eines bekannten Dekrementes γ im sekundären Kreis sollte sich der Theorie nach (vgl. p. 635) statt $\mathfrak{d}_{02}$ ergeben $\mathfrak{d}_{02}+(\pi^2k^2/\mathfrak{d}_{01})$. Die Versuche bestätigten die Theorie insofern, als das Dekrement mit wachsender Koppelung zu-

nahm, jedoch war die Zunahme auch hier, besonders bei enger Koppelung, zu klein. Die Ergebnisse waren wiederum in erheblichen Grade von der Beschaffenheit des Stromkreises abhängig. Folgende Tabelle mag ein Bild von dem Verlaufe geben:

Tabelle 6.

$C_1 = 3 \cdot 10^{-10}$, $L_{11} = 25500$, $\mathfrak{d}_{01} = 0{,}127$, $C_2 = 5{,}1 \cdot 10^{-10}$, $L_{22} = 15000$, $\mathfrak{d}_{02} = 0{,}0125$.

$k =$	0	0,004	0,006	0,010	0,020	0,024
$\mathfrak{d}_{02}$ beob.	—	0,0136	0,0143	0,0154	0,0164	0,0172
$\mathfrak{d}_{02}$ ber.	0,0125	0,0137	0,0153	0,0203	0,0435	0,0575

§ 14. Wenn man die Koppelung noch enger macht, als in den bisherigen Versuchen und etwa in die Gegend kommt, wo nach der Theorie zwei Koppelungsschwingungen mit verschiedener Periode auftreten sollten $(2\pi k \leqq |\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}|)$, erhält man eine eigentümliche Deformation der Resonanzkurve, indem der mittlere Teil derselben immer steiler wird, ja unter Umständen ganz spitz zuläuft. Dieser Umschlag von Resonanzkurven mit zu breitem Gipfel bei mittlerer Koppeluug zu Resonanzkurven mit zu steilem Gipfel bei engerer Koppelung erfolgt ziemlich schnell. Die Ausschläge werden oft unregelmäßig, so daß die Beobachtungen nicht mehr so glatte Kurven geben, wie sonst. Ein Beispiel ist in Tab. 7, Fig. 5, gegeben.

Tabelle 7.

$C_1 = 3{,}3 \cdot 10^{-10}$, $L_{11} = 26500$, $C_2 = 1{,}43 \cdot 10^{-8}$, $L_{22} = 6100$. $F_2 = 0{,}3$ cm.

x	$k = 0{,}0045$	0,0078	0,010	0,015	0,020	0,024	0,028
−2,7%	38,2	40,4	44,6	47	47	46	44
−2,0	59,4	61,0	64,0	67	68	58	49
−1,4	75,7	80,0	81	85	82	72	57
−0,8	91,4	92,0	96	94	92	82	60
0	100	100	100	100	100	98	66
+0,4	97,6	96	98	98	96	100	100
1,0	84,0	84	90	93	95	92	68
1,6	66,6	69	74	79	82	74	54
2,2	49,4	50,6	57	58,5	60,6	55	46
2,8	33,0	34,0	38	42	43	42	38
3,6	20,2	20,6	25	27,6	30	32	34

In der Fig. 5 sind die Kurven für $k = 0{,}0045$, $k = 0{,}015$ und $k = 0{,}028$ gezeichnet, wobei die zum Teil etwas verschobenen Maxima übereinandergelegt sind. Diese sehr charakteristische Einschnürung der Gipfels der Resonanzkurve bei engerer Koppelung findet sich stets wieder, wenn ein durch Funkenstrecke erregter Schwingungskreis auf einen Resonanzkreis mit wesentlich geringerer Dämpfung einwirkt.

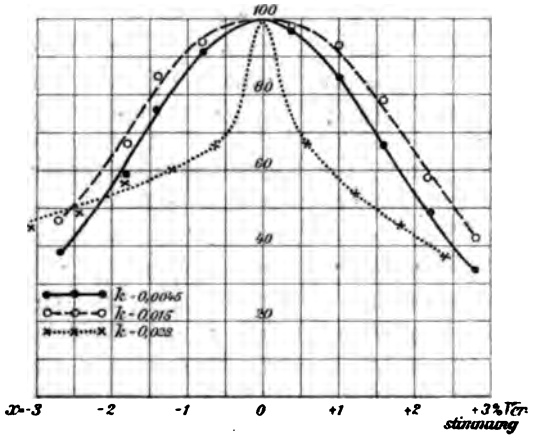


Fig. 5. Beobachtung der Rückwirkung.

§ 15. Ich glaubte anfangs[1]) die Erscheinung durch ein stärkeres Hervortreten der Korrektion B (vgl. p. 633) bei engerer Koppelung erklären zu können, jedoch könnte dadurch, wie oben auseinandergesetzt, nur eine verhältnismäßig geringe Deformation der Resonanzkurve eintreten, nicht aber ein so ausgesprochen spitzer Verlauf des Gipfels, wie in Fig. 5. Der eigentliche Grund liegt in den eigentümlichen Eigenschaften des Funkens, dessen Widerstand während der Entladung schnell anwächst und dadurch zu dieser und zu anderen Abweichungen von der Theorie Veranlassung gibt. Ich möchte jedoch hier noch nicht näher auf diese Dinge eingehen, sondern später in einem der nächsten Abschnitte dieser Arbeit die Eigenschaften des Funkens und die einschneidende Rolle, welche

1) Vgl. meinen Vortrag auf der Naturforscher-Versammlung in Dresden (Physik. Zeitschr. 8. p. 724. 1907).

er bei Kondensatorschwingungen spielt, im Zusammenhang besprechen.

§ 16. Daß tatsächlich die soeben besprochenen Abweichungen von der Theorie auf der Einwirkung des Funkens beruhen, wird am besten dadurch bewiesen, daß die Abweichungen fortfallen, wenn man den Funken eliminiert. Wie dies geschieht, wird im folgenden Abschnitt gezeigt werden. Es seien hier nur die Resultate der Versuchsreihen angeführt, bei der ein funkenloser Kondensatorkreis in verschieden loser Koppelung auf einen Resonanzkreis wirkt.

Tabelle 8. Fig. 6.

$C_1 = 3{,}49 \cdot 10^{-10}$, $L_{11} = 97500$, $C_2 = 1{,}37 \cdot 10^{-10}$, $L_{22} = 24800$.

$\mathfrak{d}_{01} = 0{,}014$, $\mathfrak{d}_{02} = 0{,}0087$, $1^\circ C^\circ = \frac{C_2}{1952}$.[1])

C.°	$k = 0{,}00033$	0,00061	0,0012	0,0020	0,0027	0,0038
76	—	—	26,2	—	—	40,9
80	31,3	33,5	33,7	35,6	42,7	50,6
84	41,3	40,4	44,4	46,6	54,5	60,8
88	56,2	57,9	58,4	60,1	67,6	73,3
92	75,2	74,8	76,6	77,3	82,2	84,1
96	90,5	90,5	92,2	92,0	94,9	94,4
100	100	100	100	100	100	100
104	93,7	93,7	95,8	96,4	96,6	97,9
108	77,6	78,2	80,5	82,8	85,4	90,9
112	59,0	60,8	64,0	68,1	70,7	79,7
116	45,4	44,1	48,5	51,6	56,9	67,0
120	34,0	35,1	37,2	39,4	45,8	55,1
124	—	—	27,7	—	—	45,7

In der Fig. 6 sind die Kurven für die schwächste und für die stärkste Koppelung gezeichnet, und außerdem die beobachteten Punkte für die Koppelungen $k = 0{,}0020$ (• • •) und $k = 0{,}0027$ (× × ×) eingetragen.

1) Zur feineren Einstellung war hier ein kleinerer variabler Luftkondensator dem Kondensator des Meßkreises ‖ geschaltet. $1^\circ C^\circ$ gibt an, um wieviel bei Verstellung dieses Zusatzkondensators um 1° die ganze Kapazität C_2 verändert wurde. (Vgl. auch R. v. Traubenberg u. B. Monasch, Physik. Zeitschr. 8. p. 925. 1907.)

Aus dem Anblick der Figur ergibt sich, daß hier eine viel stärkere Verflachung der Resonanzkurve infolge der Koppelung eintritt, als bei Funkenerregung überhaupt erreichbar war.

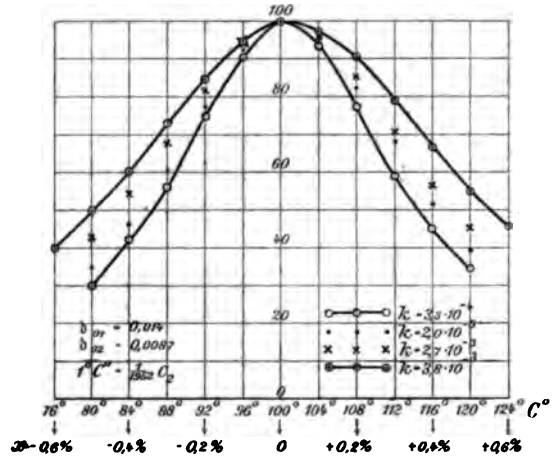


Fig. 6. Beobachtung der Rückwirkung.

§ 17. Bei dem Vergleich mit der Theorie ist zu berücksichtigen, daß die Differenz der Dekremente $\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02} = 0{,}0053$ sehr klein ist, und daher von $k = 0{,}0012$ ab „die Koppelung vorherrschend ist" ($2\pi k > |\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}|$). Dabei soll nach der oben abgeleiteten Theorie nur eine Verflachung der Resonanzkurve eintreten ohne merkliche Deformation, und aus der Kurve sich statt $\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02}$ der zu große Wert

$$\sqrt{(\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02})^2 + 4\pi^2 k^2}$$

ergeben.

Tabelle 9.

y	$k = 0{,}00033$	0,00061	0,0012	0,0020	0,0027	0,0038
80	0,0228	0,0229	0,0244	0,0255	0,0290	0,0342
70	0,0229	0,0230	0,0246	0,0257	0,0290	0,0341
60	0,0227	0,0229	0,0244	0,0255	0,0288	0,0341
50	0,0227	0,0231	0,0242	0,0252	0,0288	0,0340
Mittelwert	0,0228	0,0230	0,0244	0,0255	0,0289	0,0341
Berechneter Wert	0,0228	0,0230,5	0,0240	0,0259	0,0288	0,0331

Die vorstehende Tab. 9 enthält die Dekremente, wie sie sich aus den verschiedenen Teilen der Kurve berechnen, dann den Mittelwert daraus und schließlich in der letzten Horizontalreihe die nach der Formel

$$\sqrt{0{,}0227 + 4\pi^2 k^2}$$

berechneten theoretischen Werte.

Die gute Übereinstimmung der aus den einzelnen Teilen der Resonanzkurven gewonnenen Dekremente beweist, daß keine merkliche Deformation eingetreten ist. Die Mittelwerte stimmen innerhalb der Fehlergrenzen mit den berechneten Werten überein: mithin entspricht, sobald kein Funke im Schwingungskreis ist, die ganze Erscheinung durchaus der Theorie.

Dasselbe gilt auch für die Bestimmung des Dekrementes $\mathfrak{d}_{02}$ für sich durch Hinzufügung eines bekannten Dekrementes γ, wie aus der folgenden Tabelle hervorgeht. In der letzten Horizontalreihe sind die nach der theoretischen Formel (p. 635)

$$\mathfrak{d}_2 = \mathfrak{d}_{02} + \frac{\pi^2 k^2}{\mathfrak{d}_{01}} = 0{,}0087 + \frac{\pi^2 k^2}{0{,}014}$$

berechneten Werte angegeben.

Tabelle 10.

k =	0,00033	0,00061	0,0012	0,0020	0,0027	0,0038
$\mathfrak{d}_2$ beob.	0,0087	0,0091	0,0099	0,0117	0,0145	0,020
$\mathfrak{d}_2$ ber.	0,0088	0,0091	0,0097	0,0115	0,0139	0,019

Resultate des Abschnittes I.

§ 18. Aus der *Theorie* folgt, daß bei zu enger Koppelung zwischen Oszillator und Resonator, sobald k^2 nicht mehr klein ist gegen $\mathfrak{d}_{01}\mathfrak{d}_{02}/\pi^2$, die Resonanzkurve zu flach ausfällt, und die aus ihr berechneten Dekremente zu große Werte ergeben. *Bei Versuchen mit Schwingungskreisen ohne Funkenstrecke wurde die Theorie qualitativ und quantitativ bestätigt.*

Bei *Funkenerregung zeigten sich Abweichungen* insofern, als 1. die Resonanzkurve mit wachsender Koppelung immer stärker deformiert wird, 2. das Anwachsen des Dekrementes nicht so stark ist, als die Theorie es verlangt, und 3. bei enger Koppelung eigentümliche spitze Kurven auftreten. Diese Abweichungen von der Theorie sollen noch näher untersucht werden.

Für die experimentelle Bestimmung des Dekrementes nach der Bjerknesschen Methode ist daher Vorsicht geboten: man muß für exakte Messungen dazu sorgen, daß k^2 klein gegen $b_{01} b_{02}/\pi^2$ ist. Wenn sich k nicht bestimmen läßt, so muß man prüfen, ob bei Änderung der Koppelung die Resonanzkurve ungeändert bleibt. Um hierbei die Wirkung deutlich hervortreten zu lassen, ist die Koppelung mindestens zu verdoppeln, der Maximalausschlag also 4 mal so groß zu machen als der, mit dem man nachher die eigentliche Messung auszuführen beabsichtigt. Bei Funkenerregung ist die Wirkung zwar viel kleiner, sie kann aber doch, wie aus den obigen Beispielen ersichtlich, gerade bei kleinen Kapazitäten, wo die Gefahr zu enger Koppelung besonders nahe liegt, recht beträchtlich sein.

II. Erzeugung schwach gedämpfter Schwingungen.[1])

§ 19. Es ist schon mehrfach der Wunsch ausgesprochen, den störenden Funken bei den Dämpfungsmessungen zu eliminieren.[2]) Der Weg dafür ist gegeben: es muß der die Funkenstrecke enthaltende Primärkreis in einem geschlossenen Sekundärkreis induktiv elektrische Schwingungen erregen. Die Schwierigkeit der Verwendung dieser Anordnung liegt in folgendem: Die beiden Kreise müssen so lose miteinander gekoppelt sein, daß kein merklicher Einfluß des durch die Funkenstrecke stark gedämpften Primärkreises auf die Dämpfung des Sekundärkreises mehr stattfindet. Andererseits soll die auf den Sekundärkreis übertragene Energie doch so groß sein, daß sie, zunächst einmal für Meßzwecke, ausreicht.

Zum Studium dieser Frage hielt ich es für nötig, zuerst die gegenseitige Einwirkung zweier lose gekoppelter Systeme theoretisch und experimentell zu untersuchen. Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind im vorigen Abschnitt dargestellt und dienen dem folgenden als Grundlage.

§ 20. Ein stark gedämpftes Primärsystem (Fig. 7, I) wirkt durch lose Koppelung auf ein schwach gedämpftes, gleich-

1) Ein vorläufiger Bericht über die Ergebnisse dieses Abschnittes erschien in der Physik. Zeitschr. 9. p. 49. 1908.

2) Vgl. z. B. die Bemerkung von O. Wiener in der Diskussion zu meinem Vortrag auf der Naturforscherversammlung in Dresden (Physik. Zeitschr. 1907. p. 766).

mit dem ebenfalls schwach gedämpften Meßkreis (III) gekoppelt, so daß keine merkliche Rückwirkung auf II vorhanden ist. Unsere Aufgabe besteht darin, die Systeme I und II so zu gestalten, daß die Resonanzkurve des Stromeffektes im Meßkreise merklich nur noch von der Dämpfung des Sekundärsystems abhängt, die des Primärsystems ohne Einfluß ist.

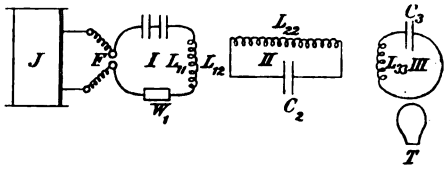


Fig. 7.

Nach zwei Richtungen hin kann der Primärkreis einen Einfluß ausüben.

Einmal entstehen bei loser Koppelung im Sekundärkreis zwei Schwingungen mit annähernd gleicher Anfangsamplitude. Die eine besitzt annähernd das Dekrement des Primärkreises

$$\left(\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_{01} - \frac{\pi^2 k_{12}^2}{\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}}\right),$$

die andere annähernd das des Sekundärkreises

$$\left(\mathfrak{d}_2 = \mathfrak{d}_{02} + \frac{\pi^2 k_{12}^2}{\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}}\right).$$

Der Stromeffekt in dem schwach gedämpften Meßkreis sinkt sehr schnell — schließlich quadratisch —, wenn die Dämpfung der zu messenden Schwingung steigt.[1]) Der Stromeffekt der schwach gedämpften der beiden Schwingungen des Sekundärsystems wird also *sehr groß* sein gegen den der stark gedämpften Schwingung, wenn das Dekrement des Primärkreises *groß* ist gegen das des Sekundärkreises. Wir können uns mithin von dem Einfluß der störenden stark gedämpften zweiten Schwingung befreien, wenn wir die Dämpfung des primären Systems groß genug gegenüber der des sekundären Systems machen.

Ein weiterer Einfluß des Primärsystems besteht darin, daß das Dekrement der schwach gedämpften Schwingung des gestimmtes Sekundärsystem II. Dieses ist wieder sehr lose

---

1) Nach **Bjerknes** ist $J_{\text{eff.}}^2$ proportional $\frac{1}{\mathfrak{d}_{01}\,\mathfrak{d}_{02}\,(\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{02})}$ (vgl. p. 629).

Sekundärsystems nicht gleich der des ungekoppelten Systems ($\mathfrak{d}_{02}$), sondern größer ist:

$$\mathfrak{d}_2 = \mathfrak{d}_{02} + \frac{\pi^2 k_{12}^2}{\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}}.$$

Diese Vergrößerung der Dämpfung rührt daher, daß das Sekundärsystem während seines langsamen Abklingens dauernd Energie an das resonierende Primärsystem abgibt, dessen eigene Schwingung infolge der großen Dämpfung schon lange unmerklich geworden ist.

Unserer Formel nach sinkt der Wert des Korrektionsgliedes $\pi^2 k_{12}^2/\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}$ ebenfalls mit steigender Dämpfung des Primärsystems, aber nur ungefähr proportional dem Dekrement. Um das Glied klein zu machen, müssen wir nicht nur $\mathfrak{d}_{01}$ groß, sondern auch die Koppelung k_{12} möglichst lose machen.

§ 21. Im Hinblick auf diese Folgerungen der Theorie wurde die Versuchsanordnung zunächst so getroffen, daß das Dekrement des primären Systems durch Einschaltung von Widerstand sehr groß bis zu 0,5 gemacht wurde gegenüber einem Dekrement des sekundären Systems von ca. 0,01. Die Koppelung k_{12} wurde, um $\pi^2 k_{12}^2/\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}$ unter 1 Proz. von $\mathfrak{d}_{02} = 0{,}01$ zu halten, sehr klein bis zu 0,001 gewählt. Um dabei noch die nötige Energie im Sekundärsystem zu erzielen, mußten sehr große Kapazitäten im Primärsystem verwandt werden bei entsprechend kleiner Selbstinduktion.

Im Verlauf der Versuche stellte es sich dann bald heraus, daß diese Vorsicht, was die Koppelung anbetrifft, nicht notwendig ist. *Man kann die Koppelung verhältnismäßig sehr eng machen, so eng, daß etwa der Punkt erreicht wird, wo der Theorie nach zwei Schwingungen mit verschiedenen Schwingungszahlen auftreten müßten,* $2\pi k_{12} = \mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}$, *ja sogar noch darüber hinaus, ohne daß eine merkliche Änderung der Resonanzkurve des Stromeffektes eintritt.* Diese Abweichung von der Theorie beruht wieder auf den eigentümlichen Eigenschaften des Funkens. Der Funkenwiderstand wächst sehr schnell während der Entladung. Schon nach kurzer Zeit ist die Leitfähigkeit des Funkens sehr gering [1]), und der Kreis praktisch als un-

1) Vgl. J. Zenneck, Ann. d. Phys. 13. p. 822. 1904.

geschlossen zu betrachten. Daher hört der Energieabfluß des schwach gedämpften Sekundärsystems nach dem Primärsystem sehr bald auf, und es schwingt so, als ob es ungekoppelt wäre. In dem Ausdruck $\mathfrak{d}_{02} + (\pi^2 k^2/\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02})$ wird $\mathfrak{d}_{01}$ bald sehr groß, so daß das gefährliche Glied von viel geringerem Einfluß ist, als die Theorie es ergibt.

§ 22. Experimentell habe ich den Einfluß des Primärsystems auf die Resonanzkurven des Sekundärsystems eingehend untersucht. Es wurde dabei die Funkenstrecke, die Dämpfung und die Koppelung des Primärsystems in weiten Grenzen geändert, auch wurden Primär- und Sekundärsysteme gegeneinander verstimmt. Vor allem lag mir natürlich daran, die Grenzen festzustellen, wo ein deutlicher Einfluß des Primärsystems hervorzutreten beginnt.

Das Resultat dieser Versuche war, daß es vor allem darauf ankommt, daß die Dämpfung des Primärsystems groß ist gegen die des sekundären. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann die Funkenstrecke, die Verstimmung und in weiten Grenzen auch die Koppelung beliebig geändert werden, ohne daß eine Änderung der Resonanzkurve eintritt.

Von diesen Versuchen seien nur einige besonders charakteristische im folgenden angeführt:

Die Versuchsanordnung ist in Fig. 7 (p. 645) skizziert. Der Erregerkreis (I) nebst Induktorium usw. und der Meßkreis (III waren etwa ebenso eingerichtet, wie oben bei den Versuchen über die Rückwirkung (p. 636). Hier trat nun noch der wenig gedämpfte Sekundärkreis (II) hinzu, über den ich noch einige Angaben machen muß. Bei den im folgenden beschriebenen Versuchen bestand die Selbstinduktion, abgesehen von den Zuleitungen aus einem eng gewickelten Solenoid aus quadratischem (3 × 3 mm) Cu-Draht mit einer Windungszahl von 142, und einem Spulenradius von 3 cm. Als Kapazitäten dienten Luftkondensatoren (Fig. 8) ähnlich denen, wie sie von B. Monasch[1]) bei einer vor einiger Zeit im hiesigen Institut ausgeführten Untersuchung verwandt wurden. Sie bestanden im wesentlichen aus zwei koaxialen Zylindern aus Messingblech von 100 cm Höhe und ca. 2 cm Abstand. Die Kanten waren ab-

1) B. Monasch, Ann. d. Phys. 22. p. 905. 1907.

gerundet. Sie vertrugen ohne merklichen Verlust recht hohe Spannungen. Die Kapazität war allerdings nur klein: die vier Kondensatoren, welche bei den Versuchen verwandt wurden, besaßen ‖ geschaltet eine Kapazität von $0{,}77 \cdot 10^{-3}$ M.F.

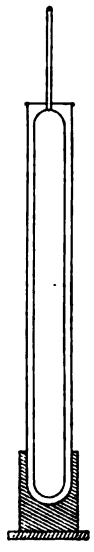


Fig. 8.

§ 23. Der eine der Versuche, welche hier beschrieben werden sollen, möge als Beispiel dafür dienen, daß auch bei verhältnismäßig enger Koppelung der Primärkreis ohne merkliche Wirkung auf die Resonanzkurve des Sekundärkreises bleibt, wenn nur die Dämpfung des Sekundärkreises klein gegen die des Primärkreises ist.

Der Primärkreis bestand einfach aus Leydener Flaschen und dem Schließungsdraht ohne besonders zur Vermehrung der Dämpfung eingeschalteten Manganindraht. Sein Dekrement betrug ca. 0,14, das des Sekundärkreises 0,013. Eine Resonanzkurve wurde bei der Koppelung $k = 0{,}01$ [1]), eine zweite für $k = 0{,}03$ aufgenommen. Nach der Formel

$$\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{b}_{02} + \frac{\pi^2 k^2}{\mathfrak{b}_{01} - \mathfrak{b}_{02}}$$

hätte im Fall I

$$\mathfrak{b}_2 = 0{,}013 + \frac{\pi^2 \cdot 0{,}01^2}{0{,}14 - 0{,}013} = 0{,}020,$$

im Fall II

$$\mathfrak{b}_2 = 0{,}013 + \frac{\pi^2 \cdot 0{,}03^2}{0{,}14 - 0{,}013} = 0{,}083$$

sein müssen. Die Resultate der Versuche sind in Tab. 11 und Fig. 9 gegeben.

Wie aus der Fig. 9 ersichtlich, liegen die Punkte II (× × ×) teils über, teils unter der Kurve I, die Differenzen fallen durchaus in das Gebiet der damaligen Versuchsfehler. Die Werte von $\mathfrak{b}_{02} + \mathfrak{b}_{03}$ für die verschiedenen Ordinaten der Kurven sind in der Fig. 9 seitlich daneben geschrieben, links für $k = 0{,}01$, rechts für $k = 0{,}03$; ihre Mittelwerte (0,0220 und 0,0218) sind merklich gleich, so daß keine Wirkung der engeren Koppelung hervortritt.

1) Wegen der Form der Rollen konnte die gegenseitige Induktion hier nicht genau berechnet werden; die angegebenen Werte von k sind daher nur als Näherungswerte zu betrachten.

Tabelle 11.

$C_1 = 5{,}1 \cdot 10^{-18}$, $L_1 = 6600$ cm, $\mathfrak{d}_{01} = 0{,}14$, $\mathfrak{d}_{02} = 0{,}018$, $\mathfrak{d}_{03} = 0{,}0089$,

$C_2 = 3{,}49 \cdot 10^{-19}$, $L_2 = 97500$, $1^\circ\, C_3^\circ = \frac{1}{2040}\, C_3$.

C_3°	I. $k = 0{,}01$ α_{100}	II. $k = 0{,}08$ α_{100}
80	37,8	35,4
85	50,9	49,8
90	68,3	68,6
95	88,6	87,6
100	100	100
105	90,5	88,6
110	66,6	65,0
115	43,0	45,6
120	29,9	31,9

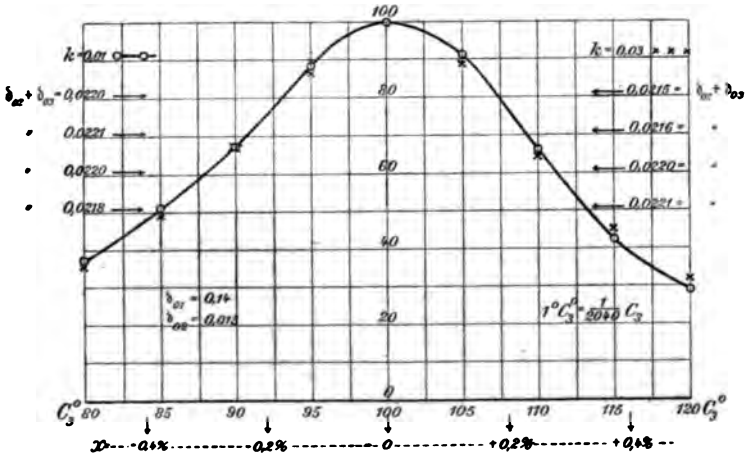


Fig. 9.

Der Stromeffekt war hier sehr hoch und erreicht für eine Koppelung in der Nähe von $2\pi k_{12} = |\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}|$ sein Maximum. Bei noch engerer Koppelung sinkt der Stromeffekt wieder ziemlich schnell, die Resonanzkurve wird immer flacher und bald treten die regulären beiden Koppelungsschwingungen hervor, deren Dämpfung etwa gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Dämpfungen der Einzelsysteme ist. Über diese Fragen, die mit den eigentümlichen Eigenschaften des Funkens zusammenhängen, wird, wie gesagt, später ausführlicher berichtet werden.

§ 24. Der zweite Versuch soll zeigen, bei welchem Verhältnis der Dekremente ($\mathfrak{d}_{01}/\mathfrak{d}_{02}$) die Wirkung des Primär-

systems eben merklich zu werden beginnt. Ist $\mathfrak{d}_{01}$ nicht mehr groß gegen $\mathfrak{d}_{02}$, so ist auch die Zeit, während welcher der Primärkreis als durch den Funken geschlossen zu betrachten ist, nicht mehr verschwindend klein, und dann wird die der Theorie entsprechende Vergrößerung der Sekundärdämpfung mit der Koppelung wieder merklich. Wir haben soeben gesehen, daß dies bei dem 10 fachen Dekrement noch nicht eintrat, wohl aber ließ sich bei dem 6 fachen Dekrement schon ein Einfluß feststellen.

Tabelle 12. Fig. 10.

$C_1 = 5{,}1 \cdot 10^{-18}$, $L_{11} = 6600$, $\mathfrak{d}_{01} = 0{,}36$ (durch Manganindraht vergrößert).
$C_2 = 3{,}49 \cdot 10^{-19}$, $L_{22} = 97100$, $\mathfrak{d}_{02} = 0{,}06$, $\mathfrak{d}_{03} = 0{,}008$.

$$1^0\ C_2^0 = \frac{1}{2040}\ C_2.$$

$k = 0{,}02$		$k = 0{,}06$	
C_2^0	α_{100}	C_2^0	α_{100}
50°	46,3	54°	50,3
60	58,0	64	63,4
70	71,6	74	78,1
80	85,1	84	92,6
90	96,5	94	99,5
100	100	96	100
110	93	104	98,0
120	80,6	114	92,2
130	65,2	124	76,5
140	53,5	134	62,0
150	41,5	144	48,9
		154	39,5

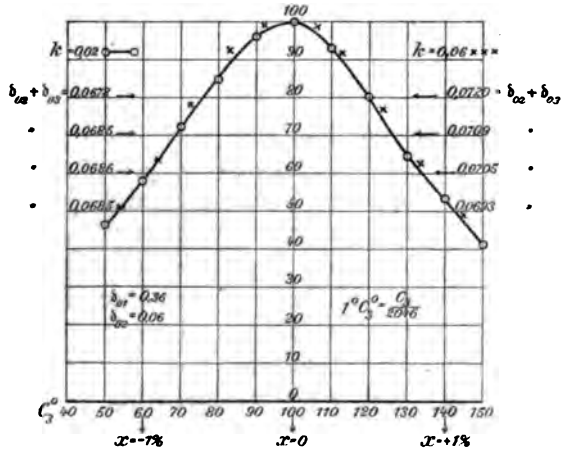


Fig. 10.

Es tritt hier deutlich hervor, daß die Resonanzkurve für engere Koppelung besonders im oberen Teil etwas breiter ist, die × × liegen merklich höher als die o o o-Kurve. Die aus den Kurven berechneten Dekremente steigen bei der engeren Koppelung nach der Spitze der Kurve zu an (vgl. Fig. 10), 0,0693 bis 0,0720. Der Mittelwert 0,0707 liegt etwa 3,5 Proz. höher als bei der Kurve für losere Koppelung (0,0683).

Macht man die Dämpfung des Sekundärkreises noch größer im Verhältnis zu der des Primärkreises, so steigt der Einfluß des Primärkreises und damit der der Koppelung auf die Resonanzkurve des Sekundärkreises schnell an.

§ 25. *In der Art, wie es an diesen Beispielen gezeigt worden ist, wurde, wie gesagt, durch eine große Anzahl von Versuchen der Nachweis geführt, daß die Dämpfung des durch einen Funken erregten Primärkreises auch bei verhältnismäßig enger Koppelung ohne Einfluß auf die Resonanzkurve des Sekundärsystems ist, falls das Dekrement des Primärkreises mindestens 10 mal so groß ist als das des Sekundärkreises. Innerhalb dieser Grenzen findet also eine ideale Stoßerregung statt.*

Dämpfungsmessungen.

§ 26. Da der störende Funke auf diese Weise aus dem sekundären Kreis eliminiert ist, da der Primärkreis nur zur Stoßerregung dient, ohne daß er einen Einfluß auf die Resonanzkurve hat, so ist diese Art der Erregung elektrischer Schwingungen vorzüglich geeignet, um die anderen Ursachen der Dämpfung zu untersuchen.

Im folgenden soll an einem Beispiel ausführlicher gezeigt werden, wie genau sich derartige Dämpfungsmessungen ausführen lassen.

Die Versuchsanordnung war die gleiche wie oben (p. 647). Die Aufnahme der Resonanzkurve geschah in der Weise, daß der Stromeffekt des Meßkreises nicht wie vorher mittels eines Bolometers, sondern mit Hilfe von Thermoelementen gemessen wurde. Die Thermoelemente erwiesen sich, wenigstens bei meinen Versuchen, als empfindlicher und auch als sicherer, weil der Nullpunkt des Galvanometers ruhiger war, als bei meiner Bolometeranordnung.

Das Dekrement des Primärkreises wurde durch Hinzufügung von Manganindraht so groß gemacht, daß es stets mindestens 20mal so groß war als das des Sekundärkreises. Eine große Dämpfung des Primärsystems ist auch insofern bequem, als die Einstimmung mit dem Sekundärkreis nur eine ganz rohe zu sein braucht.[1]) Funkenstrecke, Anzahl der Funken, Größe der Kapazität im primären Kreis konnten in gewissen Grenzen beliebig gewählt werden, so daß man sich so einrichten konnte, daß die Funken möglichst regelmäßig wurden, und alles ruhig und gleichmäßig funktionierte. Das Induktorium gab, wie erwähnt, sehr gleichmäßige Funken, die Hauptfehlerquelle lag in kleinen Ungleichförmigkeiten im Gang des Motors, der den Turbinenunterbrecher trieb. Sie bewirken kleine Abweichungen in der aufgenommenen Resonanzkurve, auf die ich unten nochmals zurückkommen werde. Ich hoffe durch Anwendung eines größeren, gut gebremsten Motors noch präzisere Resultate zu erzielen.

Eine andere Fehlerquelle, die sich leicht vermeiden läßt, auf die jedoch sorgfältig geachtet werden muß, besteht in einer eventuellen direkten Wirkung des Primärkreises auf den Meßkreis. Bei *geöffnetem* Sekundärkreis darf das mit dem Thermoelement verbundene Galvanometer keinen Ausschlag zeigen.

Daß die Koppelung des Sekundärsystems mit dem Meßkreis eine äußerst lose sein mußte, ist nach dem vorigen Abschnitt selbstverständlich.

§ 27. Der zu beschreibende Versuch, welcher ein Bild von der Präzision der Messmethode geben soll, bestand darin, daß das Dekrement des Sekundärsystems einmal direkt gemessen wurde, dann unter Einschaltung eines bekannten Widerstandes, wodurch das Dekrement um eine bekannte Größe vermehrt wurde. Es sind im folgenden für jede Messung zwei Versuchsreihen, die unmittelbar hintereinander gewonnen waren, angegeben.

In den Tabellen sind zunächst die Konstanten der Stromkreise und sonstigen Versuchsbedingungen angegeben, dann

---

1) Durch eine eventuelle Verstimmung des Primärkreises wird nur die übertragene Energie vermindert, auf die Resonanzkurve hat, wie oben erwähnt, die Verstimmung keinen Einfluß.

die Messungen selbst. In der ersten Reihe, wie oben, die Teilstriche des kleinen Zusatzkondensators im Meßkreis, dann die abgelesenen Galvanometerausschläge, schließlich die für den Maximalwert 100 umgerechneten Galvanometerausschläge.

Tabelle 13. $W_s = 0$.

$C_1 = 5{,}1 \cdot 10^{-16}$, $L_{11} = 6800$ cm, $F_s = 0{,}6$ cm, $\mathfrak{d}_{01} = 0{,}36$.
$C_2 = 3{,}60 \cdot 10^{-19}$, $L_{22} = 97100$ cm, $C_3 = 1{,}50 \cdot 10^{-16}$, $L_{33} = 23400$,

$$1^\circ\, C_3^0 = \frac{1}{2064}\, C_3.$$

	a (Fig. 11).			*b* (Fig. 12).	
C_3^0	α	α_{100}	C_3^0	α	α_{100}
84°	24,2	37,7	84°	24,0	37,2
88	33,8	52,7	88	33,1	51,3
92	45,2	70,5	92	45,2	70,1
96	58,2	90,8	96	58,0	89,9
100	64,1	100	100	64,5	100
104	59,0	92,0	104	58,0	89,9
108	48,0	74,8	108	48,0	74,4
112	36,1	56,8	112	36,0	55,8
116	27,0	42,1	116	27,8	43,2

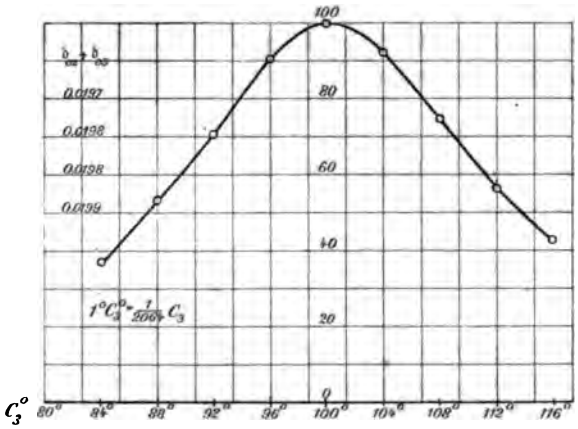


Fig. 11.

Bei der zweiten Versuchsreihe war der Gang des Motors des Turbinenunterbrechers nicht ganz regelmäßig. In der

Fig. 12 ist das darin zu erkennen, daß die Beobachtungswerte auf der rechten Seite der Figur nicht so gut in die Kurve hineinpassen wie sonst.[1]) Der aus der Kurve gewonnene Wert von $b_{02} + b_{03}$ weicht trotzdem nur wenig von

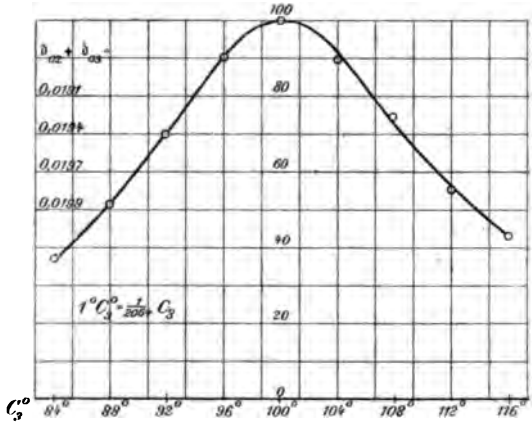


Fig. 12.

dem aus der anderen Beobachtungsreihe gewonnenen Werte ab: 0,01952 gegen 0,01980. Der Mittelwert beider 0,01966 dürfte als auf 1 Proz. sicher anzusehen sein.

§ 28. Im Sekundärkreis wird als Zusatzwiderstand $W_z = 4{,}15$ Ohm eingeschaltet.

Tabelle 14. $W_z = 4{,}15$ Ohm.

Die Versuchsbedingungen wie bei der vorigen Messung.

	a (Fig. 13).			*b* (Fig. 14).	
C_2^0	α	α_{100}	C_2^0	α	α_{100}
70°	20,8	42,8	70°	20,1	41,9
75	25,7	52,9	75	25,3	52,7
80	31,5	64,8	80	31,0	64,6
85	37,2	76,5	85	36,9	76,9
90	42,9	88,3	90	42,2	87,9
100	48,6	100	100	48,0	100

1) Da beim Anpassen der Kurve an die Beobachtungspunkte subjektive Einflüsse sich nicht ganz vermeiden lassen, habe ich dies durch einen geschickten technischen Zeichner ausführen lassen, dem die Bedeutung der Kurven nicht bekannt war.

Tabelle 14 (Fortsetzung).

C_3^0	α	α_{100}	C_3^0	α	α_{100}
110°	44,0	90,6	110°	43,1	89,8
115	39,5	81,3	115	39,0	81,3
120	34,5	71,0	120	34,2	71,3
125	30,0	61,7	125	30,2	62,9
130	26,2	53,9	130	25,9	54,0
135	23,0	47,3	135	22,9	47,6

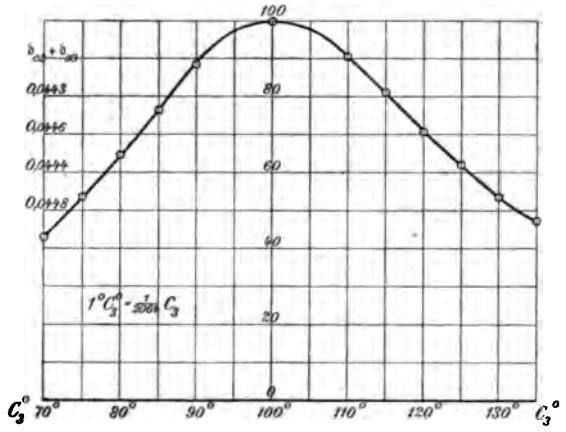


Fig. 13.

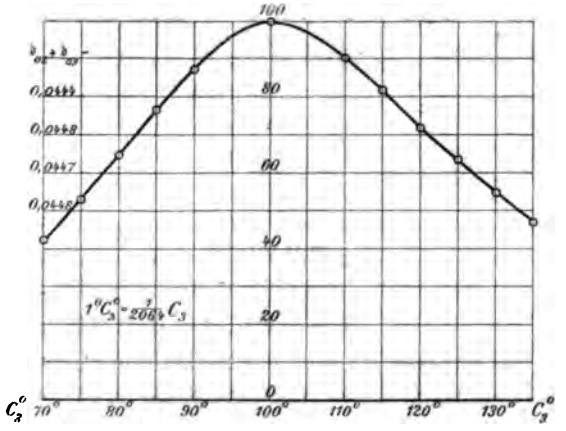


Fig. 14.

Die Kurven verlaufen diesmal beide durchaus regelmäßig. Sowohl die Abweichungen der aus den einzelnen Teilen einer

Resonanzkurve gewonnenen Werte von dem Mittelwert dieser Kurve, als auch die der Mittelwerte der beiden Kurven 0,04452 und 0,04468 liegen unter $^1/_2$ Proz.[1]) Resultat der Messung: $\mathfrak{d}_{02} + \mathfrak{d}_{03} = 0{,}04460$.

Die durch die Hinzufügung von $W_z = 4{,}15$ Ohm nach der Theorie zu erwartende Vermehrung des Dekrementes beträgt:

$$W_z \cdot \pi \sqrt{\frac{C_2}{L_{22}}} = 4{,}15 \cdot 10^9 \cdot \pi \sqrt{\frac{3{,}60 \cdot 10^{-19}}{97100}} = 0{,}02509,$$

ergibt also mit dem Dekrement des Schwingungskreises ohne W_z 0,02509 + 0,01966 = 0,04475. Ein Wert, der mit dem beobachteten Werte von 0,04460 gut übereinstimmt. Dabei ist zu bemerken, daß in die Berechnung die immerhin etwas unsicheren absoluten Werte der Selbstinduktion und Kapazität für schnelle Schwingungen eingehen.

§ 29. Will man $\mathfrak{d}_{02}$ ohne $\mathfrak{d}_{03}$ erhalten, so muß man $\mathfrak{d}_{02}$ durch Einfügung eines bekannten Widerstandes (w_γ) in den Meßkreis für sich bestimmen (vgl. p. 635). Ist γ die durch diesen Widerstand bewirkte Vermehrung des Dekrementes, so ist:

$$\mathfrak{d}_{03} = \frac{1 + \gamma/\mathfrak{d}_{02} + \mathfrak{d}_{02}}{\alpha/\alpha_\gamma - (1 + \gamma/\mathfrak{d}_{02} + \mathfrak{d}_{02})},$$

worin α und α_γ die Galvanometerausschläge ohne und mit w_γ sind.

Bei den eben beschriebenen Versuchen erhielt ich für

$w_\gamma = 0{,}286$ Ohm $(\gamma = 0{,}00720)$, $\alpha = 65{,}0$, $\alpha_1 = 24{,}1$.

Hieraus

$$\mathfrak{d}_{03} = 0{,}00737$$

und für

$w_\gamma = 0{,}174$ Ohm $(\gamma = 0{,}0044)$, $\alpha = 63{,}5$, $\alpha_1 = 32{,}7$.

Hieraus

$$\mathfrak{d}_{03} = 0{,}00743.$$

Demnach das Dekrement des sekundären Systems allein:

$$\mathfrak{d}_{02} = 0{,}01966 - 0{,}00740 = 0{,}01226.$$

§ 30. Bei anderen Formen der Selbstinduktionsrollen kann man noch wesentlich kleinere Dekremente erzielen; z. B. erhielt ich bei einer kurzen weiten Rolle aus 5 × 5 mm Cu-Draht

1) Gewisse kleine Unsymmetrien, die hier uns auch sonst besonders in den unteren Teilen der Resonanzkurven merklich sind, bedürfen noch der Aufklärung; auf die Meßresultate scheinen sie ohne Einfluß zu sein.

$\delta_{02} = 0{,}006$. Da die Stoßerregung, wie oben auseinandergesetzt wurde, um so besser funktioniert, je kleiner die Dämpfung des Sekundärsystems ist, so liegt in der Erregung kein Hindernis, *elektrische Schwingungen von beliebig kleinem Dekrement zu erzeugen.* Es kommt nur darauf an, wie weit es gelingt, durch geeignete Konstruktion der Selbstinduktionsspulen und Kondensatoren das Dekrement des Sekundärkreises selbst herunter zu drücken.

§ 31. Ich glaube hiermit den Nachweis erbracht zu haben, daß sich mit in der beschriebenen Weise durch Stoßerregung erzeugten Schwingungen recht genaue Messungen auch sehr kleiner Dekremente ausführen lassen. Da der störende Funke eliminiert ist, so lassen sich die übrigen Dämpfungsursachen (effektiver Widerstand, Energieverlust im Dielektrikum, Strahlung usw.) sehr viel genauer studieren als bisher. Derartige Untersuchungen sind im hiesigen Institut im Gange.

§ 32. Kürzlich haben Rausch v. Traubenberg und Monasch[1]) eine Methode zur Messung kleiner Dekremente mit Hilfe *ungedämpfter* Schwingungen beschrieben.[1]) Diese Methode ist naturgemäß im Prinzip einfacher und zweifellos sehr geeignet, um schnell einen Näherungswert für das Dekrement zu erhalten. Für exakte Messungen liegt jedoch eine große Schwierigkeit in den Schwankungen der Periode des Poulsengenerators. Es ist mir wohl bekannt, daß diese Schwankungen, die sich ja anfangs sehr unangenehm bemerkbar machten, bei den Neukonstruktionen des Generators durch Hrn. v. Traubenberg viel geringer sind, ob aber eine für genaue Messung kleiner Dekremente genügende Konstanz schon erreicht ist, ja überhaupt erreichbar ist, erscheint mir zweifelhaft. Die angeführten Resonanzkurven geben dafür keinen sicheren Anhalt, weil sie zu steil gezeichnet sind[2]), und das ihnen zugrunde liegende Beobachtungsmaterial nicht zahlenmäßig angeführt ist. Es wird gesagt, daß die Schwankungen

1) Rausch v. Traubenberg u. B. Monasch, Physik. Zeitschr. 8. p. 925. 1907.

2) Um Abweichungen von der Kurvenform am deutlichsten erkennbar zu machen, müssen die Resonanzkurven so gezeichnet werden, daß die wichtigsten Teile derselben ($y = 50$ bis 80) etwa unter 45° zur Abszissenachse geneigt sind.

der Periode weniger als $\pm 0{,}1$ Proz. betragen hätten. In einer neueren Arbeit[1]) gibt Hr. v. Traubenberg als Grenze 0,035 Proz. an.

In der folgenden Tabelle ist berechnet, welchen Einfluß kleine Schwankungen ($\pm \varepsilon$) der Periode auf den Stromeffekt im Meßkreis haben, wenn das zu messende Dekrement $\mathfrak{d} = 0{,}01$ ist. Die Ordinate der Resonanzkurve ist bei ungedämpften Schwingungen einfach

$$y = \frac{100}{1 + \frac{4\pi^2 x^2}{\mathfrak{d}^2}}.$$

Der für die Berechnung des Dekrementes wichtigste Teil der Resonanzkurve liegt bei $y = 50$ bis 80. Für $x = 0{,}001$ wird bei $\mathfrak{d} = 0{,}01$ $y = 71{,}7$. Statt 71,7 erhalten wir dafür bei Schwankungen der Schwingungszahl um $\pm \varepsilon$ die Werte:

$\varepsilon =$	$+0{,}10\,\%$	$-0{,}10\,\%$	$+0{,}035\,\%$	$-0{,}035\,\%$
$y =$	38,5	100	58,1	85,5
$\varepsilon =$	$+0{,}01\,\%$	$-0{,}01\,\%$	$+0{,}001\,\%$	$-0{,}001\,\%$
$y =$	67,5	75,7	71,3	72,1

Wenn das zu messende Dekrement $= 0{,}005$ ist, so werden die Differenzen bei gleichem ε noch viermal so groß. Also erst bei Schwankungen der Schwingungszahl, die kleiner sind als $\pm 0{,}001$ Proz., wird bei der Messung kleiner Dekremente eine Konstanz des Ausschlags von 1—2 Proz. erreicht. Inwieweit die Schwankungen der Periode die Messung beeinflussen, hängt natürlich ganz davon ab, wie oft und in welcher Art sie eintreten; ob die Wechselzahl um einen Mittelwert hin und her pendelt, oder ob sie sich kontinuierlich ändert, oder sprungweise für längere Zeit einen anderen Wert annimmt. Jedenfalls liegt darin eine erhebliche Schwierigkeit für präzise Messungen, die eingehender Untersuchung bedarf. Auf der anderen Seite ist die Konstanz der Periode ein nicht zu unterschätzender Vorzug der Funkenerregung.

§ 33. Ob die beschriebene Art der Stoßerregung auch zur Erzeugung starker elektrischer Schwingungen mit geringer

1) Rausch v. Traubenberg, Jahrbuch f. Telegraphie ohne Draht 2. p. 307. 1908.

Dämpfung, also für Zwecke der drahtlosen Telegraphie geeignet ist, hängt im wesentlichen davon ab, wieviel Energie sich von dem primären auf das sekundäre System übertragen läßt, ohne daß die Dämpfung der Schwingungen in letzterem infolge der Koppelung erheblich größer wird. Hierüber soll im nächsten Abschnitt dieser Arbeit berichtet werden.

Resultate des Abschnittes II.

§ 34. Um den störenden Funken bei Dämpfungsmessungen zu eliminieren, wurden die in einem Primärkreis durch eine Funkenstrecke erregten Schwingungen durch magnetische Koppelung auf einen geschlossenen Sekundärkreis übertragen (*Stoßerregung*). Der Theorie nach wird dabei die Resonanzkurve des Sekundärsystems nicht mehr merklich von dem Primärsystem beeinflußt, wenn $\pi^2 k^2/\mathfrak{d}_{01} - \mathfrak{d}_{02}$ neben $\mathfrak{d}_{02}$ verschwindet ($\mathfrak{d}_{01}$, $\mathfrak{d}_{02}$ Dekremente der beiden Kreise, k Koppelungskoeffizient). Bei den Versuchen wurde daher zunächst k sehr klein, $\mathfrak{d}_{01}$ groß gemacht (§§ 19 und 20).

Es zeigte sich jedoch, daß entgegen der Theorie die Koppelung verhältnismäßig sehr eng gemacht werden kann, ohne daß die Resonanzkurve sich ändert, wenn nur die Dämpfung des Sekundärkreises klein ist gegen die des Primärkreises. Der Grund dieser Abweichung von der Theorie ist in dem schnellen Anwachsen des Funkenwiderstandes während der Entladung zu suchen. Wegen der engen Koppelung kann so verhältnismäßig viel Energie auf das Sekundärsystem übertragen und starke wenig gedämpfte Schwingungen erzeugt werden (§§ 21—25).

Die Messung des Dekrementes ist bei diesen Schwingungen eine recht präzise, da im Sekundärsystem der störende Funke fortfällt, und im Primärsystem die günstigste Funkenstrecke, Kondensatorgröße usw. beliebig ausgewählt werden kann, bei der alles am regelmäßigsten funktioniert. Es gelang, Dekremente von der Größenordnung 0,01 mit Sicherheit auf 1 Proz. zu messen (§§ 26—31).

Danzig-Langfuhr, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule,
28. Januar 1908.

(Eingegangen 30. Januar 1908.)

2. *Magnetische Atomfelder und Serienspektren; von W. Ritz.*

Bekanntlich beziehen sich alle bis jetzt in den Linienspektren gefundenen, einfachen Gesetze — wie die Balmersche Formel, das Gesetz der konstanten Differenzen usw. — auf die Schwingungszahlen, und nicht auf deren Quadrate. Es liegt hierin für die Erklärung dieser Spektren eine besondere Schwierigkeit, auf die Lord Rayleigh[1]) aufmerksam gemacht hat: wenn ein mechanisches oder akustisches System kleine Schwingungen ausführt, so daß die Zeit nur in der Form eines Faktors $\sin \nu (t - t_0)$ in die Lösung eingeht, so wird durch Bildung der Akzeleration, d. h. durch zweimalige Differentiation nach t, der Faktor ν^2 eingeführt; die Gleichung, welche die Schwingungszahl ν bestimmt, wird also das Quadrat von ν enthalten, und es gelingt nur in Ausnahmefällen, die Schwingungszahlen selbst einfach auszudrücken.[2]) Lord Rayleigh schließt hieraus, daß es sich bei den Spektren vielleicht um rein kinematische Beziehungen handle, in welche die Akzeleration nicht eingehe. Wie man sich diese zu denken hätte, und in welcher Weise man diese Annahme mit der Theorie der Dispersion, des Zeemaneffektes usw., bei welchen die Trägheitsreaktion eine wesentliche Rolle spielt, in Einklang bringen könnte, ist allerdings kaum einzusehen. Der Schluß, daß zwischen den für den Zustand maßgebenden Größen nur Differentialgleichungen erster Ordnung in bezug auf die Zeit bestehen, läßt sich aber in anderer Weise aufrecht erhalten: man hat nur anzunehmen, daß jene Größen *Geschwindigkeiten*

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) **44**. p. 356. 1897.

2) Verfasser hat einige solche, den Spektralgesetzen entsprechende Fälle untersucht (Inaug.-Diss. Göttingen 1903; Ann. d. Phys. **12**. p. 264. 1903). Die Komplikation der hierbei nötigen Annahmen, für die sich eine befriedigende physikalische Deutung nicht hat finden lassen, nötigt wohl, die dort gegebene Theorie fallen zu lassen, und ist eher geeignet, Lord Rayleighs Schlußweise zu stützen; vgl. Lord Rayleigh, Phil. Mag. (6) **11**. p. 123. 1906.

sind, oder anders ausgedrückt, daß die wirkenden Kräfte nicht, wie gewöhnlich, von der *Lage* der Teile des Systems, sondern von deren Geschwindigkeiten abhängen. Dies ist bei *magnetischen Kräften* allgemein der Fall, und die Annahme intensiver magnetischer Atomfelder dürfte, auf Grund der im Gebiet des Magnetismus vorliegenden Tatsachen, kaum zu umgehen sein.[1]) Durch diese Überlegung wird also die Hypothese nahe gelegt, daß *die Schwingungen der Serienspektren durch rein magnetische Kräfte erzeugt werden,* und es soll im folgenden gezeigt werden, daß diese Annahme in einfacher Weise zum Verständnis der Gesetze der Serienspektren *und der anormalen Zeemaneffekte* führt.

Es sei e die Ladung, m die Masse eines elektrischen Teilchens; befindet sich dasselbe in einem magnetischen Feld H parallel zur Z-Achse, so ist

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{eH}{c}\frac{dy}{dt}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{eH}{c}\frac{dx}{dt}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

$$x = A\sin\frac{eH}{mc}(t-t_0), \quad y = A\cos\frac{eH}{mc}(t-t_0), \quad z = z_0 + Bt,$$

wo A, B, z_0, t_0 willkürliche Konstanten bedeuten. Die Bewegung ist also, wie bekannt, helikoidal; sie zerfällt in eine gleichförmige Translation parallel H, und eine zirkulare Schwingung in einer Ebene senkrecht zu H, deren Schwingungszahl proportional ist H. Ist das Feld nicht homogen, so muß dafür gesorgt werden, daß $x, y, z-z_0$ sehr klein bleiben. Dies wird der Fall sein, wenn A klein ist, und die elektrische Ladung an eine Ebene (oder ein Flächenelement) senkrecht zu H gebunden ist; oder auch wenn quasielastische Kräfte der Form $-k^2x$, $-k^2y$, $-k^2z$, die sehr klein gegen $\frac{eH}{c}\frac{dx}{dt}$, $\frac{eH}{c}\frac{dy}{dt}$ sind, eingeführt werden, und schwache Erregung vorausgesetzt wird. Ist für die in Betracht kommende Bewegung das Feld nur unvollkommen homogen, so resultiert eine Verbreiterung der der Schwingungszahl $\nu = eH/mc$ entsprechenden Spektrallinie.

Die nächstliegendste Annahme, die man über den Ursprung des Feldes H machen kann, ist wohl, es einem Molekularmagneten zuzuschreiben: diese Gebilde spielen ja in der Theorie

1) Vgl. insbesondere P. Weiss, L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique, Bull. Soc. Franc. de Physique 1907; Compt. rend. **143.** p. 1136. 1906; **145.** 1907. 9 et 30 décembre.

des Magnetismus eine wesentliche Rolle. Sei $\pm\mu$ die Polstärke, l die Länge des Magneten; der Symmetrie halber liege die Ladung e auf der Verlängerung desselben, im Abstand r vom nächsten Pol. Dann ist

$$\pm H = \mu\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+l)^2}\right],$$

mithin die Schwingungszahl

$$\pm \nu = \frac{\mu e}{m c}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+l)^2}\right]. \tag{1}$$

Vergleicht man diese Formel mit der Balmerschen (N = univers. Konstante)

$$\nu = N\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right],\quad n = 3,\ 4,\ 5\ldots, \tag{2}$$

mit der Rydbergschen Serienformel

$$\nu = N\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(n+b)^2}\right], \tag{3}$$

und den von mir (l. c.) gegebenen

$$\nu = N\left\{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{[n+\alpha+\beta(A-\nu)]^2}\right\}, \tag{4}$$

$A = N/a^2$ = Grenze der Schwingungszahlen

und

$$\nu = N\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\left(n+\alpha+\frac{b}{n^2}\right)^2}\right], \tag{5}$$

so springt die Analogie sofort ins Auge, und ist um so bemerkenswerter, als die Gesetze der Spektralschwingungen ja so gänzlich von allem sonst Bekannten abweichen. Verfolgt man also genauer den hiermit möglich gemachten Schluß von den Serienspektren auf die Elementarmagnete, so wird man mit einigem Grund hoffen können, dadurch einen Einblick in Molekularkräfte und -struktur zu gewinnen. Allerdings kann die Zukunft erst entscheiden, ob das Bild ein allseitig zweckmäßiges ist.

Die Balmersche Formel sagt nun aus, daß die Länge l des Magneten ein Vielfaches einer bestimmten Länge sei, d. h. daß man jedes, den Linien des Wasserstoffs entsprechende Magnetfeld dadurch erhält, daß man eine Anzahl n untereinander identischer Magnete von der Länge s Pol an Pol fügt, so daß $l = ns$ ist. Eine einfachere Anordnung der

Elementarmagnete als die hiermit geforderte ist wohl kaum denkbar. Der Abstand r bleibt hierbei konstant; setzt man ihn gleich as, so folgt

$$(6) \qquad \nu = \frac{\mu e}{s^2 m c}\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+n)^2}\right], \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Die Schwingungszahlen nähern sich also einer Grenze für $n=\infty$, und bei der Entwickelung nach Potenzen von $1/n$ ist der Koeffizient von $1/n^2$ universell, falls die Elementarmagnete und e/mc bei allen Elementen dieselben sind.

Daß der Koeffizient von $1/n^2$ universell sei, ist von Rydberg ausgesprochen worden; der Beweis dafür war erst auf Grund der sich der Erfahrung sehr genau anschließenden Formeln (4) und (5) möglich (vgl. Inaug.-Diss. des Verf. l. c.).

Die Hypothese der magnetischen Atomfelder führt also ohne Schwierigkeit zur Erklärung der Grenze der Schwingungszahlen, welche bekanntlich die Serienschwingungen so scharf gegen alle aus anderen Gebieten der Physik bekannte Schwingungen abscheidet. In der Nähe der Grenze rührt das Feld nur noch vom ersten Pole her.

Soll endlich (6) mit der Balmerschen Formel (2) identisch werden, so hat man den noch willkürlichen Abstand as der Ladung e zum nächsten Pol gleich der doppelten Länge eines Elementarmagneten zu nehmen, also $a=2$ zu setzen.[1]) Diese einfache Beziehung besteht jedoch nur bei Wasserstoff, und deutet auf einen besonders einfachen Aufbau des Wasserstoffatoms aus denselben Korpuskeln, die die Elementarmagnete bilden.

Die große Genauigkeit der Balmerschen Formel erfordert, daß das Coulombsche Gesetz des reziproken Quadrates der Entfernung auch in Molekularentfernungen noch strengste Gültigkeit habe.

Superponiert sich zu diesem von n abhängigen Magnetfeld H_n ein anderes H, so ergibt sich eine neue Reihe von Linien. Ist c an ein Flächenelement senkrecht zu H_n gebunden, wie oben angenommen wurde, so sind die ν_n derselben gegen die vorigen um die konstante Größe $(e/mc)\,H\cos(\sphericalangle H H_n)$ verschoben. Liegen dagegen schwache elastische Reaktionen vor, so gilt dies nur, falls H parallel H_n ist. Es ist daher

1) Über diese Zahl 2 vgl. unten p. 667.

nach diesen Vorstellungen zu erwarten, daß *Systeme konstanter Schwingungsdifferenzen besonders häufig angetroffen werden*: dies entspricht dem Gesetz der konstanten Differenzen, welches bekanntlich auch bei Spektren gilt, in welchen Serien bis jetzt nicht gefunden worden sind.

Gibt man dem ersten Elementarmagneten eine von s abweichende Länge $s + \varepsilon s$ und variiert in geeigneter Weise die Entfernung $r = as$, so resultiert die allgemeine Rydbergsche Serienformel (3), wobei $n = 1, 2, 3 \ldots$ und $b = a + \varepsilon$.

Läßt man die Entfernung von der elektrischen Ladung zum ersten Pol unverändert, und variiert die Länge des ersten Magneten, so erhält man eine neue Serie von Linien, die mit der ersten eine gemeinsame Grenze haben. Dies ist bekanntlich der Fall bei den beiden Nebenserien, und bei den Dubletts oder Tripletts der Hauptserien.

Die Anzahl der Magnete muß natürlich $\geqq 1$ sein. Legt man der willkürlichen Zahl n der Rydbergschen Formel eine absteigende Reihe von Werten n, $n-1, \ldots$ bei, und erhält man bei n_1 einen *negativen* Wert der Schwingungszahl, *so wird diesem Wert keine Linie der Serie entsprechen.* Aber selbst bei einem positiven Werte kann, falls $\varepsilon > 0$ ist, die Zahl der Magnete Null sein, so daß an der berechneten Stelle keine Linie liegt. Damit ist ein sehr merkwürdiges Resultat der neueren Beobachtungen erklärt: die Linien der ersten Nebenserie, welche der Linie $n = 2$ der Balmerschen Formel entsprechen (für welche sich $\nu = 0$ ergibt), fallen bei den Elementen He, Cd, Zn, Hg, Tl in das bis jetzt durchforschte Gebiet, und können auf Grund der Formel (4) genau berechnet werden. Statt in dieser Gegend der Spektren Linien von besonderer Intensität zu finden, wie zu erwarten war, haben Runge und Paschen bei He[1]), Hermann[2]) bei Cd, Zn, Hg, Kayser und Runge bei Tl überhaupt keine Linien wahrgenommen. Besonders auffallend ist das Beispiel von Tl, für welches die Linie sehr genau berechnet werden kann ((4) reduziert sich hier auf (3) sehr annähernd) zu $\lambda = 5417{,}0$. Sie sollte also in der Nähe der grünen Thalliumlinie 5351

1) C. Runge u. F. Paschen, Astrophys. Journ. p. 16. Jan. 1896.
2) H. Hermann, Inaug.-Diss. Tübingen 1904.

liegen, welche der zweiten Nebenserie angehört, und sie bei Anwendung des elektrischen Bogens an Intensität übertreffen. Aber selbst wenn diese blendend auftrat, konnte Verfasser keine Spur der gesuchten Linie wahrnehmen. Die Hypothese einer ungewöhnlich vollständigen Selbstumkehr der Linie (wofür Beispiele vorliegen) wurde dadurch geprüft, daß hinter den Bogen oder die Flamme eine Nernstlampe gestellt wurde; auf diesem kontinuierlichen Hintergrund hätte sich nun die Linie dunkel abheben müssen, was nicht der Fall war.

Gehen wir zur Interpretation der die Beobachtungen in den meisten Fällen sehr genau darstellenden Formel (4) über, so besagt dieselbe, daß bei anderen Elementen als Wasserstoff nicht nur der Abstand der schwingenden Ladung e zum nächsten Pol von Serie zu Serie variieren kann, sondern daß auch der Abstand des zweiten Poles von e (und vom ersten) kein einfach additives Gesetz befolgt. Die Abweichung nimmt jedoch ab, wenn der Abstand von e (die Zahl n) zunimmt; sie ist proportional $A - \nu$, d. h. dem reziproken Quadrat der Entfernung von e. Diese Wechselwirkung zwischen Atom und Pol, die besonders bei höheren Atomgewichten sich fühlbar macht, muß aber ihrer Form nach als unsicher gelten, ja selbst der Schluß, daß das Feld *stets* von *einem Linearmagneten* und nur einem herrühre, kann aus der Erfahrung nicht mit Sicherheit gezogen werden, da (4) mancherlei Transformationen und Entwickelungen zuläßt, so z. B. die Reihenentwickelungen

$$\nu = A - \frac{N}{n^2} + \frac{B}{n^3} + \frac{C}{n^4} + \ldots, \tag{7}$$

$$\nu = A - \frac{N}{(n+\alpha)^2} + \frac{C}{(n+\alpha)^4} + \ldots, \tag{8}$$

aus welchen man schließen würde, daß unter der Einwirkung des Atoms die Verteilung des Magnetismus eine andere geworden ist. Die Serie (7) unterscheidet sich von den Formeln von Kayser und Runge, Runge und Paschen dadurch, daß der zweite Koeffizient nicht veränderlich, sondern universell ist. Bei gleicher Zahl willkürlicher Konstanten ist diese Formel den eben genannten entschieden überlegen; zu einer ersten Berechnung einer Serie ist sie andererseits viel geeigneter als (4): für die Grenze A ergibt sich überdies fast

derselbe Wert wie aus (4). Für die definitive Darstellung und die Extrapolation ist letztere Formel allerdings vorzuziehen. Dieselbe besitzt auch (wie (8)) den Vorzug, daß der niederste Wert der Ordnungszahl, für den noch eine Linie zu erwarten ist, und der durch die Analogie der Spektren zwar häufig, aber nicht immer a priori festgestellt werden kann, nicht bestimmt zu werden braucht: Erhöhung von n um eine Einheit kann durch Verkleinerung von α aufgehoben werden.

Es wird unten gezeigt werden, daß Längenänderungen der Elementarmagnete durchaus nicht mit Längenänderungen der Korpuskeln verbunden zu sein brauchen, für die sie das abgekürzte Symbol bilden. Auch läßt sich, durch Einführung zweier Magnete an Stelle des einen, das einfache additive Gesetz der Verbindung der Magnete aufrecht erhalten. Solange aber neue numerische Beziehungen sich aus solchen Spekulationen nicht ergeben, scheint es mir richtiger, mich auf die Betrachtung des allgemeinen Charakters der Seriengesetze zu beschränken.

Bei Wasserstoff war der Abstand auch des ersten Poles von e durch dieselben Korpuskeln bestimmt, wie der des zweiten, und es ist daher plausibel, daß die Lage des ersten Poles durch eine ähnlich gebaute Formel sich darstellen läßt als Funktion der Anzahl dieser Korpuskeln, wie die Lage des zweiten Poles, d. h. daß die Atomkräfte auf beide einen ähnlichen Einfluß haben. Damit erhalten wir die Interpretation des Satzes von Rydberg, daß Hauptserie und zweite Nebenserie durch die zwei Formeln gegeben seien:

$$\nu = N\left[\frac{1}{(1+\alpha)^2} - \frac{1}{(n+\beta)^2}\right] \text{ (Hauptserie)},$$

$$\nu = N\left[\frac{1}{(1+\beta)^2} - \frac{1}{(n+\alpha)^2}\right] \text{ (2. Nebenserie)}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

und die Richtigkeit der damit ausgesprochenen Beziehungen zwischen den zwei Serien hat sich auf Grund der genaueren Formeln bestätigt.[1]) Ob aber in diesen Formeln statt 1 auch eine willkürliche ganze Zahl m gesetzt werden darf, wie Rydberg annimmt, so daß noch eine unbegrenzte Reihe neuer

1) Vgl. Inaug.-Diss. des Verf., l. c.

Serien im Infrarot zu erwarten wäre, ist bisher unentschieden; die Zahl 2 der Balmerschen Formel kann ebensogut durch den Bau des Atoms aus den besprochenen Korpuskeln bedingt sein, wie sie auch als Spezialfall einer willkürlichen ganzen Zahl aufgefaßt werden kann: denn für 3, 4, 5 . . . an Stelle von 2 erhält man voraussichtlich wesentlich schwächere Linien, die im Infrarot liegen, während für 1 sich Schuhmannsche Strahlen ergeben. Allerdings entspricht der Formel

$$\nu = N\left[1 - \frac{1}{2^2}\right]$$

eine der intensivsten Linien des von Lyman[1]) neuerdings ausgemessenen, extrem-ultravioletten Wasserstoffspektrums: $\lambda_{ber.} = 1215{,}3$; $\lambda_{beob.} = 1216{,}0$ (in der vorläufigen Mitteilung $\lambda = 1215{,}6$). Die nächste Linie der Serie $\lambda = 1025{,}7$ liegt an der Grenze des beobachteten Bereichs; die letzte von Lyman wahrgenommene Linie ist 1033, so daß 1025, wenn überhaupt vorhanden, nicht intensiv sein kann. Die Zuordnung bleibt daher unsicher. Ebensowenig verlangt die vorgetragene Theorie, daß jeder Nebenserie eine Hauptserie entspreche.

Es entsteht nun die Frage, ob sich dieses Schema der Linearmagnete nicht etwa in Widerspruch befindet zur Elektronentheorie, welche den Magnetismus aus der Bewegung der Elektronen abzuleiten sucht, und von der Hypothese magnetischer Massen absieht. Hierbei kommen vor allem in Betracht zirkulierende Bewegungen der elektrischen Ladungen, insbesondere innerhalb des Atoms und gleichförmige Drehung elektrischer Rotationskörper um ihre Achse.[2])

Was zunächst die ersteren betrifft, so ist nicht anzunehmen, daß sie merkliche Kräfte auf das schwingende Elektron ausüben. Denn — und hierauf hat Lord Rayleigh[3]) aufmerksam gemacht — die Feinheit mancher Spektrallinien ist eine so große, daß sie eine außerordentliche Stabilität des

1) Th. Lyman, Astrophys. Journ. **19.** p. 263. 1904; **23.** p. 181. 1906.

2) W. Voigt, Ann. d. Phys. **9.** p. 115. 1902.

3) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (6) **11.** p. 123. 1906; vgl. auch Jeans, Phil. Mag. (6) **2.** p. 421; **11.** p. 604.

Systems und eine Unveränderlichkeit der wirkenden Kräfte unter allen möglichen Bedingungen verlangt, die mit zirkulierenden Bewegungen der Elektronen schwer vereinbar erscheinen. Nimmt man etwa kreisförmige Bewegungen an, so müßten Radius, relative Lage der Bahn und Geschwindigkeit bei allen Atomen eines Elementes auf mindestens $^1/_{1000}$ ihres Betrages (bei sehr feinen Linien) dieselben sein und dauernd bleiben, und dabei die Zahl der Teilchen genügend groß sein, um den Linienreichtum mancher Spektren zu erklären. Man wird solchen Bewegungen wohl eher nur einen schwachen perturbierenden, die Linie mehr oder weniger verbreiternden Einfluß zuschreiben.

Leichter verständlich ist eine sehr angenäherte relative Unveränderlichkeit der Drehgeschwindigkeit von Rotationskörpern, wenn diese als sehr groß vorausgesetzt wird: diese Drehung bedingt überdies, im Gegensatz zu der zirkulierenden Bewegung, *keine Ausstrahlung*.

Setzt man Oberflächenladung voraus, so gilt zunächst der Satz, *daß man für jeden um seine Achse sich gleichförmig drehenden Rotationskörper die Elektrizität in der Weise auf der Oberfläche verteilen kann, daß derselbe im ganzen Außenraum einem Linearmagneten äquivalent wird, dessen Pole P_1, P_2 im Innern des Körpers auf dessen Achse eine vorgeschriebene Lage haben*, und daß die magnetische Kraft im Innern des Körpers endlich und stetig bleibt. Denn in diesem Falle existiert im ganzen Raum ein magnetisches Potential Ψ, welches überall der Gleichung $\Delta\Psi = 0$ genügt, und im Außenraum die Form hat

$$\Psi_a(x, y, z) = k\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right],$$

wo r_1, r_2 die Abstände von (x, y, z) zu den im *Innern* des Körpers gegebenen Polen P_1, P_2 sind. Beim Durchgang durch die Fläche ist H unstetig. Durch Integration der Gleichungen

$$\operatorname{curl} H = \frac{4\pi\varrho v}{c}; \quad \operatorname{div} H = 0$$

über ein an der Oberfläche gelegenes, geeignet geformtes Volumelement und Grenzübergang findet man, daß der Sprung von H durch einen in der Fläche senkrecht zur Geschwindigkeit v liegenden Vektor von der Größe $4\pi\sigma v/c$ dargestellt

wird (σ = Oberflächendichte). Derselbe liegt somit in der Meridianebene, und man hat, unter n_a, n_i die äußere und innere Normale verstanden, unter ds ein Linienelement des Meridians:

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial n_i} + \frac{\partial \Psi_a}{\partial n_a} = 0; \quad \frac{\partial \Psi_i}{\partial s} - \frac{\partial \Psi_a}{\partial s} = \frac{4\pi\sigma\nu}{c} = \frac{4\pi\sigma\omega R}{c},$$

wo R der Abstand von der Achse, ω die Drehgeschwindigkeit ist. Aus diesen Bedingungen bestimmt sich Ψ_i bis auf eine additive Konstante. Sei nämlich $\Gamma(x, y, z, a, b, c)$ die zweite Greensche Funktion, welche also in bezug auf x, y, z den Bedingungen

$$\Delta\Gamma = 0, \quad \frac{\partial\Gamma}{\partial n} = -\frac{4\pi}{F}$$

(F = Oberfläche) genügt, und im Punkte (a, b, c) unendlich wird wie

$$-[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{-1/2}.$$

Seien a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 die Koordinaten von P_1 und P_2. Wird

$$\Psi_i = \frac{K}{r_1} - \frac{K}{r_2} + K\Gamma(x,y,z,a_1,b_1,c_1) - K\Gamma(x,y,z,a_2,b_2,c_2) + \text{konst.}$$

gesetzt, so erfüllt diese Funktion die gegebenen Bedingungen und bleibt im Innern stetig und endlich; es gibt also, vom Vorzeichen abgesehen, die Formel

$$(9) \qquad \frac{4\pi\sigma\omega R}{cK} = \frac{\partial\Gamma}{\partial s}(x,y,z,a_1,b_1,c_1) - \frac{\partial\Gamma}{\partial s}(x,y,z,a_2,b_2,c_2)$$

die verlangte Oberflächendichte.

Für die Kugel sei P_1, P_2 als x-Achse gewählt, und der Ursprung der Koordinaten im Mittelpunkt. Dann ist[1]), bis auf eine additive Konstante:

$$\Gamma(x, a_1) = \frac{1}{a}\log[a^2 - a_1 x + a\sqrt{a^2 - 2a_1 x + a_1^2}]$$

$$-\frac{2}{\sqrt{a^2 - 2a_1 x + a_1^2}} = \frac{1}{a}\log[a^2 - 2a_1 x + ar_1] - \frac{2}{r_1}$$

und da $dx/ds = R/a$, so ergibt sich

$$(10) \qquad \frac{4\pi\sigma(x)\omega a}{eK} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{a}\log\frac{a^2 - a_1 x + ar_1}{a^2 - a_2 x + ar_2} - \frac{2}{r_1} + \frac{2}{r_2}\right\}.$$

1) F. Neumann, Potential- und Kugelfunktionen, Leipzig 1887. p. 272; H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik 1. p. 457. Braunschweig 1900.

Die in (7) und (8) gegebenen Formeln würde man durch eine Verteilung der Elektrizität interpretieren können, die von der oben angegebenen mehr oder weniger abweicht. So ist z. B. das Feld eines Zylinders, der durch Juxtaposition von n identischen Zylindern entsteht, durch eine Reihe von der Form (8) gegeben, falls die Dichte σ konstant ist. Entspricht σ aber der Formel (9), so fallen die höheren Glieder der Entwickelung weg, der Zylinder ist einem Linearmagneten streng äquivalent, was vorher nur angenähert der Fall war.

Dabei können die Pole beliebig nahe den Endflächen des Zylinders bzw. den Endpunkten der Achse liegen; es wird dann die Dichte σ an diesen Punkten sehr groß; in bezug auf seine elektrostatische Anziehung verhält sich der Körper nahezu als ob seine Ladung in P_1 und P_2 konzentriert wäre. (Im Grenzfall wird σ unendlich wie die dritte Potenz der reziproken Entfernung von der Achse: dieser Fall ist daher auszuschließen.)

Reiht man eine Anzahl derartiger, untereinander identischer Rotationskörper mit abwechselnd entgegengesetzter Ladung und Rotation und gemeinsamer Achse aneinander, so ergibt sich ein sehr stabiles System, welches einem Magneten von der n fachen Länge der einzelnen Körper beliebig nahe äquivalent ist.

Im Falle der Balmerschen Formel hat man sich an den Endpunkt des so konstruierten Magneten zwei ebensolche Rotationskörper angereiht zu denken, die aber entweder ungeladen sind, oder keine Drehgeschwindigkeit besitzen. Nimmt man das letztere an und berücksichtigt, daß die elektrische Ladung, wie vorausgesetzt, nahezu auf zwei Punktladungen sich reduziert, so kann man beim letzten Körper der Reihe die eine dieser Ladungen mit der früher angenommenen oszillierenden Punktladung e identifizieren, während die andere durch die ihr sehr naheliegende entgegengesetzte Ladung des nächsten Körpers sehr kräftig angezogen wird, und einen festen Drehpunkt für die Oszillationen darstellt.[1]) Voraus-

1) Es hätte dann an Stelle von e/m eine andere Größe zu treten, in der m ein elektromagnetisches Trägheitsmoment, e eine ähnlich gebaute Größe bedeutet. Dies ändert nichts Wesentliches in den Darlegungen.

setzung ist allerdings, daß die übrigen Ladungen des Atoms keine der Verschiebung des Endpunktes aus der Ruhelage proportionale, merkliche Kraft ausüben.

An diese besonders einfache Interpretation der Balmerschen Formel kann man versuchen, eine Hypothese über den, in den meisten Fällen nicht unbedeutenden Unterschied im Charakter der beiden Nebenserien und ihre gegenseitige Beziehung zu knüpfen. Bei Wasserstoff hat bekanntlich Pickering die zweite Nebenserie in den Spektren gewisser Sterne entdeckt, und ihre Gleichung lautet

$$\nu = N\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(n+1/2)^2}\right], \quad n = 2, 3\ldots,$$

so daß man die Balmersche Serie als den geraden, die Pickeringsche als den ungeraden Ordnungszahlen einer einzigen Serie entsprechend betrachten kann. Man wird es nun als plausibel betrachten dürfen, daß in unserem Modell, wo negative und positive Ladungen abwechseln, die geraden und die ungeraden Ordnungszahlen in der Tat einen verschiedenen physikalischen Charakter der Linien bedingen können, und daß die Abtrennung zweier Körper, die dann ein neutrales System bilden, andere Energieformen erfordert als die eines einzigen Körpers. Besitzt das Atom eine negative Ladung, und hat z. B. unser System bei der Ordnungszahl n ebenfalls eine resultierende negative Ladung, so wird bei den Ordnungszahlen $n+1$, $n-1$, die Gesamtladung des Atoms kleiner sein oder sogar ihr Vorzeichen ändern. Bei höheren Atomgewichten können, wie oben gezeigt wurde, die übrigen im Atom anwesenden Ladungen die Verteilung der Elektrizität auf unserer Reihe von Rotationskörpern modifizieren. Veränderung des Vorzeichens der Gesamtladung derselben wird daher von Einfluß sein, so daß für gerade und ungerade n, d. h. für erste und zweite Nebenserie, die Abweichung von der Wasserstoffformel verschieden sein können. Bei den Alkalien ist, ganz im Sinne dieser Darlegung, das Vorzeichen dieser Abweichung bei den beiden Nebenserien ein entgegengesetztes.

Ich habe nicht geglaubt, diese Betrachtungen unterdrücken zu müssen, so sehr sie auch unsicher sind. In einem Gebiet, in welchem alle Ansätze fehlen, können auch solche Analogien von Wert sein.

Es sei noch bemerkt, daß man aus bekannten Sätze leicht ableitet, daß, wenn die Ladung einer Kugel aus hom genen, konzentrischen Schichten besteht, und sie unter de Einfluß irgend eines stationären, inhomogenen Magnetfeld Translationsschwingungen ausführt (bei welchen die Geschwi digkeit in allen Punkten der Kugel dieselbe ist), die *Bewegu so vor sich geht, als ob die gesamte Ladung der Kugel in ihre Mittelpunkt konzentriert wäre.*

Prinzipiell wenigstens dürfte also vom Standpunkt d Elektronentheorie gegen die gemachten Annahmen nicht vi einzuwenden sein. Allerdings ist die geforderte Verteilung d Elektrizität keine einfache. Ob sich aber bei den Molekula wirkungen die einfachen Gesetze auf die elektrische Dich beziehen, oder auf die wirkenden Kräfte, ist uns a prio gänzlich unbekannt. Letztere erscheinen hier, der Riemani schen Auffassung der Funktionentheorie entsprechend, in ei fachster Weise durch ihre Singularitäten (die Pole der Magnet definiert: auf die Form der Funktion in deren Nähe, und a die räumliche Anordnung derselben beziehen sich die einfache Gesetze, die übrigens, soweit ihre Abhängigkeit von Rau und Zeit in Betracht kommt, ja vollständig mit bekannte Gesetzen übereinstimmen. Und, da eine vollständige Theor der Linienspektra ohne ganz spezielle Annahmen über de Bau der Atome nicht möglich scheint, dürfte es wohl vo erkenntnistheoretischen Standpunkt ein Vorzug eher als ei Nachteil dieser Hypothese sein, daß sie über die *Gestalt* d Elemente, aus denen die Atome aufgebaut gedacht werde keine Annahme zu machen braucht, sondern nur mit als sta gedachten Strecken oder Entfernungen operiert. Im übrige wird man bei einer Frage dieser Art, bei welcher ein zwinge der Schluß von der Wirkung auf die Ursache kaum möglic scheint, und einerseits die beobachteten Tatsachen prinzipie so sehr von allen bekannten Erscheinungen abweichen, un so kompliziert sind, andererseits über die vorauszusetzende Grundlagen so große Unsicherheit herrscht, wohl kaum e warten dürfen, daß ein *in jeder Beziehung* befriedigender A schluß an unsere gewohnten Vorstellungskreise möglich sei - ja, es dürfte schwer fallen, über das, was in diesem Falle a „befriedigende Erklärung" zu betrachten sei, sich zu einige

Über den allgemeinen Charakter einer etwa noch zu findenden exakten Serienformel ist noch folgende Bemerkung zu machen. Die Berechnung vieler Spektren läßt kleine Unstetigkeiten im Verlauf der Serienkurve erkennen, die die Beobachtungsfehler überschreiten und zeigen, daß die *allgemeine* exakte Serienformel nicht einfach sein kann. Besonders auffallend und schon von Kayser und Runge hervorgehoben sind die Tl-Linien $\lambda = 2665{,}67$ und 2267,13, die ein Paar der zweiten Nebenserie bilden und dieselbe Differenz der Schwingungszahlen ergeben wie die anderen Paare, und überdies von Exner und Haschek ebenfalls gemessen sind, so daß der Fehler nur einige Hundertstel Ångström betragen kann. Die Formel (4) gibt für die Linien dieser Serie die Fehler[1]) (in A.E.)

$$0{,}00;\ -0{,}12;\ +0{,}14;\ -1{,}14;\ -0{,}02;\ -0{,}03;$$
$$0{,}00;\ +0{,}08;\ -0{,}21;\ -0{,}07;\ -0{,}01;\ +0{,}07;\ -0{,}23.$$

Die Linie 2665 fällt ganz aus der Serie heraus, was besonders auffallend ist, wenn man die Größe

$$\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{A-\nu}} = m + \alpha + \beta(A - \nu)$$

bildet. Die Größe dieses Fehlers ist auch bei Anwendung anderer Formeln ungefähr dieselbe. So berechnen Kayser und Runge die Konstanten ihrer Formel aus den weiteren Linien (ohne Berücksichtigung der vier ersten) und finden die Fehler:

$$-1{,}69;\ +0{,}01;\ +0{,}04;\ +0{,}01;\ +0{,}08;\ -0{,}21;$$
$$-0{,}03;\ +0{,}07;\ +0{,}22;\ -0{,}01.$$

Endlich, wenn man die Konstanten von

$$\lambda = a + b/m^2 + c/m^4$$

(statt $1/\lambda = \ldots$) aus den nächsten Linien berechnet, ergibt sich:

$$0{,}00;\ 0{,}00;\ -1{,}60;\ 0{,}00;\ \ldots$$

Bei 2665 hat also die Serienkurve einen Knick.

Auf Bandenspektren sind diese Theorien nicht anwendbar. Ich möchte mich in dieser Hinsicht auf die Bemerkung beschränken, daß man sie vielleicht geschlossenen Ringen oder

1) Vgl. Inaug.-Diss. des Verf., l. c. p. 299.

Polygonen, aus den betrachteten Elementarmagneten bestehend, zuschreiben könnte, in der Annahme, daß solche Gebilde eine wichtige Rolle im Bau des Atoms spielen, und daß sie durch die lichterregenden elektrischen oder chemischen Vorgänge erst gesprengt werden müssen, bevor ein Serienspektrum zustande kommen kann.

Der hier vorgetragenen Vorstellungsweise kann man den Vorwurf machen, daß sie die willkürliche, in den Serienformeln auftretende ganze Zahl n durch eine Art magnetischer Polymerisation einführt, während die mechanischen oder elektrischen Eigenschwingungen eines stetig ausgebreiteten Körpers durch ihre Knotenlinien und -flächen diese Zahl in einfacherer Weise einzuführen gestatten. Dieser größeren Einfachheit steht jedoch die Schwierigkeit gegenüber, daß im allgemeinen, wenn die Wellenlänge groß ist gegen die Dimensionen des Erregers, eine merkliche Ausstrahlung der Oberschwingungen nicht zustande kommt eben wegen der Knotenflächen[1]), so daß auch hier neue Hypothesen nötig werden. In diesem Zusammenhang sei noch auf ein wichtiges Experiment von Wood[2]) hingewiesen. Wird Natriumdampf mit weißem Licht bestrahlt, so erscheint ein ziemlich linienreiches Bandenspektrum als Fluoreszenzlicht. Benutzt man dagegen monochromatisches Licht, dessen λ einer der Linien dieses Bandenspektrums sehr nahe entspricht, so wird durch Resonanz nicht nur diese Linie, sondern auch eine Reihe anderer, mit ihr durch einfache numerische Gesetze verknüpfter, erregt; dieselben gehören offenbar dem gleichen schwingenden System an. Man kann hierin eine Wirkung der ungeordneten Molekularbewegung erblicken die, wenn auch unfähig, die nötige kinetische Energie hervorzubringen, doch eine gleichmäßige Verteilung derselben über die verschiedenen Freiheitsgrade — hier Schwingungszustände — hervorzubringen bestrebt ist. Bringt man etwa den Grundton einer Saite durch Resonanz hervor, und berührt dann dieselbe (ohne Anschlag) in der Mitte, so werden Obertöne entstehen. Als nun Hr. Wood den Na-Dampf mit gelbem Na-Licht bestrahlte, erhielt er ein intensives, aus den D-Linien

1) Vgl. Dissertation, Anhang.
2) R. W. Wood, Physik. Zeitschr. 7. p. 873. 1906.

bestehendes Fluoreszenzlicht; doch erschien keine Spur des nächsten Paares der Hauptserie, zu welcher die *D*-Linien gehören, trotzdem dasselbe sonst eine große Intensität besitzt. Man wäre, im Sinne der eben angestellten Überlegung, geneigt, daraus zu schließen, daß die beiden Paare nicht von demselben schwingenden System ausgesandt werden, so daß ein Ausgleich der Energie nicht stattfinden kann. Bei Annahme der Elementarmagnete ist dem tatsächlich so. Wenn auch die Überlegung unsicher, und ein einzelnes Experiment ungenügend sein dürfte, so scheint mir der Hinweis doch nützlich, daß hier möglicherweise ein Ansatz zur experimentellen Prüfung der Frage vorliegt.

Der Zeemaneffekt.

Eine wichtige Anforderung an jede Theorie der Linienspektren ist die Erklärung der mehr oder weniger komplizierten Zerlegungen der Linien im magnetischen Feld. Ein einigermaßen befriedigendes Bild dieser Erscheinung und ihrer Gesetze auf Grund der Lorentzschen Annahme der komplexen Elektronen zu gewinnen ist bisher nicht gelungen. Ich werde nun zeigen, daß die bisher entwickelten Anschauungen in der Tat zu einer großen Mannigfaltigkeit mehr oder weniger komplizierter Zerlegungen führen, deren allgemeiner Charakter durchaus der Beobachtung entspricht. Doch auch hier muß ich mich damit begnügen, einen Zusammenhang mit wohlbekannten Tatsachen und Problemen nachzuweisen. Es ist in diesem Gebiet des Unbekannten zu viel, als daß von der Theorie zunächst mehr als eine solche Reduktion des Problems verlangt werden dürfte.

Daß die Ersetzung quasielastischer Kräfte durch molekularmagnetische eine wesentliche Änderung im Zeemaneffekt bedingt, ist ohne weiteres klar: gelänge es, das Molekularfeld H_0 dauernd parallel dem äußeren Feld H zu stellen, so würde einfach statt

$$\nu = \frac{e H_0}{m c} \quad \text{resultieren:} \quad \nu = \frac{e(H_0 + H)}{m c}.$$

Die Spektrallinie, in Richtung der Kraftlinien gesehen, erschiene zirkularpolarisiert und um die Größe $e H/m c$ aus ihrer früheren Lage verschoben, und zwar nach links oder rechts,

je nachdem H und H_0 gleich- oder entgegengesetzt gerichtet sind. Sind beide Fälle in der Lichtquelle gleich häufig, so ergibt sich ein Dublett; der Polarisationszustand, in beliebiger Richtung beobachtet, ist derselbe wie bei Lorentz aber die Longitudinalkomponente fehlt, und die Zerlegung ist, für einen und denselben Wert von e/m, *doppelt so groß* wie bei Lorentz.[1])

Infolge der molekularen Agitation wird jedoch im allgemeinen der Träger der Serienspektren im Magnetfeld Bewegungen ausführen, welche die Erscheinung wesentlich ändern; Hr. Voigt[2]) hat gezeigt, daß, falls nicht Kräfte herangezogen werden, die einer Reibung äquivalent sind, keinerlei Tendenz zur Orientierung rotierender Ladungen im Magnetfeld besteht. Wir setzen dabei voraus, daß diese Rotationsbewegungen analog den in der Mechanik starrer Körper behandelten Fällen der freien Bewegung um einen festen Punkt oder um den Schwerpunkt, der Kreiselbewegung, des Pendels usw. durch gewisse Periodizitätseigenschaften ausgezeichnet seien.

Nach unseren Voraussetzungen führt die Ladung e unter dem Einfluß von H_0 Oszillationen von sehr kleiner Amplitude aus, und ist an ein Flächenelement $\perp H_0$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, an eine Ebene $\perp H_0$ gebunden.[3]) Die z-Achse eines festen Systems (O, x, y, z) sei parallel H; von der $+z$-Achse aus betrachtet möge die $+y$-Achse durch eine Drehung im Sinne des Uhrzeigers mit der $+x$-Achse zur Drehung gebracht werden können. Seien ϑ der Winkel von H_0 und H; $\psi - \pi/2$ der Winkel der Ebenen $O z x$ und $O H_0 z$, also die Polarkoordinaten der veränderlichen Richtung H_0; so sind deren Richtungskosinus

$$\sin\vartheta \sin\psi, \quad -\sin\vartheta\cos\psi, \quad \cos\vartheta.$$

Bei gegebener Lage und Bewegung von H_0 sind ϑ, ψ gegebene Funktionen der Zeit. Man setze

$$(11)\quad \begin{cases} x = u\cos\psi - v\cos\vartheta\sin\psi; \quad y = u\sin\psi + v\cos\vartheta\cos\psi; \\ z = v\sin\vartheta, \end{cases}$$

1) Vielleicht gehören hierher die Beobachtungen von Wood bei Quecksilberdampf und Na-Dampf (Physik. Zeitschr. **9**. p. 125. 1908).

2) W. Voigt, Ann. d. Phys. **9**. p. 115. 1902.

3) Diese Bedingung kann durch andere ersetzt werden; wesentlich ist nur, daß die Ladung e ihre relative Lage zu den Elementarmagneten nicht merklich ändere.

so kann man u, v als Lagrangesche Koordinaten des Teilchens e auf der Ebene $\perp H_0$ betrachten. Die kinetische Energie von e ist

$$T = \frac{m}{2}\left\{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + 2\frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta\left[u\frac{dv}{dt} - v\frac{du}{dt}\right] + (u^2+v^2)\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\cos^2\vartheta + \left[v\frac{d\vartheta}{dt} - u\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right]^2\right\}.$$

Die Berechnung der virtuellen Arbeit der magnetischen Kräfte wird vereinfacht durch den Umstand, daß in einem ruhenden Koordinatensystem dieselbe identisch verschwinden muß, wenn δu, δv durch du/dt, dv/dt ersetzt werden. Man findet

$$\delta A = \frac{e}{c}(H_0 + H\cos\vartheta)\left(\frac{du}{dt}\delta v - \frac{dv}{dt}\delta u\right) - \frac{d\psi}{dt}(H_0\cos\vartheta + H)(u\delta v + v\delta u) + v\frac{d\psi}{dt}H\sin^2\vartheta\,\delta v + v\frac{d\vartheta}{dt}H\sin\vartheta\,\delta u.$$

Daraus folgen die Lagrangeschen Gleichungen

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} - 2\dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{dv}{dt}\cos\vartheta - v\cos\vartheta\dfrac{d^2\psi}{dt^2} + 2v\dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{d\vartheta}{dt}\sin\vartheta - u\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2 \\ = \dfrac{e}{mc}\left\{-(H_0 + H\cos\vartheta)\dfrac{dv}{dt} - \dfrac{d\psi}{dt}u(H_0\cos\vartheta + H) + vH\sin\vartheta\dfrac{d\vartheta}{dt}\right\}, \\ \dfrac{d^2v}{dt^2} + 2\dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{du}{dt}\cos\vartheta + u\cos\vartheta\dfrac{d^2\psi}{dt^2} - 2u\dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{d\vartheta}{dt}\sin\vartheta - v\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2\cos^2\vartheta + v\left(\dfrac{d\vartheta}{dt}\right)^2 \\ = \dfrac{e}{mc}\left\{(H_0 + H\cos\vartheta)\dfrac{du}{dt} - \dfrac{d\psi}{dt}v(H_0\cos\vartheta + H) + vH\dfrac{d\psi}{dt}\sin^2\vartheta\right\}. \end{cases}$$

Sind H, $d\psi/dt$, $d\vartheta/dt$ gleich Null, so ergibt sich die ungestörte Linie:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{eH_0}{mc}\frac{dv}{dt}; \quad \frac{d^2v}{dt^2} = +\frac{eH_0}{mc}\frac{du}{dt},$$

$$(13)\quad u = u_0 + A\cos\nu_0(t-t_0); \quad v = v_0 + A\sin\nu_0(t-t_0); \quad \nu_0 = \frac{eH_0}{mc}.$$

Im Zeemaneffekt ist die relative Perturbation der Schwingungszahl sehr klein; bei Feldern von 10000 bis 40000 Gauss ist H/H_0 von der Größenordnung 10^{-4}. Wir vernachlässigen Größen von der Ordnung $(H/H_0)^2$ sowohl in den Amplituden wie

in den Schwingungszahlen. Wir setzen ferner voraus, daß die gegebenen Funktionen der Zeit $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$ sich durch rasche konvergente Entwickelungen der Form

$$A_0 + \sum_{i=1}^{\infty}[A_i \cos\omega_i t + B_i \sin\omega_i t]$$

darstellen lassen (die im Spezialfall einer periodischen Bewegung in Fourier-Reihen übergehen). Die ω_i seien proportional H_1 und (für die in Betracht kommenden ersten Glieder) mögen sich zur ungestörten Schwingungszahl ν_0 verhalten ungefähr wie H zu H_0. Während jede Differentiation von u und v einen Faktor von der Größenordnung ν_0 einführt, wie aus der angenäherten Lösung (13) hervorgeht, führt die Differentiation von $\cos\psi$, ... nur solche von der Ordnung ω_i ein, so daß z. B. $u\,(d^2\psi/dt^2)\sin\psi$ zweiter Ordnung gegen $(d^2u/dt^2)\cos\psi$ ist. Beschränken wir uns auf die erste Ordnung, so reduzieren sich also die Gleichungen (12) auf

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} = 2\dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{dv}{dt}\cos\vartheta - \dfrac{e}{mc}(H_0 + H\cos\vartheta)\dfrac{dv}{dt} \\ \qquad\qquad - \dfrac{H_0 e}{mc}\dfrac{d\psi}{dt}\cos\vartheta\, u, \\ \dfrac{d^2v}{dt^2} = -2\dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{du}{dt}\cos\vartheta + \dfrac{e}{mc}(H_0 + H\cos\vartheta)\dfrac{du}{dt} \\ \qquad\qquad - \dfrac{H_0 e}{mc}\dfrac{d\psi}{dt}\cos\vartheta\, v. \end{cases}$$

Sind zunächst $d\psi/dt$, ϑ konstant (reguläre Präzession), so ergibt sich die Lösung

$$u = A_1\cos\nu_1(t-t_1) + A_2\cos\nu_2(t-t_2);$$
$$v = A_1\sin\nu_1(t-t_1) + A_2\sin\nu_2(t-t_2),$$

wo A_1, A_2, t_1, t_2 willkürlich, und ν_1, ν_2 die Wurzeln der Gleichung sind:

$$\nu^2 - \nu\left[\nu_0 + \left(\frac{eH}{mc} - 2\frac{d\psi}{dt}\right)\cos\vartheta\right] - \frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta = 0,$$

also, bis auf Glieder zweiter Ordnung,

$$\nu_1 = \nu_0 + \left(\frac{eH}{mc} - \frac{d\psi}{dt}\right)\cos\vartheta; \quad \nu_2 = \frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta,$$

Der Wurzel ν_2 entsprechen also Strahlen, deren Wellenlänge 10^4 mal größer ist als die in Betracht kommenden. Wir haben also nur die erste Wurzel zu berücksichtigen.

Sei nun allgemein, bei veränderlichen ϑ, $d\psi/dt$:

$$Q = \int_{t_0}^{t} \left[\nu_0 + \left(\frac{eH}{mc} - \frac{d\psi}{dt}\right)\cos\vartheta\right] dt,$$

so ist

$$u = \frac{A\cos Q}{\nu_0 + \left(\frac{eH}{mc} - \frac{d\psi}{dt}\right)\cos\vartheta}; \quad v = \frac{A\sin Q}{\nu_0 + \left(\frac{eH}{mc} - \frac{d\psi}{dt}\right)\cos\vartheta}.$$

Denn durch Einsetzen in die Differentialgleichungen (14) oder (12) erkennt man, daß die Glieder bis zur zweiten Ordnung sich aufheben, so daß die Gleichungen innerhalb des vorgeschriebenen Annäherungsgrades erfüllt sind.

Diese Werte von u, v sind in (11) einzutragen, und die sich ergebenden Ausdrücke für x, y, z in Summen rein periodischer Funktionen aufzulösen. Dabei kann man $A = \nu_0$ setzen, und den Faktor

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{eH}{mc} - \frac{d\psi}{dt}\right)\frac{\cos\vartheta}{\nu_0}}$$

weglassen, da er von der Einheit nur um Größen von der Ordnung 10^{-4} abweicht. Denn durch Hinzufügen dieses Faktors werden die *Amplituden* der einzelnen Glieder der Entwickelungen von $\sin Q$, $\cos Q$ nicht in merklicher Weise beeinflußt; andererseits erhalten etwaige durch den Faktor neu hinzukommende trigonometrische Glieder die Amplitude 10^{-4}, mithin sind die entsprechenden Intensitäten 10^{-8} mal kleiner als die der schon vorhandenen Glieder.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß H_0 senkrecht zu H steht und sich mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit ω um diese Achse dreht. Es ist dann

$$\psi = \omega(t - t'); \quad \cos\vartheta = 0,$$

$$x = \cos\nu_0(t - t_0)\cos\psi = \tfrac{1}{2}\cos[(\nu_0 + \omega)t + c] + \tfrac{1}{2}\cos[(\nu_0 - \omega)t + c'],$$

$$y = \cos\nu_0(t - t_0)\sin\psi = \tfrac{1}{2}\sin[(\nu_0 + \omega)t + c] - \tfrac{1}{2}\sin[(\nu_0 - \omega)t + c'],$$

$$z = \sin\nu_0(t - t_0),$$

wobei c, c' Phasenkonstanten sind, auf die es nicht weiter ankommt.

Die Linie ν_0 spaltet sich also auf in ein Triplett, dessen Gesamtbreite in der Skala der Schwingungszahlen 2ω ist, und dessen Intensitäten und Polarisationen im übrigen genau denen entsprechen, die sich in der elementaren Lorentzschen Theorie ergeben.

Soll der Drehungssinn des Lichtes mit demjenigen übereinstimmen, welchen die Erfahrung ergibt, *so ist es hier nicht, wie bei Lorentz, nötig, daß das Teilchen e negativ geladen sei; vielmehr ist es notwendig und hinreichend, daß die Drehung der Achse H_0 um H in dem Sinne erfolgt, in welchem freie Elektronen im betreffenden Feld H rotieren würden.* Ist endlich die Drehgeschwindigkeit ω *gleich* der der Elektronen, so ergibt sich ein Triplett mit doppelt so großem Komponentenabstand, wie nach der Lorentzschen Theorie zu erwarten wäre. Das Triplett Zn 4680, Cd 4678 der zweiten Nebenserie und ihre Homologen zeigen in der Tat ungefähr diesen Abstand.

Man erkennt an diesem Beispiel, daß durch die Hypothese der Molekularmagnete die Interpretation des Zeemaneffektes wesentlich verändert wird.

Ich gehe zur allgemeinen Annahme über, *es sei die Bewegung von H_0 eine periodische*, so daß

$$\cos\vartheta = a_0 + a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t + a_2\cos 2\omega t + b_2\sin 2\omega t + \ldots,$$

$$\psi = \psi_0 + \omega' t + \alpha_1\cos\omega t + \beta_1\sin\omega t + \alpha_2\cos 2\omega t + \beta_2\sin 2\omega t + \ldots = \psi_0 + \omega' t + \Sigma.$$

Es müssen ω, ω' in rationalem Verhältnis stehen, damit die Bewegung eine periodische sei. Soll ω die Periode sein, so muß ω' ein Vielfaches von ω sein.

Die Fourierschen Reihen für $\sin\vartheta$, $\cos\psi$, $\sin\psi$ erhält man dann durch Entwickelung nach Potenzen und Umrechnung von $\cos^n$, $\sin^n$ auf cos, sin der Vielfachen des Winkels. Verstehen wir unter $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, S$ Summen trigonometrischer Funktionen (die letzte ohne konstantes Glied), so ist

$$\sin\vartheta = \sqrt{1-\cos^2\vartheta} = 1 - \frac{\cos^2\vartheta}{2} - \frac{\cos^4\vartheta}{8} + \ldots = \Sigma_3,$$

$$\begin{aligned}\sin(\psi-\psi_0) &= \sin\omega' t\cos\Sigma + \cos\omega' t\sin\Sigma \\ &= \sin\omega' t\left[1 - \frac{\Sigma^2}{1\cdot 2} + \frac{\Sigma^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdots\right] \\ &\quad + \cos\omega' t\left[\frac{\Sigma}{1} - \frac{\Sigma^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots\right] \\ &= \sin\omega' t\,.\,\Sigma_1 + \cos\omega' t\,.\,\Sigma_2.\end{aligned}$$

Da Σ zwischen zwei Werten hin und her schwankt, konvergieren die Reihen.

Q ist dann von der Form

$$Q = \left\{\nu_0 + \sum_1^\infty \omega n [\alpha_n b_n - \beta_n a_n] + a_0 \left(\frac{e H_0}{m c} - \omega'\right)\right\} [t - t_0] + S$$
$$= (\nu_0 + \varepsilon)(t - t_0) + S,$$

wo

$$\varepsilon = a_0 \left(\frac{e H_0}{m c} - \omega'\right) + \sum_1^\infty \omega n [\alpha_n b_n - \beta_n a_n], \tag{15}$$

so daß

$$u = \cos(\nu_0 + \varepsilon)(t - t_0) \cos S - \sin(\nu_0 + \varepsilon)(t - t_0) \sin S,$$
$$v = \sin(\nu_0 + \varepsilon)(t - t_0) \cos S + \cos(\nu_0 + \varepsilon)(t - t_0) \sin S$$

sich als Summen von Gliedern der Form

$$\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \{\nu_0 + \varepsilon \pm m\omega\}\{t - t_0\}, \quad m = 0, 1, 2 \ldots$$

darstellen lassen. Gleiches gilt von der parallel H schwingenden Komponente

$$z = v \sin \vartheta.$$

Dieselbe wird also in ein Spektrum mit den Schwingungszahlen

$$\nu_0 + \varepsilon \pm m\omega, \quad m = 0, 1, 2 \ldots$$

zerlegt. Von diesen Linien gelangt aber selbst bei mäßig rascher Konvergenz der Reihen, wie unten an Beispielen erörtert werden soll, nur eine sehr beschränkte Anzahl zur Wahrnehmung, weil die Intensitäten, die ja den *Quadraten* der Amplituden proportional sind, viel rascher abfallen als diese.

Man hat ferner

$$x = \cos \omega' t [u \cos \Sigma - v \sin \Sigma \cos \vartheta]$$
$$- \sin \omega' t [u \sin \Sigma + v \cos \vartheta \cos \Sigma],$$
$$y = \sin \omega' t [u \cos \Sigma - v \sin \Sigma \cos \vartheta]$$
$$+ \cos \omega' t [u \sin \Sigma + v \cos \vartheta \cos \Sigma],$$
$$\Sigma = \alpha_1 \cos \omega t + \beta_1 \sin \omega t + \alpha_2 \cos 2\omega t + \beta_2 \sin 2\omega t + \ldots$$

Die Klammern sind wieder in trigonometrische Summen der oben genannten Form entwickelbar; jedem Gliede

$$A \cos \nu_m t + B \sin \nu_m t,$$
$$\nu_m = \nu_0 + \varepsilon + m\omega \quad [m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots]$$

der ersten Klammer und

$$A' \cos \nu_m t + B' \sin \nu_m t$$

der zweiten entsprechen *zwei entgegengesetzt zirkularpolarisierte Wellen* mit den Schwingungszahlen

$$\nu_m + \omega', \quad \text{Intensität } \left(\frac{A+B'}{2}\right)^2 + \left(\frac{A'-B}{2}\right)^2$$

und

$$\nu_m - \omega', \quad \text{„} \quad \left(\frac{A-B'}{2}\right)^2 + \left(\frac{A'+B}{2}\right)^2.$$

Jeder parallel H schwingenden Komponente entsprechen so zwei $\perp H$ *schwingende,* doch können die Intensitäten sehr verschieden sein, so daß einige Linien ganz zu fehlen scheinen. Besonders auffallend ist diese Anordnung in dem von Hrn. Lohmann[1]) untersuchten Spektrum von Neon. Im Quadruplett der Linie D_1 sind dagegen zwei Longitudinal- und nur zwei Transversalwellen. Wir behandeln den Fall unten: es sind die Intensitäten von $\nu+\omega'$ und $\nu-\omega'$ hier sehr verschieden.

Allerdings erscheint die Mitte des ganzen Liniensystems selbst aus der ursprünglichen Lage ν_0 nach $\nu_0 + \varepsilon$ verlegt. Betrachten wir aber entgegengesetzte Richtungen von H_0 im Atom (bzw. umgekehrte Stellung der Süd- und Nordpole des Molekularmagnetes) als gleich möglich, so bleibt das Vorzeichen von $\cos\vartheta$ willkürlich, und man erhält das Spektrum:

Elektr. Kraft parallel H schwingend:

$$\nu_0 \pm \varepsilon \pm m\,\omega, \quad m_1\, n_1 = 0, 1, 2 \ldots$$

Elektr. Kraft senkrecht zu H schwingend:

$$\nu_0 \pm \varepsilon \pm n\,\omega \pm \omega', \quad m_1\, n_1 = 0, 1, 2 \ldots$$

Unter sehr allgemeinen Annahmen ergibt sich übrigens für ε eine erheblich kleinere Zahl als ω und ω', so daß Linien mit den Schwingungszahlen $\nu + \varepsilon$ und $\nu - \varepsilon$ auch in Instrumenten mit hohem Auflösungsvermögen nicht mehr getrennt erscheinen. Wir setzen dies im folgenden voraus. Da nun ω'/ω eine rationale Zahl, und insbesondere eine ganze Zahl ist, falls ω die Periode der Bewegung, so folgt:

Bei beliebigen periodischen Bewegungen des Systems wird jede Linie in mehrere zerlegt, deren Abstände von der ursprünglichen Lage der Linie untereinander in rationalem Verhältnis stehen. Dies ist das Gesetz von Runge und Paschen. Allerdings haben diese Forscher darüber hinaus noch fest-

1) W. Lohmann, Inaug.-Diss. Halle 1907.

gestellt, daß zwischen den Werten von ω für verschiedene Serien und verschiedene Elemente ebenfalls rationale Verhältnisse stattfinden. Damit wird gefordert, daß für solche Gruppen verwandter Serien die Grundperiode der Bewegung von H_0 dieselbe sei, während allerdings die Koeffizienten a_i, b_i, α_i, β_i veränderlich sein können, wodurch die Intensitäten, nicht aber die Schwingungszahlen beeinflußt werden: so können z. B. im einen Fall die Linien mit geraden, im anderen die mit ungeraden Ordnungszahlen ganz fehlen.

Ist die Bewegung nicht periodisch, so ergibt sich das allgemeine Gesetz

$$(16)\quad \begin{cases} \text{Parallel zu } H\text{:} & \nu_0 \pm m\,\omega, & m = 0, 1, 2 \ldots \\ \text{Senkrecht zu } H\text{:} & \nu_0 \pm n\,\omega \pm \omega', & n = 0, 1, 2 \ldots \end{cases}$$

Es lassen sich alle Schwingungszahlen linear und mit ganzzahligen Koeffizienten aus zwei Grundzahlen ω und ω' berechnen; ω' tritt nur in den $\perp$ schwingenden Komponenten auf; sein Vorzeichen bestimmt den Drehungssinn.

Ob das Gesetz

$$\frac{\omega'}{\omega} = \text{rationale Zahl}$$

ein durchaus allgemeines sei, muß vorderhand dahingestellt bleiben. In manchen Fällen scheint diese Spezialisierung eine etwas gezwungene, und Hr. Runge[1]) sieht sich z. B. in dem von Lohmann (l. c.) untersuchten Spektrum von Neon genötigt, recht große Zähler und Nenner einzuführen, während bei Benutzung von (16) die Zahlen 0, 1, 2, selten 3 und 4 in allen mir bekannten Fällen ausreichen. So gehen bei Neon 6506,7 die Rungeschen Zahlen bis auf 17, während ist:

parallel: $\nu_0 \pm 1{,}56\,m$ $(m = 0, 1)$,

senkrecht: $\nu_0 \pm 1{,}56\,m \pm 5{,}08$ $(n = 0, 1)$.

Bei 6402,40 (Runge bis 10):

(p): $\nu_0 \pm m.0{,}78$ $(m = 0, 1, 2)$; (s): $\nu_0 \pm 6{,}11 \pm n.0{,}78$ $(n = 0, 1, 2$ (15 Komponenten).

Bei 6217,50 (R. bis 14):

(p): $\nu_0 \pm m.3{,}90$ $(m = 0, 1)$; (s): $\nu_0 \pm 7{,}04 \pm 3{,}90\,n$ $(n = 0, 1)$.

1) C. Runge, Physik. Zeitschr. 8. p. 232. 1907.

Bei 6143,28 (R. bis 20):

(p): $\nu_0 \pm 1{,}22\, m$ $(m = 1, 2)$; (s): $\nu_0 \pm 5{,}68 \pm 1{,}22\, n$ $(n = 1, 2)$.

Bei 6096,37 (R. bis 15):

(p): $\nu_0 \pm 0{,}86\, m$ $(m = 0, 1)$; (s): $\nu_0 \pm 5{,}54 \pm 0{,}86\, n$ $(n = 0, 1)$.

Bei 6030,20 (R. bis 9):

(p): $\nu_0 \pm m \,.\, 0{,}34$ $(m = 2)$; (s): $\nu_0 \pm 2{,}76 \pm 0{,}34$.

Bei 5944,91 (R. bis 8):

(p): $\nu_0 \pm m \,.\, 0{,}45$ $(m = 2, 4)$; (s): $\nu_0 \pm 5{,}58 \pm 0{,}45 \,.\, n$ $(n = 1, 3)$.

Bei 5882,04 (R. bis 21):

(p): $\nu_0 \pm 0{,}77 \,.\, m$ $(m = 0, 1)$; (s): $\nu_0 \pm 7{,}14 \pm 0{,}77\, m$ $(m = 0, 1)$.

Bei der Linie 6143 liegen $\nu_0 \pm (5{,}68 - 2 \,.\, 1{,}22) = \nu_0 \pm 3{,}24$ wohl zu nahe bei der starken parallel schwingenden Komponente; daher sind sie nicht wahrgenommen. Im übrigen beweist wegen den möglicherweise sehr verschiedenen Intensitäten das Fehlen einer berechneten Linie nichts gegen die Formel, welche gewissermaßen nur ein Schema darstellt, in das die Linien hineinpassen müssen. Dieses Schema ist nicht eindeutig; bei 6143 könnte man z. B. setzen:

(p): $\nu_0 \pm 0{,}60\, m$ $(m = 2, 4)$; (s): $\nu_0 \pm 6{,}30 \pm 0{,}60\, n$ $(n = 1, 3)$,

wobei nun die beobachteten Linien und nur diese dargestellt werden.

Bei den Satteliten der ersten Nebenserie von Hg und ihren Homologen ergeben sich ebenfalls[1]) hohe Zahlen bei Anwendung des Rationalitätsgesetzes:

3663,5 (R. bis 8):

(p): $\nu_0 \pm 0{,}24\, m$ $(m = 2, 4)$; (s): $\nu_0 \pm 1{,}36 \pm 0{,}28\, m$ $(m = 1, 3)$.

3663,0 (R. bis 5):

(p): $\nu_0 \pm 1{,}10\, m$ $(m = 0, 1)$; (s): $\nu_0 \pm 1{,}66 \pm 1{,}10\, n$ $(n = 0, 1)$.

3650 (R. bis 7):

(p): $\nu_0 \pm 0{,}34\, m$ $(m = 1)$; (s): $\nu_0 \pm 1{,}28 \pm 0{,}34\, m$ $(m = 0)$.

3132,0 (R. bis 3):

(p): $\nu_0 \pm 0{,}60\, m$ $(m = 0, 1)$; (s): $\nu_0 \pm 1{,}10 \pm 0{,}60\, m$ $(m = 0, 1)$.

1) C. Runge, l. c.; C. Runge u. F. Paschen, Berliner Ber. 1902.

3125,8 (R. bis 16):

(p): $\nu_0 \pm 0{,}38\, m$ $(m = 1)$; (s): $\nu_0 \pm 1{,}20 \pm 0{,}38\, n$ $(n = 0,\ 1)$.

2967,4:

(p): $\nu_0 \pm 0{,}60\, m$ $(m = 0,\ 1)$; (s): $\nu_0 \pm 0{,}60 \pm 0{,}60\, n$ $(n = 0)$.

Die neue Darstellung dürfte also den Vorzug der Einfachheit beanspruchen, und man wird, auch abgesehen von der hier vorgetragenen Theorie, die Möglichkeit einer Erklärung der Erscheinung als naheliegender betrachten, wenn, wie es hier geschieht, das Problem in zwei andere zerlegt wird: erstens, die Formeln (16) zu begründen, wobei m, n klein bleiben; zweitens, die häufig auftretenden rationalen Verhältnisse zwischen ω' und ω, insbesondere die Formel $\omega' =$ Vielfaches von ω, aus speziellen Annahmen über die Bewegung abzuleiten. Die Frage, ob $\omega'/\omega =$ rationale Zahl eine allgemeine Regel darstellt, d. h. ob die Bewegung stets eine periodische ist, für welche alle Punkte sich in geschlossenen Bahnen bewegen, ist ein Wahrscheinlichkeitsproblem, für dessen sichere Lösung noch weitere genaue Messungen abzuwarten sind. Die von Hrn. Runge (l. c.) angestellten Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen werden ungültig, wenn man von vornherein für die Linien das Gesetz (16) annimmt, statt eine willkürliche Verteilung vorauszusetzen.

Als Beispiel behandeln wir zunächst den Ansatz

$$\cos\vartheta = a\cos\omega t + b\sin\omega t, \quad \psi = \omega t + \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t,$$

also $\omega' = \omega$ unter der Annahme, daß die Größen zweiten Grades in $\alpha\beta$, ab, vernachlässigt werden dürfen. Da hier

$$\varepsilon = \omega(\alpha b - \beta a),$$

so wird $\alpha b - \beta a$ höchstens $= {}^1/_{10}$ etwa sein dürfen, damit feine Linien $\nu + \varepsilon$, $\nu - \varepsilon$ im mittleren Teil des Spektrums nicht mehr zu trennen seien.

Es ergibt sich in dieser Annäherung, wenn abkürzend $k = eH/\omega mc$ gesetzt wird,

$$\sin\vartheta = 1, \quad Q = +(k-1)[-a\sin\omega t + b\cos\omega t] + \nu_0(t - t_0),$$
$$\cos\psi = \cos\omega t - [\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t]\sin\omega t,$$
$$\sin\psi = \sin\omega t + [\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t]\cos\omega t.$$

Es ergeben sich somit durch Einsetzen in (11) die folgenden Linien:

Parallel H schwingend:

ν_0 (Intens. $= 1$); $\nu_0 \pm \omega$, Intens. $= \frac{(a^2+b^2)(k-1)^2}{4}$.

$\perp$ H schwingend:

$$\nu_0 \pm \omega, \quad \text{Intens.} = \tfrac{1}{4};$$

$$\nu_0 + 2\omega, \quad \text{Intens.} = \left[\frac{a(k-2)-\beta}{4}\right]^2 + \left[\frac{b(k-2)+\alpha}{4}\right]^2,$$

$$\nu_0 - 2\omega, \quad \text{Intens.} = \left[\frac{a(k-2)+\beta}{4}\right]^2 + \left[\frac{b[k-2)-\alpha}{4}\right]^2.$$

Der Drehungssinn von $\nu_0+\omega$, $\nu_0+2\omega$ ist entgegengesetzt demjenigen von $\nu_0-\omega$, $\nu_0-2\omega$. Die Dissymmetrie der Intensitäten wird aufgehoben, wenn man, wie oben auseinandergesetzt, entgegengesetzte Lagen von H_0, d. h. entgegengesetzte Vorzeichen von $\cos\vartheta$, a, b als gleich möglich, und in der Lichtquelle gleich häufig vorkommend, betrachtet, so daß zu den angeschriebenen Werten der Intensitäten noch weitere ebensolche Ausdrücke hinzukommen, in welchen a, b durch $-a$, $-b$ ersetzt sind.

Es ergibt sich also ein *Quintuplett äquidistanter Linien*, bei welchem die parallel und senkrecht schwingenden Komponenten zum Teil aufeinanderfallen. Sind a, b bedeutend kleiner als α, β, so verschwinden die seitlichen Parallelkomponenten.

Die Intensität der äußersten Linien ist bedeutend kleiner als die der mittleren.

Wird derselbe Ansatz gemacht, aber $\omega' = 3\omega$ statt $\omega' = \omega$ gesetzt, so ergibt sich ein *Nonett äquidistanter Linien*, wie es von Runge und Paschen in der zweiten Nebenserie beobachtet ist (Hg 5461, 3342 und Homologe), wobei die äußersten Linien am schwächsten sind:

(p): $\nu_0 \pm m\omega$ $(m = 0, 1)$; (s): $\nu_0 \pm 3\omega \pm n\omega$ $(n = 0, 1)$.

Bei der Rechnung sind Glieder zweiten Grades vernachlässigt worden. Dieselben würden zunächst die Intensitätsverhältnisse der erhaltenen Linien etwas beeinflußt haben; doch sind dieselben so unsicher beobachtet, daß diese Korrektion ganz bedeutungslos ist. Ferner werden neue Linien eingeführt, deren

Intensitäten von der Ordnung $(a \pm b/4)^k$, $(\alpha \pm \beta/4)^k$ sind. Wählt man also für a, b, α, β Zahlen von der Ordnung $^1/_2$, wobei k mit 1 vergleichbar sei, so ist die Intensität der äußersten Linien etwa $^1/_{10}$ bis $^1/_{30}$ der mittleren, oder noch weniger, die der bei exakter Berechnung neu hinzukommenden $^1/_{100}$ bis $^1/_{400}$ oder noch geringer; dieselben würden sich also in den meisten Fällen der Beobachtung entziehen, da selbst bei längerer Exposition die viel größere Intensität der Zentrallinien die Beobachtung sehr erschwert.

Ein weiterer einfacher, wenn auch ziemlich allgemeiner Fall ist der, daß $d\psi/dt = \text{konst.}$, und zwar[1])

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{eH}{mc} = \omega'.$$

Dann reduziert sich Q auf $\nu_0(t - t_0)$, und es ergibt sich, falls abkürzend $t_0 = 0$ gesetzt wird:

Parallel H: $\quad z = \sin \nu_0 t \sin \vartheta$,

$\perp H$: $\quad \begin{cases} x = \cos \nu_0 t \cos \omega' t - \cos \vartheta \sin \nu_0 t \sin \omega' t, \\ y = \cos \nu_0 t \sin \omega' t + \cos \vartheta \sin \nu_0 t \cos \omega' t. \end{cases}$

Hierin ist nun für ϑ eine beliebige periodische Funktion einzusetzen. Sei sehr annähernd

$$\sin \vartheta = A \sin \omega (t - t_0), \quad |A| < 1,$$

so ergibt sich für positives Vorzeichen von $\cos \vartheta = \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta}$:

Parallel H:

$$\nu_0 \pm \omega, \quad \text{Intens.} = \frac{A^2}{4}.$$

Senkrecht H:

$$\nu_0 + \omega', \quad \text{Intens.} \left[1 - \frac{A^2}{8} - \frac{3A^4}{128} \ldots\right]^2;$$

$$\nu_0 - \omega', \quad \text{Intens.} \left[\frac{A^2}{8} + \frac{3A^4}{128} + \ldots\right]^2;$$

$$\nu_0 \pm 2\omega \pm \omega', \quad \text{Intens.} \left[\frac{A^2}{16} + \frac{A^4}{64} + \ldots\right]^2.$$

1) Die Ebene $(H H_0)$ dreht sich also um H mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $e H/m c$ und in demselben Sinne, wie freie Elektronen im Felde H; dabei führt aber H_0 in dieser Ebene noch pendelartige Schwingungen aus.

Für negative Vorzeichen von $\cos\vartheta$ werden die Parallelkomponenten nicht geändert in ihrer Intensität und Lage; die Intensitäten von $\nu_0+\omega'$, $\nu_0-\omega'$ vertauschen sich aber. Da umgekehrte Vorzeichen von $\cos\vartheta$, d. h. von H_0, verschiedenen Molekülen entsprechen, und keine Phasenrelation zwischen solchen besteht, addieren sich die Intensitäten und man erhält:

Parallel:

$$\nu_0 \pm \omega, \quad \text{Intens. } \frac{A^2}{2}.$$

Senkrecht:

$$\nu_0 \pm \omega', \quad \text{Intens. } \left[1 - \frac{A^2}{8} + \ldots\right]^2 + \left[\frac{A^2}{8} + \ldots\right]^2;$$

$$\nu_0 \pm 2\omega \pm \omega', \quad \text{Intens. } 2\left[\frac{A^2}{16} + \ldots\right]^2.$$

Für $A = {}^3/_4$ sind die Intensitäten also

$$0{,}28\,(p), \quad 0{,}87\,(s) \quad \text{und} \quad 0{,}0003\,(s).$$

Die letztere Linie ist nicht wahrzunehmen, so daß ein *Quadruplett resultiert.*

Für $A = {}^7/_8$ ergibt sich:

$$\text{Intens. } (p)\,0{,}38; \quad (s)\,0{,}80; \quad (s)\,0{,}005.$$

Hier könnte längere Exposition ein *Oktett* ergeben.

Es müßten also, wie man sieht, die Fourierschen Reihen für $\cos\vartheta$ recht langsam konvergieren, um noch kompliziertere Zerlegungen zu ergeben.

Für $A = 1$ ergibt sich ein neues *Oktett*:

$$(p):\ \nu_0 \pm \omega; \quad (s):\ (\nu_0 \pm \omega'; \quad (s):\ \nu_0 \pm \omega' \pm \omega.$$

Zwischen ω' und ω soll, nach Voraussetzung, ein rationales Verhältnis bestehen. Sei zunächst $A = {}^3/_4$ ungefähr, und $\omega' = \omega$, so ergibt sich ein Dublett mit koinzidierenden Parallel- und Perp.-Komponenten [Hg 2536,72 nach Runge und Paschen, und viele von Purvis untersuchte Linien, z. B. Vanadium[1]) 3885,03; 3876,25; 3566,32 usw.; Ruthenium[2]) 4584,7; 4372,7 usw.].

Für $\omega' = 2\omega$ ergibt sich das *Quadruplett der Linie* D_1.

Für $\omega' = 3\omega$, A vergleichbar mit ${}^7/_8$, reduziert sich das Oktett auf das *Sextett der Linie* D_2.

---

1) Purvis, Trans. Cambr. Phil. Soc. **20**. p. 210. 1906.
2) Purvis, Proc. Cambr. Phil. Soc. **13**. p. 351. 1906.

Mit den beiden (p)-Komponenten koinzidieren zwei (s)-Komponenten, die aber wesentlich schwächer sind, und vielleicht deshalb nicht beobachtet. Im übrigen sind die quantitativen Verhältnisse die von Runge und Paschen beobachteten. Bei D_2 hat man ω halb so groß zu wählen wie bei D_1, oder besser bei D_1 anzusetzen

$$\sin\vartheta = A\sin 2\omega(t-t_0) \text{ statt } A\sin\omega(t-t_0).$$

Die beiden D-Linien würden bei dieser Auffassung zu einer und derselben Grundperiode gehören. Der Wert $e/mc = \omega'/H$, der sich für das schwingende Teilchen ergibt, beträgt allerdings nur $^2/_3$ des Kathodenstrahlwertes $1{,}88\,.\,10^7$. *Allgemein übersteigt ω'/H in keinem bisher beobachteten Fall den Kathodenstrahlwert*; bei den sehr weiten Tripletts Zn 4680 und ihren Homologen bei Hg usw. ist nach den neuesten absoluten Messungen von P. Weiss und A. Cotton[1]), sowie nach A. Stettenheimer[2]) $\omega'/H = 1{,}78\,.\,10^7$; der Kathodenstrahlwert wird nicht ganz erreicht. Für dasselbe Triplett ergibt sich dagegen nach Lorentz' Theorie $e/mc = 3{,}56\,.\,10^7$, und es gilt der Satz: für kein Triplett ist e/mc größer als das *Doppelte* des Kathodenstrahlwertes. Von komplizierteren Zerlegungen muß ich dabei absehen, da eine Theorie derselben nicht vorliegt, außer in den von Robb[3]) behandelten Fällen (Nonett usw.); hier gilt derselbe Satz: für das Nonett ist e/mc = Doppelter Kathodenstrahlwert.

Ich halte die Aussage $e/mc \leqq$ Kathodenstrahlwert, in welcher die Annahme magnetischer (und nicht elastischer!) Molekularkräfte eine *wesentliche* Rolle spielt, für bedeutend einfacher und plausibler als die Aussage, es könne e/mc sowohl kleinere als größere Werte wie $1{,}88\,.\,10^7$ annehmen, jedoch über das Doppelte dieses Betrages nicht hinausgehen, und glaube hierin eine nicht unwesentliche Stütze der gemachten Grundhypothese erblicken zu dürfen.

Es kann aber auch $\omega' = \omega/2$ gesetzt werden; dann erscheint ein *inverses Quadruplett*, in welchem die (s)-Komponenten *zwischen* den (p)-Komponenten liegen.

1) P. Weiss u. A. Cotton, Journ. de Phys. Juni 1907.
2) A. Stettenheimer, Inaug.-Diss. Tübingen 1907.
3) A. A. Robb, Inaug.-Diss. Göttingen 1904.

Ist endlich $\omega' = \omega/n$ bedeutend kleiner als ω, so ergibt sich das *inverse Triplett*, welches, wie das inverse Quadruplett, von Becquerel und Deslandres[1]) im Spektrum von Fe zuerst beobachtet wurde: die seitlichen Komponenten sind (p), die zentralen (s).

Dem Ansatz

$$\sin\vartheta = a + b\sin\omega(t - t'), \quad |a| < 1, \quad |b| < 1$$

entspricht die Zerlegung in drei (p)-Komponenten ν_0, $\nu_0 \pm \omega$; die (s)-Komponenten, deren Intensitäten je nach den Werten von a und b sehr verschieden sein können, sind

$$\nu_0 \pm \omega', \quad \nu_0 \pm \omega \pm \omega', \quad \nu_0 \pm 2\omega \pm \omega'.$$

Sind a, b von der Größe $^3/_4$ etwa, und ist $\omega' = \omega$, so erhält man ein *Triplett*, wie es Runge und Paschen in der ersten Nebenserie von Mg, Ca, Sr, Hg [hier $\lambda = 2967{,}37$; $2534{,}89$] beobachtet haben, in welchem drei (p)-Komponenten, und, mit den zwei äußeren koinzidierend, zwei (s)-Komponenten erscheinen.

Diese Beispiele, die sich leicht vermehren ließen, mögen genügen, um zu zeigen, daß die Theorie in der Tat eine große Anzahl charakteristischer, anomaler Zeemaneffekte quantitativ richtig darstellt. Zu den bisherigen Betrachtungen kommt aber noch ein neues Moment hinzu. Verändert man bei gleich bleibender Bewegung des Moleküls und somit gleichem ω die Stellung von H_0 im Molekül, so bleibt das Schema der Linien $\nu \pm m\omega$ usw. unverändert, die Intensitäten aber ändern sich. Beschreiben wir die Bewegung des Moleküls mittels der drei Eulerschen Winkel[2]) φ, ϑ, ψ, wobei die erste Lage von H_0 als z-Achse des bewegten Koordinatensystems gelte, so daß ϑ, ψ mit den bisher so bezeichneten Winkeln zusammenfallen. Seien ϑ_0, φ_0 die in bezug auf dies bewegte System unveränderliche Polarkoordinaten der neuen Richtung von H_0[3]), und endlich ϑ', ψ' die Winkel von H_0' mit dem festen System,

1) H. Becquerel u. H. Deslandres, Compt. rend. 127. p. 18. 1898.

2) Vgl. z. B. F. Klein u. A. Sommerfeld, Theorie des Kreisels 1. p. 17. Leipzig 1897.

3) So daß $\sin\vartheta\sin\varphi$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\cos\vartheta$ die Richtungskosinusse von H_0' in bezug auf die bewegten Achsen sind.

die den früheren ϑ, ψ entsprechen, und die nunmehr statt ϑ, ψ in die Formeln (11) einzutragen sind. Dann ist

$$\cos\vartheta' = \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0) + \cos\vartheta\cos\vartheta_0,$$

$$\sin\psi' = \frac{1}{\sin\vartheta'}\{-\sin\vartheta_0\cos\psi\sin(\varphi-\varphi_0) - \sin\vartheta_0\cos\vartheta\sin\psi\cos(\varphi-\varphi_0) + \cos\vartheta_0\sin\vartheta\sin\psi\},$$

$$\cos\psi' = \frac{1}{\sin\vartheta'}\{\sin\vartheta_0\sin\psi\sin(\varphi-\varphi_0) - \sin\vartheta_0\cos\vartheta\cos\psi\cos(\varphi-\varphi_0) + \cos\vartheta_0\sin\vartheta\cos\psi\}.$$

Mithin ist ϑ' von ω' unabhängig, und $\sin\psi'$, $\cos\psi'$ sind wie $\sin\psi$, $\cos\psi$ lineare Funktionen von $\cos\omega' t$, $\sin\omega' t$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Falls nun dem Atom, wie einem Kristall, unter Umständen gewisse Symmetrien zukommen, so werden sich die Elementarmagnete bei verschiedenen Molekülen an verschiedenen Stellen ansetzen können. Rotieren etwa alle Moleküle um ihre größte Hauptträgheitsachse, so daß $d\psi/dt$, ϑ konstant sind, so entsprechen den verschiedenen Ansatzstellen zwar dasselbe ω', aber im allgemeinen verschiedene ϑ, und die magnetische Zerlegung einer Linie der entsprechenden Serie erscheint als die Superposition dieser Einzelzerlegungen.

Wichtig ist, daß, von einzelnen Fällen, wie z. B. das Triplett, abgesehen, im allgemeinen sich eine theoretisch unendliche Anzahl von Komponenten ergibt, deren Intensitäten aber mehr oder weniger rapid abnehmen, so daß eine verhältnismäßig einfache Zerlegung sich ergibt. Die Beobachtung bestätigt in der Tat in vielen Fällen, daß bei komplexen Zerlegungen einzelne Komponenten, besonders die äußersten, schwach sind [1]), so daß man den Eindruck erhält, daß die Linie sehr wohl in ein ganzes Spektrum zerlegt sein könnte, von welchem nur die eine gewisse Minimalintensität besitzenden Linien wahrgenommen werden. Dies ist wohl insbesondere auch der Fall bei der von Lohmann (l. c.) gefundenen Zerlegung in 15 Komponenten, von denen je fünf äquidistant

1) Bei komplizierten Trennungen beobachtete Hr. Lohmann (l. c.), wie er selbst angibt, immer einige sehr schwache Linien. Vgl. die photogr. Reproduktionen bei Lohmann, insbesondere Figg. 3 und 4 (Nonett und Sextett), und bei Runge u. Paschen, Abh. d. Berliner Akad. 1902.

sind, und deren Erklärung auf Grund der Theorie der komplexen Elektronen, wenn sie überhaupt möglich, ein sehr kompliziertes Bild erfordern müßte. In der hier vorgetragenen Theorie entspricht sie einer etwas langsameren Konvergenz der Fourier-Reihen, wobei aber doch die Ordnungszahlen $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$ allein in Betracht kommen, und $\omega' = 6\,\omega$ ist (angenähert). Längere Exposition könnte daher wohl in vielen Fällen neue, schwache Linien zum Vorschein bringen. Bei weniger scharfen Linien würde — was vielfach beobachtet wird — eine mehr oder weniger diffuse, nach den Rändern hin abschattierte Erscheinung sich zeigen, deren Auflösung nicht mehr gelingt.

Die Beurteilung der Intensitäten ist sehr unsicher und wird noch dadurch erschwert, daß, wie Hr. Zeeman[1]) neuerdings gezeigt hat, das Reflexionsvermögen der Gitter für verschieden polarisiertes Licht sehr verschieden sein kann. Die Anwesenheit von Trabanten kann eine bedeutende Unsicherheit auch der Wellenzahlen, und selbst eine scheinbare Disymmetrie im Felde hervorrufen, besonders wegen des Umstandes, daß ihre relative Intensität im Feld sich oft sehr verändert[2]), so daß einige Linien ganz verschwinden, während dafür Linien erscheinen[3]), die vorher nicht wahrnehmbar waren.

Ich muß es daher dahingestellt sein lassen, ob die entwickelte Theorie in jeder Hinsicht zur Darstellung der Beobachtungen sich eignet. Doch zeigen die vorangehenden Entwickelungen, wie ich glaube, *daß die Annahme, es sei ein Molekularfeld H_0 — von starren Bedingungen abgesehen — die einzige treibende Kraft, welche auf die die Serienspektren erzeugenden schwingenden Teilchen wirkt, in wesentlich höherem Maße als die Lorentzsche Hypothese der Ionen geeignet ist die Erscheinungen des Zeemaneffektes in ihrer großen Mannigfaltigkeit und ihren charakteristischen Merkmalen darzustellen, wobei von Wichtigkeit ist, daß sie sich auch bei der Erklärung der Seriengesetze bewährt* — ein Problem, welches von der Lorentzschen Theorie ganz unberührt geblieben ist.

1) P. Zeeman, Versl. Amsterdam, Dez. 1907.

2) Vgl. insbesondere W. Hartmann, Inaug.-Diss. Halle 1907.

3) Hierher gehört vermutlich die von Runge u. Paschen, l. c. bei der Linie Hg 2536,72 erwähnte Erscheinung.

Damit wäre zunächst die Frage nach der Ursache der anormalen Zeemaneffekte auf die einfachere reduziert, die angenommenen periodischen Bewegungen des Moleküls im Felde zu erklären. Hierbei spielen aber eine wesentliche Rolle die ganz unbekannten Faktoren: Struktur des Atoms, Verteilung seiner Ladung, innere Bewegungen (wie z. B. die die molekularen Magnetfelder erzeugenden sehr großen Drehgeschwindigkeiten elektrischer Ladungen), endlich elektromagnetische Trägheitsreaktionen. Vielleicht hat man also eher aus dem Zeemaneffekt auf diese Faktoren zu schließen. Von der Lösung der Aufgabe, jeder einzelnen Serie ihren bestimmten Zeemaneffekt zuzuerteilen, muß die Theorie im gegenwärtigen Stand unserer Kenntnis der Atome wohl absehen. Doch ist es wichtig wenigstens zu zeigen, daß prinzipielle Schwierigkeiten den gemachten Annahmen über die Molekularbewegung im magnetischen Feld nicht entgegenstehen.

Es ist zunächst zu beachten, daß die Molekularstöße in der Lichtquelle, in Abwesenheit eines magnetischen Feldes, keine mit den hier in Betracht kommenden vergleichbare Rotationsgeschwindigkeit hervorbringen, worauf Lord Rayleigh hingewiesen hat; es würden sonst die Linien sämtlich diffus, da innerhalb gewisser Grenzen alle Rotationsgeschwindigkeiten möglich sein müßten. Hinfällig wird der Schluß nur, wenn man, wie dies in der Lorentzschen Elementartheorie des Zeemaneffektes angenommen wird, für die auf ein schwingendes Teilchen wirkenden Kräfte *vollständige* Kugelsymmetrie annimmt, und zwar für *alle* emittierten Linien — eine Annahme, die recht unwahrscheinlich ist. Die besondere Schärfe der Quecksilberlinien (zu denen jetzt noch Neon- und Heliumlinien zuzufügen sind) wird darauf zurückgeführt, daß bei einatomigen Gasen nach der kinetischen Theorie keine Rotationsenergie bestehen soll.

Ferner erfordert die von Runge und Paschen wenigstens sehr angenähert konstatierte Unveränderlichkeit der Zerlegung innerhalb einer Serie, daß die Hinzufügung neuer Elementarmagnete ohne merklichen Einfluß auf die Bewegung des Moleküls bleibe. Man wird also wohl die magnetische Polarisation des Moleküls von der Betrachtung ausschließen können.

Trägt das Molekül elektrische Ladungen — wobei seine

Gesamtladung, und daher sein Dopplereffekt in den Kanalstrahlen, null sein können — so wird das Magnetfeld die Bewegung beeinflussen. Allein, da die magnetische Kraft bekanntlich bei reibungslos bewegten Ladungen keine Arbeit leistet, bleibt die Energie der Rotation des Moleküls um seinen Schwerpunkt im großen ganzen dieselbe wie vorher, und es kann keine Zerlegung der Linien erfolgen.

Diesem Einwand kann man durch folgende Überlegung begegnen. In allen für Spektraluntersuchungen dieser Art benutzten Lichtquellen bewegte sich eine große Anzahl freier Elektronen, welche im Magnetfeld Schraubenlinien *mit einer und derselben Drehgeschwindigkeit* $\omega = eH/mc$ durchlaufen. Daß diese Veränderung ihrer Bewegung auf die Intensität der Linien von Einfluß ist, wurde oben bemerkt; es liegt die Annahme nahe genug, daß sie den Molekülen nun wesentlich größere Rotationsgeschwindigkeiten beizubringen vermögen, als wenn sie sich in geradlinigen Bahnen bewegen. Da der „Stoß" eines Elektrons auf ein Molekül ein recht schwieriger Begriff ist, wird man wohl besser von elektromagnetischen Impulsen bei großer Annäherung, ohne Berührung, reden; dann ist für die Energieübertragung von den freien Elektronen auf die Moleküle die Ladung derselben und die Verteilung dieser Ladung maßgebend. Bei Bandenspektren scheint nach den bisherigen Untersuchungen keine Ladung vorhanden zu sein; daraus erklärt sich, daß kein Zeemaneffekt der betrachteten Art bei ihnen eintritt.

Betrachten wir zunächst das Molekül als einen starren Körper, mit welchem die Elementarmagnete starr verbunden sind. Die Bewegung dieses Körpers im magnetischen Felde geht nicht kräftefrei vor sich. Doch erscheinen die Drehmomente, die das Feld auf ihn ausübt[1]), mit einem Faktor von der Form EH/AC multipliziert, wo A ein Trägheitsmoment in bezug auf den Schwerpunkt ist, und E eine ebenso mit den elektrischen Ladungen an Stelle träger Massen gebildete Größe bedeutet. Bei homogener Ladung ergibt sich also die Größenordnung eH/Mc (e gleich Ladung des Atoms,

1) Dieselben sind, unter der speziellen Voraussetzung homogener Ladung, von W. Voigt gegeben (Ann. d. Phys. 9. p. 115. 1902).

M seine Masse). Da aber e/Mc höchstens $^1/_{1000}$ des Kathodenstrahlwertes beträgt, so sind die durch diese Drehmomente hervorgerufenen Oszillationen viel langsamer als die zur Erklärung des Zeemaneffektes herangezogenen.[1]) Betrachten wir also zunächst die Bewegung als kräftefrei; es ist bekannt, daß die Integration, in diesem Falle wie auch beim schweren Kreisel, beim Pendel usw., auf eine Darstellung der Eulerschen Winkel durch elliptische Funktionen führt. Die Fourierschen Entwickelungen der Funktionen snx, cnx, dnx sind von Jacobi[2]) gegeben, und konvergieren in den meisten Fällen so rasch, daß nur die beiden ersten Glieder in Betracht kommen. Die Bewegung hat also den vorausgesetzten Charakter; im allgemeinen ist sie allerdings nicht periodisch, sondern es sind ω, ω' beliebig, und hängen von den Integrationskonstanten ab. Dies ist im allgemeinen bei ähnlichen Problemen der Fall, und es würde hierin ein wichtiger Einwand liegen, wenn man diese Konstanten wirklich als willkürlich betrachten könnte. Dies ist jedoch nicht der Fall. Denn da die Bewegung durch die Rotation der Elektronen um Achse H hervorgebracht wird, und andere Elektronenbewegungen keine merklichen Drehgeschwindigkeiten hervorzubringen imstande sind, wird die bei freier Bewegung im Raum unveränderliche Richtung des Flächenvektors parallel H liegen müssen, und die ebenfalls unveränderliche Komponente der Instantanrotation in Richtung des Flächenvektors gleich der Elektronenrotation $\omega = eH/mc$ zu setzen sein. Es bleibt dann nur noch die Größe der Rotationsenergie des Moleküls willkürlich. Unter Berücksichtigung der schon angegebenen Bedingungen dürfte dieselbe sehr wahrscheinlich einem Maximum- oder Minimumwert zustreben — schon aus Stabilitätsgründen — d. h. eine der Hauptträgheitsachsen wird bestrebt sein, sich in die Richtung von H zu legen, so daß schließlich eine gleichförmige Rotation um diese Achse bei der großen Mehrzahl der Moleküle resultiert. Der Winkel von H_0 gegen diese Achse, und somit gegen H, hat dabei einen durch die

1) Zwingend ist der Schluß allerdings nicht, da für das Zustandekommen einer Wirkung genügen würde, daß *ein* Trägheitsmoment bedeutend kleiner als die anderen sei, oder daß die Elementarmagnete im Atom beweglich seien.

2) G. C. J. Jacobi, Fundamenta nova § 39, Formeln (19), (21), (25).

Molekularstruktur bestimmten, unveränderlichen Wert ϑ_0; besitzt das Molekül Symmetrien, so sind mehrere Werte von ϑ_0 möglich. Auch $d\psi/dt$ hat nach Voraussetzung den unveränderlichen Wert $\omega' = eH/mc$. Wir haben diesen Fall oben behandelt; es entspricht ihm insbesondere, für $\vartheta = 90^0$, das Triplett Zn 4680 und die Homologen bei Hg, Cd usw.

Doch ist diese Bewegung ein viel zu spezieller Fall des allgemeinen Ansatzes, um zur Beschreibung der Erscheinungen auszureichen. Sie sollte uns nur als Beispiel dienen zur Festlegung scheinbar willkürlicher Integrationskonstanten, die in ω, ω' eingehen können.

Wie nun die von der Theorie geforderten Bewegungen des Moleküls oder, besser gesagt, der vielleicht im Molekül beweglichen Achse H_0 zustande kommen, und warum sie bei verschiedenen chemisch verwandten Molekülen dieselben sind, wie aus den Untersuchungen von Runge und Paschen über die Zerlegung einander entsprechenden Linien im magnetischen Feld hervorgeht, muß ich dahingestellt lassen. Daß periodische Bewegungen ausgezeichnet seien, bzw. daß die ihnen entsprechenden Anfangsbedingungen besonders häufig vorkommen, wie wir angenommen haben, wird man wohl als plausibel betrachten können, da hierbei jeder Punkt eine *geschlossene Bahn* durchläuft, im Gegensatz zu allgemeinen Bewegungen, wo ω', ω zueinander inkommensurabel sind.

In dieser Darstellung bildet also der Zeemaneffekt für die Rotationsbewegung des Moleküls, wie das Ohr für die Luftschwingungen, gewissermaßen einen *harmonischen Analysator*.

Tübingen, Januar 1908.

(Eingegangen 5. Februar 1908.)

3. *Zur Theorie der Kombinationstöne; von L. Hermann.*

Die vor kurzem erschienene Veröffentlichung von E. Waetzmann über den gleichen Gegenstand[1]) veranlaßt mich zur Mitteilung folgender Bemerkungen und Versuche.

Wie ich schon 1891 gezeigt habe[2]), läuft das Verfahren, durch welches Helmholtz die von ihm aufgestellte (einem unsymmetrisch elastischen Körper entsprechende) Differentialgleichung

$$(1) \qquad m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + ax + bx^2 + f\sin pt + g\sin qt = 0$$

näherungsweise integriert hat, darauf hinaus, daß x in eine nach Potenzen des Koeffizienten b fortschreitende Reihe entwickelt wird:

$$(2) \qquad x = x_1 + bx_2 + b^2x_3 + b^3x_4 + \ldots,$$

worin x_1, x_2 usw. Funktionen von t sind.

Wie Waetzmann selbst hervorhebt, ist dies nur richtig, wenn die Reihe für jeden Wert von t *konvergiert*, wofür Helmholtz, der die Konvergenzbedingung nicht erwähnt, keinerlei Beweis erbracht hat. Auch Waetzmann muß darauf verzichten, diesen Beweis zu führen, und *vermutet* nur die Konvergenz, weil das Resultat der Rechnung physikalischen Sinn hat.

Ich selbst hatte in meiner angeführten Arbeit von 1891 gefolgert, daß der Faktor b als so klein angenommen werden müsse, daß seine höheren Potenzen gegen niedrigere vernachlässigt werden dürfen, in welchem Falle die Reihe (2) konvergiert, aber die den Faktor b enthaltenden Amplituden der Kombinations-

1) E. Waetzmann, Ann. d. Phys. **24**. p. 68. 1907. Diese Abhandlung ist die Wiedergabe eines Teiles der Habilitationsschrift des Herrn Verfassers (Breslau 1907), von welcher ich durch die Güte desselben ein Exemplar vor längerer Zeit erhielt. Die infolgedessen von mir ausgeführte ausführlichere Arbeit wird demnächst im Archiv f. d. ges. Physiologie erscheinen.

2) L. Hermann, Zur Theorie der Kombinationstöne. Archiv f. d. ges. Physiologie **49**. p. 499. 1891. (Vgl. daselbst p. 505 Anm.)

töne, und erst recht deren Intensitäten, *sehr klein* sein müßten gegen die der Primärtöne, was den Tatsachen widerspricht.

Wenn man aber auch mit Waetzmann die Reihe als konvergent ansehen wollte, *ohne b* als sehr klein anzunehmen, so läßt sich doch, wie das folgende zeigen wird, eine strenge Begrenzung für die zulässige Größe von b, und somit für die relative Stärke der Kombinationstöne ableiten.

Der in Gleichung (1) angenommene unsymmetrisch elastische Körper würde, sich selbst überlassen, der Gleichung

$$m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + a x + b x^2 = 0 \tag{3}$$

gehorchen. Schon eine oberflächliche Betrachtung lehrt aber, daß ein solcher Körper nur in beschränktem Grade, d. h. nur bei nicht zu großer Beanspruchung der Elastizität, schwingungsfähig ist, und daß die Grenzen in dieser Beziehung um so enger werden, je größer b.[1]) Für $x = -a/b$ existiert nämlich eine zweite, allerdings labile Gleichgewichtsstellung; wenn aber x noch größere negative Werte als diesen erreicht, so wird die rücktreibende Kraft *negativ*, d. h. sie wirkt die bereits bestehende Elongation vergrößernd, so daß überhaupt keine Rückkehr zum Nullpunkt möglich ist. Die kritische Lage kann aber bei gegebenem b um so leichter überschritten werden, aus je größerer positiver Elongation der Körper losschnellt, oder mit je größerer Geschwindigkeit er von der positiven Seite her den Nullpunkt durchläuft.

Eine bestimmte Übersicht kann aber erst die *Integration* der Gleichung (3) liefern, welche über die *Eigenschwingung* des Körpers Aufschluß gibt, und welche in geschlossener Form ausführbar ist.

Hierzu wird zweckmäßig eine neue Variable eingeführt, indem man setzt

$$x = -\frac{6}{b} z - \frac{a}{2b}. \tag{4}$$

Dann geht (3) über in

$$m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - 6z^2 + \frac{a^2}{24} = 0.$$

1) Hier und in allen folgenden Ausführungen ist b als eine *positive* Größe angesehen. Für negative b (d. h. für eine Asymmetrie von entgegengesetztem Sinne) gelten also die nachfolgenden Folgerungen nicht, obwohl die Behandlung auch dieses Falles ebenso ausführbar wäre.

Durch Multiplikation mit $2(\partial z/\partial t)$ und Integration erhält man

$$\sqrt{m}\,\frac{\partial z}{\partial t} = \sqrt{4z^3 - \frac{a^2}{12}z + C}\,, \tag{5}$$

worin C eine Konstante ist. z (und ebenso x) ist also eine *elliptische Funktion* von t, die sich am einfachsten in der Weierstrassschen Form darstellen läßt.

Weit wichtiger aber als die genauere Formulierung und Diskussion dieser Funktion (hierüber vgl. unten p. 702 Anm. 2) ist die Untersuchung, unter welchen Bedingungen die elliptische Funktion eine *periodische Bewegung* bedeutet; denn schwingungsfähig muß der supponierte Körper vor allem sein, wenn die ganze Betrachtung Sinn haben soll. Hierzu muß der in (5) unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck dritten Grades drei reelle, und zwar verschiedene Wurzeln haben. Um aber hierüber zu entscheiden, muß zunächst über die Konstante C verfügt, d. h. bestimmte Anfangsbedingungen eingeführt werden. Dies habe ich für zwei nächstliegende Fälle getan.

Fall 1. Zu Anfang sei der Körper um die Länge A in positiver Richtung aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, und werde nun losgelassen. Dann ist

$$\text{für } t = 0 \qquad x = A \quad \text{und} \quad \frac{\partial x}{\partial t} = 0,$$

also mit der Variablen z

$$\text{für } t = 0 \qquad z_0 = -\frac{b}{6}\left(A + \frac{a}{2b}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_0 = 0,$$

womit sich aus (5) ergibt:

$$C = -4z_0^3 + \frac{a^2}{12}z_0,$$

so daß der unter dem Wurzelzeichen in (5) stehende Ausdruck die Form annimmt:

$$4(z^3 - z_0^3) - \frac{a^2}{12}(z - z_0) \quad \text{oder} \quad 4(z - z_0)\left(z^2 + z_0 z + z_0^2 - \frac{a^2}{48}\right).$$

Oszillatorische Bewegung tritt also nur ein, wenn die Gleichung

$$z^2 + z_0 z + z_0^2 - \frac{a^2}{48} = 0$$

zwei ungleiche reelle Wurzeln hat, d. h. wenn

$$a^2 > 36 z_0^2 \quad \text{oder} \quad a^2 > b^2 \left(A + \frac{a}{2b}\right)^2.$$

Es muß also sein:

$$b < \frac{a}{2A}, \quad \text{oder} \quad b = \frac{\delta a}{2A}, \tag{6}$$

worin δ ein echter Bruch ist.[1])

Nun sind die von Helmholtz aus Gleichung (1) berechneten Amplituden, mit welchen der angenommene unsymmetrisch elastische Körper die beiden Primärtöne und den Differenzton gibt, bzw.:

$$\lambda = \frac{f}{m(p^2 - r^2)}, \quad \mu = \frac{g}{m(q^2 - r^2)}, \quad \xi = \frac{b\lambda\mu}{m[(p-q)^2 - r^2]}, \tag{7}$$

hierin ist λ für das Helmholtzsche εu, μ für εv gesetzt, ferner ist

$$r = \sqrt{\frac{a}{m}} \tag{8}$$

die Zahl der Eigenschwingungen, welche der Körper bei gewöhnlicher symmetrischer Elastizität (in 2π Sekunden) machen würde. Mit Helmholtz können wir ferner r als sehr klein gegen p, q und $p - q$ ansehen, so daß wir für die bloße Betrachtung von Größenordnungen schreiben können

$$\lambda = \frac{f}{m p^2}, \quad \mu = \frac{g}{m q^2}, \quad \xi = \frac{b\lambda\mu}{m(p-q)^2}. \tag{9}$$

Unsere Aufgabe ist nun, die Größenordnung von ξ mit derjenigen von λ oder μ zu vergleichen. Helmholtz selbst sagt hierüber: sind λ und μ klein, so ist ξ, weil es das Produkt $\lambda\mu$ enthält, eine kleine Größe zweiter Ordnung; mit wachsendem λ und μ wächst dagegen ξ in größerem Verhältnis. Helmholtz sieht also den Differenzton nur dann als sehr schwach

1) Mit dieser Begrenzung von b ist zugleich die eingangs berührte Konvergenzfrage erledigt; das Helmholtzsche Integral ist konvergent, wenn b so klein ist, daß der unsymmetrisch elastische Körper noch schwingungsfähig ist; die Grenze der Schwingungsfähigkeit und Konvergenz wird also um so früher erreicht, je größer A, d. h. je stärker die Elastizität in Anspruch genommen wird. Die Größe der Beanspruchung ist aber durch die rechte Seite der Gleichung (1), resp. durch Werte des Integrals derselben gegeben, wie das folgende zeigt.

gegen die Primärtöne an, wenn diese selbst sehr schwach sind. Aber diese Betrachtung erscheint nicht ausreichend, weil die Berücksichtigung der Größe des Faktors b unerläßlich ist.

Wir setzen also den in (6) enthaltenen Wert von b in (9) ein, und dann für a nach (8) den Wert mr^2; dann wird

$$\xi = \delta \frac{\lambda \mu r^2}{2A(p-q)^2}.$$

Weiter ist nach dem eben Gesagten $r^2/(p-q)^2$ ein sehr kleiner echter Bruch, den wir ε nennen wollen, und endlich sind A und μ (oder λ) Amplituden, die gegeneinander gehoben werden können, weil sie von derselben Größenordnung sind, so daß sich ergibt:

$$\xi = \tfrac{1}{2}\delta\varepsilon\lambda. \tag{10}$$

Da $\frac{1}{2}\delta\varepsilon$ ein Produkt dreier echter Brüche, und einer derselben noch dazu sehr klein ist, so ist bewiesen, daß die Amplitude der Differenztöne nach dieser Theorie sehr klein sein müßte gegen die der Primärtöne.

Fall 2. Der Körper gehe für $t = 0$ mit der Geschwindigkeit v_0 in positiver Richtung durch die Gleichgewichtslage. Dann ist

$$\text{für } t = 0 \quad x = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = v_0,$$

also

$$z_0 = -\frac{a}{12}, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_0 = -\frac{b}{6}v_0,$$

folglich

$$C = -\left(\frac{a}{6}\right)^3 + m\left(\frac{bv_0}{6}\right)^2,$$

so daß der unter dem Wurzelzeichen in (5) stehende Ausdruck übergeht in

$$4z^3 - \frac{a^2}{12}z - \left(\frac{a}{6}\right)^3 + m\left(\frac{bv_0}{6}\right)^2.$$

Dieser Ausdruck muß nun wieder drei reelle Wurzeln haben, wenn der angenommene Körper schwingungsfähig sein soll. Nach den Gesetzen der kubischen Gleichungen findet man leicht, daß dies der Fall ist, wenn

$$mb^2v_0^2 < \frac{a^2}{3},$$

also

$$b < \frac{a^{3/2}}{v_0\sqrt{3m}} \quad \text{oder} \quad b = \frac{\delta}{v_0}\sqrt{\frac{a^3}{3m}},$$

worin wieder δ ein echter Bruch.[1])

Dies ist nun wieder in (9) einzusetzen; berücksichtigt man ferner wieder Gleichung (8), so erhält man:

$$\xi = \frac{\delta\,\lambda\,\mu\,r^3}{\sqrt{3}\,v_0\,(p-q)^2}.$$

Um für v_0 einen wahrscheinlichen Größenwert zu erhalten, erwäge man, daß die in Gleichung (1) einwirkende Beschleunigung $-\frac{g}{m}\sin q\,t$ die Geschwindigkeit $\frac{g}{m\,q}\cos q\,t$ hervorbringt, so daß, wenn die Bewegung von der extremen Lage ausgegangen wäre, der Nullpunkt mit der Geschwindigkeit

$$v_0 = \frac{g}{m\,q}$$

passiert werden würde. Mit Einsetzung dieses Wertes erhält man, da nach (9) $\mu = \frac{g}{m\,q^2}$,

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{3}}\,\frac{r^3}{q\,(p-q)^2}\,\lambda.$$

Mit Helmholtz können wir aber die Beträge

$$\frac{r}{q} = \varepsilon, \qquad \frac{r^2}{(p-q)^2} = \zeta$$

als echte Brüche ansehen, von denen ζ sehr klein ist. Da hiernach

$$\xi = \frac{\delta\,\varepsilon\,\zeta}{\sqrt{3}}\,\lambda, \tag{11}$$

und $\delta\,\varepsilon\zeta/\sqrt{3}$ ein Produkt aus vier echten Brüchen ist, von denen einer sehr klein, so ergibt sich wiederum die Amplitude des Differenztones als sehr klein gegen die der Primärtöne.[2])

---

1) Die vorstehende Gleichung wäre also zugleich die Konvergenzbedingung für die Helmholtzsche Integration bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0.

2) Die elliptische Funktion, welche die eigentliche Lösung der Gleichung (8) darstellt, lautet für Fall 1 und 2 in Weierstrassscher Form

$$x = p\left(\frac{t}{\sqrt{m}} - \varrho\right),$$

worin ϱ eine in beiden Fällen verschiedene Konstante ist. Für Fall 1

Was von den Amplituden gilt, gilt in noch viel höherem Grade von den *Intensitäten*. Die Tatsache, daß man mit so schwachen Tönen wie diejenigen verklingender Stimmgabeln den Differenzton ausgezeichnet hört, ist also mit der Helmholtzschen Theorie schlechterdings unvereinbar. Waetzmann meint freilich, man dürfe aus der Empfindungsstärke keine Schlüsse auf die physikalische Intensität ziehen. Welche Bedeutung dieser Einwand hat, läßt sich nunmehr gut übersehen. Die prächtigsten Differenztöne gibt der Königsche Apparat, welcher dieselben anhaltend hervorzubringen gestattet, und zwar durch Longitudinalschwingung zweier Glasröhren, die durch ein mit nassem Tuch bekleidetes Rad angestrichen werden. Beispielsweise hört man mit $f^4(2730\frac{2}{3})$ und $c^4(2048)$ den schönen und äußerst kräftigen Differenzton $f^2(682\frac{2}{3})$. Da es sich nur um Verhältnisse handelt, kann die Multiplikation mit 2π unterbleiben, also $p = 2730\frac{2}{3}$, $q = 2048$ gesetzt werden; r darf höchstens $= 30$ bis 40 angenommen werden; nehmen wir $r = 30$, so wird in Gleichung (11)

$$\varepsilon = \frac{30}{2048}, \qquad \zeta = \left(\frac{30}{682\frac{2}{3}}\right)^2;$$

δ wollen wir, da es 1 beliebig nahe kommen kann, zu ungunsten des Resultates $= 1$ setzen; dann ergibt sich $\xi : \lambda = 1 : 61174$, die Amplitude des Differenztones wäre also verschwindend klein

---

läßt sich die Funktion in eine gewöhnliche Amplitudenbeziehung umrechnen, nämlich (mit Wiedereinführung von x):

$$x = A - \frac{6H}{b} \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{H}{\sqrt{m}} t\right), \tag{12}$$

worin

$$H = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2} + bA - \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{bA}{3}(a + bA)}\right). \tag{13}$$

Für Fall 2 würde der entsprechende Ausdruck noch viel verwickelter werden. Aus den Gleichungen (12) und (13) ergibt sich, daß die Schwingungen nicht um die Lage $x = 0$, sondern um eine nach der positiven Seite abgelenkte Lage erfolgen. Dies zeigt auch die Helmholtzsche Näherungsintegration, in welcher Glieder vorkommen, die von t unabhängig sind (vgl. Helmholtz, ges. Abhandlungen 1. p. 261).

Die Ableitung der Weierstrassschen Funktionen, welche Gleichung (3) befriedigen, verdanke ich meinem verehrten Kollegen Herrn Prof. Schoenflies, der mich auch über die Bedingung belehrt hat, unter welcher dieselben eine periodische Bewegung bedeuten.

gegen die der Primärtöne, und das Intensitätsverhältnis wäre (mit Berücksichtigung der Schwingungszahlen) etwa $1 : 6.10^{10}$! Aber auch für die Noten von Stimmgabeln auf Resonanzkästen, z. B. h^1 und g^1, deren Differenzton G beim Verklingen nicht viel früher erlischt, als die Primärtöne selbst, ergäbe sich ein Amplitudenverhältnis von 1 : 227 und ein Intensitätsverhältnis von etwa 1:1,29 Millionen! Auch mit unzulässig hohen Werten für r ergeben sich für hohe Primärtöne so verschwindend schwache Differenztöne, daß eine gleichzeitige Wahrnehmung derselben mit den ersteren, geschweige denn eine annähernde Gleichschätzung, selbst für diejenigen ausgeschlossen erscheinen muß, welche jeden Parallelismus objektiver und subjektiver Intensität bestreiten; man müßte dann das Ohr als das trügerischste unserer Sinnesorgane betrachten. Übrigens fehlt für so weitgehende Annahmen jede tatsächliche Unterlage. Denn selbst M. Wien, der die zur Minimalerregung nötige Energie für verschiedene Tonhöhen ungemein verschieden findet, gibt für die hier in Betracht kommenden Höhenlagen keine sehr großen Empfindlichkeitsverschiedenheiten an, und stets für die tieferen Töne geringere Empfindlichkeit, so daß dies hier gar nicht in Betracht kommen kann.

Ich habe ferner nachgewiesen (l. c), daß das Trommelfell, welchem Helmholtz die für seine Theorie unentbehrliche Eigenschaft der unsymmetrischen Elastizität zuschreibt, für das Hören der Differenztöne keine Bedeutung hat. Dies wird zwar von Waetzmann nicht bestritten; er meint aber, man könne ebensogut den inneren Teilen des Ohres, z. B. dem Labyrinthwasser, asymmetrische Elastizität zuschreiben. Dies wäre aber nichts anderes als eine der Theorie zuliebe gemachte Hypothese ad hoc, während Helmholtz für seine Annahme eine tatsächliche Unterlage geltend machen konnte. Ich möchte noch darauf hinweisen, daß Gebilde dieser Art keinen festen Eigenton haben; denn aus den elliptischen Funktionen ergibt sich, daß die Schwingungsdauer von Größe und Vorzeichen der Anfangsamplitude oder Anfangsgeschwindigkeit abhängt.[1]) Auf

1) Für den Fall einer nicht linearen, aber doch symmetrischen Elastizität ($m\,\partial^2 x / \partial t^2 + a x + c x^3 = 0$) habe ich schon in der Arbeit

keinen Fall also könnten diejenigen Gebilde, welche als Resonatoren angesprochen werden, die von Waetzmann gemeinten Körper sein. (Für das Trommelfell würde, beiläufig bemerkt, die Eigenschaft, keinen festen Eigenton zu haben, nur vorteilhaft sein.)

Übrigens kann nicht nachdrücklich genug auf die große Unwahrscheinlichkeit hingewiesen werden, daß so leise Töne, wie sie zur Hervorrufung von Differenztönen genügen, auf Ohrgebilde wie das Trommelfell so stark einwirken sollten, daß die gewöhnliche Elastizitätsgleichung, nach welcher die Beschleunigung der Elongation einfach proportional ist, nicht gültig wäre.[1]) Man bedenke doch, daß die Amplituden der schwingenden Ohrteile bei sehr schwachen Tönen auf weniger als ein Milliontel Millimeter geschätzt werden, also auf weniger als $\frac{1}{600}$ Lichtwellenlänge.

Der von Waetzmann angeführte Umstand, daß es gelungen ist, objektive, auf Resonatoren wirkende Differenztöne zu erhalten, und daß in allen diesen Fällen unsymmetrische Elastizität schwingender Teile die Ursache sei[2]), beweist offenbar

---

von 1891 (l. c. p. 506) die aus der Integration hervorgehende elliptische Funktion entwickelt, und darauf hingewiesen, daß die Schwingungszahl hier von der Anfangsamplitude abhängt; in unserem jetzigen Fall kommt aber noch die Abhängigkeit von deren Vorzeichen hinzu.

1) Waetzmann sagt (p. 76): „Bei unsymmetrisch elastischen Körpern genügen schon sehr kleine Amplituden, um höheren Potenzen der Elongation Einfluß auf die rücktreibende Kraft zu verschaffen.“ Welche theoretische Betrachtung diesem Ausspruch zugrunde liegt, ist mir unklar geblieben. Die Gleichung (1) oder (8) führt doch absichtlich eine höhere Potenz ein, um der Asymmetrie Ausdruck zu geben.

2) Einer der ausgezeichnetsten Akustiker, Lord Rayleigh (Theory of sound. 2. Ed. London 1896. 2. p. 459) findet sich mit dem Erfordernis unsymmetrischer Elastizität durch die Bemerkung ab, solche sei fast überall vorhanden; schon in der Luft bestehe sie durch die Abwechselung von Verdichtung und Verdünnung. Waetzmann dagegen hebt ausdrücklich hervor, daß in der Luft keine objektiven Kombinationstöne entstehen, ihre Elastizität also symmetrisch ist. Übrigens scheint mir hier Waetzmann schon deswegen im Recht zu sein, weil die Theorie des Schalles in Luft auf die angebliche Asymmetrie keine Rücksicht nimmt, und doch vortrefflich mit den Tatsachen stimmt.

nichts für die Annahme, daß das *Ohr* durch *eigene* unsymmetrisch elastische Gebilde Differenztöne erzeuge.

Es sei noch eine von mir ausgeführte Versuchsreihe kurz angeführt, über welche die ausführlichere Arbeit näheres enthält. Nach der Theorie müßte die Amplitude ξ des Differenztones dem Produkt $\lambda\mu$ der Amplituden der beiden Primärtöne proportional sein (vgl. Gleichung 7 oder 9). Mittels einer sehr wirksamen Telephonsirene konnte ich einem in einem entfernten Zimmer befindlichen Hörtelephon gleichzeitig zwei Töne zuführen, die eine kleine Terz bildeten und im Anfang der dreigestrichenen Oktave lagen. Das Intensitätsverhältnis beider Töne konnte in weitem Bereich durch Einschaltung von Widerständen im Nebenschluß variiert werden. Schon wenn beide Töne sehr schwach sind, hört man deutlich den Differenzton. Wird dann einer der beiden Töne wesentlich verstärkt, so verschwindet der Differenzton vollkommen. Kurz ausgedrückt heißt dies: bei sehr ungleicher Stärke der Primärtöne hört man keinen Differenzton, während man ihn sehr gut hört, wenn der stärkere Ton auf die Intensität des schwächeren herabgedrückt wird. Mit der Helmholtzschen Theorie ist dies Resultat aus dem angegebenen Grunde unvereinbar; denn sie verlangt im Gegenteil, daß mit Verstärkung des einen Primärtones der Differenzton ebenfalls verstärkt wird.

Dagegen würde sich das Resultat höchst ungezwungen aus dem Prinzip erklären, welches vor Aufstellung der Helmholtzschen Theorie allgemein anerkannt wurde, daß nämlich das Ohr die durch Superposition zweier Töne hervorgebrachten Amplitudenschwankungen bei geringer Frequenz als Schwebungen, bei hinreichend großer als Ton wahrnimmt. Um den letzterwähnten Versuch sofort zu begreifen, braucht man nur die resultierende Kurve zweier Sinusschwingungen vom Periodenverhältnis 4:5 oder 3:4 zu konstruieren, und zwar einmal mit gleichen, einmal mit sehr verschiedenen Amplituden (etwa wie 1:10; in der ausführlicheren Arbeit sind zwei so gewonnene Kurven abgedruckt). Man erkennt sofort, daß die Intensitätsperiodik bei gleichen Amplituden sehr stark, bei ungleichen nicht merklich hervortritt. Wie hier das Auge, könnte sich auch das Ohr verhalten.

Obwohl die Herleitung der Differenztöne aus asymmetrischer Elastizität schwingender Ohrgebilde, insbesondere des Trommelfells, unmöglich erscheint, läßt sich schwer eine andere der bisher aufgestellten Theorien an ihre Stelle setzen. R. König schreibt dem Ohre die Eigenschaft zu, jede Periodizität von hinreichender Frequenz als Ton wahrzunehmen. Diese Vorstellung aber, abgesehen davon, daß sie darauf verzichtet, das Heraushören einzelner Töne aus einem Tongemisch zu erklären (was anscheinend nur eine Zerlegungstheorie wie die Helmholtzsche vermag), steht mit folgender Tatsache in direktem Widerspruch: Bei zwei gleichzeitigen Tönen von p und q Schwingungen in der Zeiteinheit hört man stets den Differenzton $p-q$, obwohl die Periodenzahl nur in denjenigen Fällen $p-q$ ist, wo $p:q = n:n-1$.[1]) Nur in diesen Fällen, z. B. bei der Quint (2:3), der Quart (3:4), der großen Terz (4:5) usw. ist die Zeit zwischen zwei Stößen identisch mit einer wirklichen Periode des resultierenden Vorgangs, keineswegs aber bei anderen Verhältnissen (z. B. 3:5, 5:8). Bei den Tönen c^3 (1024) und a^3 ($1706\frac{2}{3}$) wäre beispielsweise die Periodenzahl $341\frac{1}{3}$ (f^1), weil $341\frac{1}{3}$ der größte gemeinsame Teiler der beiden Schwingungszahlen ist; man hört aber (am Harmonium) niemals diesen Ton, sondern immer nur den Differenzton f^3 ($682\frac{2}{3}$), d. h. das Ohr nimmt nicht die Anzahl der Perioden, sondern die Anzahl der Schwingungsmaxima wahr.

Aber auch die alte Ansicht von Lagrange, daß die Schwebungen bei zunehmender Frequenz zum Differenzton verschmelzen, eine Ansicht, der ich selbst lange angehangen habe, widerspricht einer leicht zu bestätigenden Tatsache. Schon Helmholtz fiel es auf, daß sehr frequente Schwebungen (weit über 100 pro Sek.) noch getrennt als Schwirren oder Rauhigkeit empfunden werden, ohne zu einem Tone zu verschmelzen, obwohl schon einige 30 Schwingungen pro Sekunde

1) Ist n der größte gemeinsame Teiler der Zahlen p und q, so wiederholt sich $n$mal in der Zeiteinheit genau derselbe Vorgang, d. h. es erfolgen n Perioden. Stöße erfolgen jedoch, so oft der eine Ton den anderen um eine ganze Schwingung überholt hat, d. h. $p-q$mal in der Zeiteinheit. Nach $1/(p-q)$ Sek. kehrt stets dieselbe Phasendifferenz wieder, aber nicht dieselbe Phase; letzteres, d. h. ein Zusammenfallen der Stoßperiode mit der wahren Periode, tritt nur dann ein, wenn $p-q=n$, d. h., da $p=\alpha n$, $q=\beta n$, wenn $\alpha-\beta=1$.

genügen, um einen Ton zu geben. Stumpf[1]) gibt sogar an, noch bei über 400 Stößen pro Sekunde eine Rauhigkeit zu hören.

Ich höre aber am Harmonium mit den Noten h^3 und c^4 *neben* dem von Helmholtz beschriebenen Schwirren sehr deutlich auch den Differenzton c (128). Noch viel frappanter ist diese Doppelwirkung an dem schon erwähnten Königschen „Apparat für Stoßtöne", dessen longitudinal schwingende Glasröhren von c^4 bis e^5 reichen, und zu dem ich noch eine Anzahl Töne zwischen c^4 und d^4 hinzufügte, dergestalt, daß ich die verschiedensten Schwebungsfrequenzen von etwa 40 bis über 200 hervorbringen konnte. Im größeren Teile dieses Bereiches hört man nun neben dem dröhnenden Differenzton ungemein deutlich das Schwirren der Stöße. Erst bei Stoßzahlen über 170 erscheint für mein Ohr der Differenzton allein, und unterhalb etwa 50 die Schwebungen allein.

Wenn nun in dem angeführten Bereich derselbe Vorgang zwei so verschiedene Wirkungen hat, so muß man schließen, daß unmöglich die Differenztöne verschmolzene Schwebungen sein können; vielmehr müssen beide Empfindungen durch ganz verschiedene Sinnesapparate hervorgebracht werden, was für die Ansicht von Helmholtz spricht, daß die Schwebungen auf gleichzeitiger Erregung eines zwischenliegenden Resonators beruhen, während der Differenzton so wahrgenommen wird wie jeder Ton.

Helmholtz hat bekanntlich gefunden, daß die Differenztöne der *Doppelsirene* und des *Harmoniums* durch Resonatoren verstärkt werden, also einen objektiven Anteil haben, den er in bekannter Weise von Druckschwankungen in dem gemeinsamen Windraum herleitet. Besonders für das Harmonium schien es mir zweifelhaft, ob wirklich das Spiel einer durchschlagenden Zunge Druckschwankungen bewirkt, welche im Abstand der zweiten Zunge noch stark genug sind, um im Sinne der Helmholtzschen Theorie zu wirken.[2]) Außerdem hat letztere das

1) C. Stumpf, Tonpsychologie 2. p. 461 ff. Leipzig 1890.

2) An dem Harmonium des Instituts hält die Note d^2 (576) nach Aufhören des Tretens noch 45 Sek. in konstanter Stärke an, es entleert sich also bei jeder Zungenschwingung nur $\frac{1}{45.576}$, d. h. etwa $\frac{1}{26000}$ des

große Bedenken, daß sie ebensostarke Summations- wie Differenztöne ergibt, was entschieden den Tatsachen widerspricht.[1]) Bestärkt wurde ich in meinen Bedenken durch die unerwartete Erfahrung, daß die Doppelsirene, von der mir zwei Exemplare zur Verfügung stehen, eine mit schiefen und eine mit senkrechten Bohrungen (letztere für Motorbetrieb), in vielen Fällen, auch wenn beide Töne von demselben Windkasten produziert wurden, keinen objektiven Differenzton gab, während das Harmonium, das theoretisch ungünstigere Bedingungen bietet, völlig regelmäßig wirkt. Ich versuchte nun am Harmonium, ob wirklich der gemeinsame Windraum für die Entstehung objektiver Differenztöne Bedingung ist. Zu diesem Zwecke wurde das Harmonium, welches zwei getrennte Register hat, so abgeändert, daß die beiden Primärtöne von vollständig *getrennten Windkästen* produziert wurden; das nähere ist in der ausführlicheren Arbeit zu finden. Auch jetzt wurden die Differenztöne durch den zugehörigen Resonator verstärkt, nicht aber (wie schon Helmholtz angibt), wenn beide Primärtöne auf zwei Harmonien verteilt wurden. Man muß hieraus schließen, daß objektive Differenztöne zustande kommen, *wenn zwei Schwingungen einer gemeinsamen Masse, namentlich einem Holzkörper, direkt zugeführt werden.*

Hierdurch geleitet versuchte ich weiter, ob der Königsche Apparat für Longitudinalschwingungen (vgl. oben), dessen mächtige Differenztöne nie einen Resonator erregen, dies tun, wenn die beiden Glasröhren, statt an getrennten, an einem Eisen-

---

Windvorrats; daß dies in 5—7 cm Abstand an der zweiten Zunge noch die theoretisch vorausgesetzte Druckschwankung bewirkt, erscheint zweifelhaft. An der Doppelsirene betragen die abwechselnd freigegebenen Öffnungen sehr viel mehr als die spaltförmigen einer Zunge, nämlich bei 12 Löchern zu 4 mm Durchmesser eine Öffnung von 14 mm Durchmesser, und die zweite Löcherreihe steht unter Umständen nur 2—3 mm ab in einer Umfangsstrecke bis zu 200 mm Länge; hier sind also, auch abgesehen von der Heftigkeit der Luftbewegung, die Verhältnisse der Theorie günstig, am Harmonium entschieden nicht.

1) In der von Helmholtz aufgestellten mathematischen Form, welche übrigens von ihm selbst nur als eine Annäherung bezeichnet wird, würde die Theorie außerdem verlangen, daß die Kombinationstöne die halbe Amplitude der Primärtöne haben. Dieser Einwand kann aber durch eine geringe Modifikation der Theorie beseitigt werden.

rahmen aufgehängten hölzernen Backen, direkt an einem gemeinsamen Holzbrett befestigt sind. Diese Umänderung konnte auf sehr einfachem Wege (vgl. die ausführliche Mitteilung) bewerkstelligt werden, und ergab zweifellose objektive Differenztöne.

An Saiteninstrumenten mit gemeinsamem Resonanzkörper (Geige, Klavier) konnten objektive Differenztöne nicht mit Sicherheit nachgewiesen werden, wie diese Instrumente überhaupt für Erzeugung von Differenztönen relativ wenig geeignet scheinen, eine noch aufzuklärende Tatsache. Dagegen erhielt ich sehr sichere Ergebnisse an Stimmgabeln. Schon Waetzmann[1]) erhielt verstärkte Differenztöne, wenn er zwei tönende Stimmgabeln mit ihren Stielen aneinander drückte, konnte jedoch eine Objektivität jener Töne nicht sicher feststellen. Ich selbst schraubte, im Anschluß an die Versuche am Königschen Apparat, zwei Stimmgabeln auf ein großes, auf Holzfüßen stehendes Brett aus Tannenholz von 1 cm Dicke. Beim Anstreichen der Gabeln mit dem Bogen entstand jedesmal ein objektiver Differenzton, wie der Kugelresonator erwies. Wurden die Gabeln auf einen hölzernen Resonanzkasten geschraubt, der auf den Differenzton abgestimmt war, so sprach zwar der Kugelresonator nicht stärker an, als mit dem einfachen Brett, jetzt hörte man aber den Differenzton sehr kräftig aus dem Kasten erklingen, wenn man das Ohr seiner Mündung nähert. Am besten eignen sich zu diesen Versuchen die Gabeln der zweigestrichenen Oktave.

Einen anderen Fall, in welchem bei gleichzeitiger Beeinflussung eines starren Körpers durch zwei Töne objektive Differenztöne entstehen, hat schon Schaefer gefunden.[2]) Er verband ein sogenanntes Stentormikrophon mit einem Stentortelephon, und ließ vor dem ersteren zwei Töne mit Pfeifen oder Stimmgabeln produzieren; die Differenztöne erregten den Resonator. Ich habe diesen Versuch mit demselben Resultat wiederholt; besonders schön gelingt er mit Stimmgabeln auf Resonanzkästen, deren Mündungen man dicht an den Mikrophontrichter hält. Auch mit der oben p. 706 erwähnten

1) E. Waetzmann, Ann. d. Phys. 20. p. 843. 1906.
2) K. L. Schaefer, Ann. d. Phys. 17. p. 572 ff. 1905.

Telephonsirene, deren beide, um eine kleine Terz differente Töne unter Einschaltung einer geeigneten Transformation dem Stentortelephon zugeführt wurden, gelang der Versuch.

Es könnten nun zunächst Zweifel darüber entstehen, ob das Mitschwingen eines Resonators ein sicherer Beweis für die Existenz eines objektiven Tones ist; wenigstens ist kürzlich von Waetzmann die Möglichkeit diskutiert worden, daß die dem Differenzton zugrunde liegenden Maxima und Minima einen auf ihre Periode abgestimmten Resonator zum Mitschwingen bringen.[1]) Helmholtz hat offenbar dies für unmöglich gehalten; sonst hätte er ja einfach das Hören der Differenztöne auf diesem Wege dem entsprechenden Ohrresonator zuschreiben können. In der Tat scheint mir diese Möglichkeit mit dem Resonanzprinzip völlig unvereinbar[2]), und ich habe früher direkte Versuche angestellt, welche gegen sie entschieden haben.[3]) Neuerdings habe ich über dieselbe Frage Modellversuche mit einem schweren Pendel angestellt (vgl. die ausführlichere Mitteilung), welche vollkommen klar ergeben haben, daß symmetrische Einwirkungen auf einen schwingungsfähigen Körper, von anderem Tempo als dessen Eigenperiodik, welche ihn also nicht in Mitschwingung versetzen, dies auch dann nicht tun, wenn ihre Stärke im Tempo jener Eigenperiode auf- und niederschwankt. Dagegen tritt Mitschwingen durch *asymmetrische* Einwirkungen von beliebigem Tempo ein, wenn deren Stärke in der Periodik des anzusprechenden Körpers oszilliert. Dies ist auch leicht verständlich: denn symmetrische Einwirkungen pendelfremder Frequenz haben die resultierende Wirkung Null, und diese kann nicht durch pendelgemäße Größenschwankungen wirksam werden; asymmetrische pendelfremde Einwirkungen haben dagegen als resultierenden Effekt eine einseitige Ablenkung zur Folge, so daß ihre pendelgemäße Größenschwankung dem Resonanzprinzip entsprechend

1) E. Waetzmann, l. c. 20. p. 844 f. 1906.

2) Am kürzesten kann man dies wohl so begründen, daß zur Inanspruchnahme eines schwingungsfähigen Körpers Kräfte von bestimmten Richtungen nötig sind, also Schwankungen der Intensität eines symmetrisch oszillatorischen Vorganges, welche keine Vektorgröße ist, effektlos bleiben müssen.

3) L. Hermann, Archiv f. d. ges. Physiologie 49. p. 516, 518. 1891.

wirkt. Also dürfen wir als sicher annehmen, daß bloße Maxima und Minima eines oszillatorischen Vorganges einen zu ihrer Periodik passenden Resonator nur dann ansprechen können, wenn entweder der Vorgang selbst oder die Elastizität des Resonators asymmetrisch ist.[1]) Dies anzunehmen liegt aber bei den in Rede stehenden akustischen Versuchen kein Grund vor.

Hiernach scheint es festgestellt, daß in vielen Fällen starre Massen, namentlich von Holz, in sich objektive Differenztöne erzeugen, wenn ihnen gleichzeitig zwei Schwingungen mitgeteilt werden. Offenbar wird dies darauf zurückzuführen sein, daß in starren Körpern *keine reine Koexistenz* der Schwingungen stattfindet, wenn auch im großen und ganzen eine solche angenommen werden darf. Die Wirkungen starrer Resonanzböden sind überhaupt bisher theoretisch kaum untersucht; auch die folgenden Bemerkungen mache ich *unter allem Vorbehalt;* die Aufklärung der Vorgänge in solchen starren Körpern bei Mitteilung von Schwingungen muß einem Fachmann der theoretischen Akustik überlassen bleiben. Die sogenannten Resonanzböden werden allerdings, wie in den Lehrbüchern angegeben wird, hauptsächlich die ihnen mitgeteilten Töne günstig an die Luft übertragen. Dies schließt aber nicht aus, daß sie *daneben* durch Störung der einfachen Superposition neue objektive Töne, wie die Kombinationstöne, erzeugen. Ich wüßte wenigstens nicht, auf welchem anderen Wege man die Erscheinungen am Harmonium mit getrennten Windkästen, sowie viele andere von Schaefer, Waetzmann und mir gemachte Beobachtungen erklären will. Es scheint sogar, daß auch in der Luft bei besonders starken Schwingungen objektive Kombinationstöne durch Superpositionsstörungen zustande kommen können. Besonders für die Doppelsirene mit ihren heftigen Wirbelbildungen wird dieses Moment neben dem von Helmholtz hervorgehobenen in Frage kommen. Weiter in den Erklärungsversuchen zu gehen, dürfte vor der Hand unmöglich sein. Jedoch darf darauf hingewiesen

1) Wir sind hier durch Anschauung in etwas allgemeinerem Sinne zu demselben Ergebnis gelangt, auf welches die Helmholtzsche Integration der Gleichung (1) für den speziellen Fall der aus dem Zusammenklang zweier Töne hervorgehenden Maxima und Minima geführt hat.

werden, daß in starren, nicht vollkommen homogenen Körpern, namentlich in trockenem Holz, zweifellos mannigfache und unübersehbar verwickelte Zwangszustände herrschen, die auf das elastische Verhalten Einfluß haben müssen. Fast sicher wird hierdurch an vielen Stellen die Elastizität *unsymmetrisch* sein.[1]) Solche Stellen würden aber nach dem soeben an der Hand von Modellversuchen Entwickelten durch periodische Maxima und Minima in Schwingungen versetzt werden, also objektive Differenztöne erzeugen können. Auch könnte hier vielleicht die Helmholtzsche Theorie Anwendung finden, welche oben in ihrer Anwendung auf das Trommelfell bekämpft werden mußte; die auf die Größenverhältnisse gegründeten Einwände fallen hier vollständig fort, da die Kombinationstöne hier überhaupt nur als eine Art Nebenprodukt besonders gearteter Stellen auftreten, und keine bestimmte quantitative Beziehung zum Haupteffekt des Resonanzkörpers haben. Allerdings bringt jene Theorie nicht genügend zum Ausdruck, daß zur Erzeugung von Differenztönen ausgesprochene Maxima und Minima der Intensitäten erforderlich sind, wie die vorgetragene Anschauung und der oben p. 706 angeführte Versuch ergeben.

Bei dieser Entstehungsart der Kombinationstöne muß die Möglichkeit erwogen werden, daß auch im *Schädel* durch gleichzeitige Einwirkung zweier Töne ein objektiver Differenzton entsteht, welcher trotz seiner gewiß außerordentlichen Schwäche infolge der wunderbar großen Empfindlichkeit des Ohres und durch seine unmittelbare Einwirkung zur Wahrnehmung gelangt. Freilich kann man gegen diese Möglichkeit die oben p. 705 angeführte Betrachtung anführen. Es sei hier auf eine Erfahrung hingewiesen, die ich schon vor längerer Zeit mitgeteilt habe.[2]) Man hört den Differenzton sehr gut, wenn man zwei angestrichene oder angeschlagene Stimmgabeln mit ihren Stielen an die Zähne drückt, mögen die Gehörgänge offen oder

1) Zur Erklärung des Telephonversuchs könnte herangezogen werden, daß der Magnet eine Asymmetrie der Elastizität der Eisenplatte bedinge. Aber ich bezweifle, ob überhaupt genügende Transversalschwingungen der letzteren stattfinden, um diesen Umstand wirken zu lassen, und glaube, daß auch hier die molekularen Schwingungen innerhalb des starren Körpers den im Texte angegebenen Einflüssen unterliegen.

2) L. Hermann, Archiv f. d. ges. Physiol. 49. p. 512 f. 1891.

verstopft sein, also auch bei völligem Ausschluß des Trommelfells. Damals benutzte ich die Gabeln der eingestrichenen Oktave. Ich habe jetzt, wo mir auch die Gabeln der zweigestrichenen Oktave zur Verfügung stehen, den Versuch auch mit diesen angestellt, und finde diese Differenztöne ganz außerordentlich stark, was mich in der Annahme bestärkt, daß sie in der angedeuteten Weise im Schädel entstehen könnten.

So würden wir denn zu der von Helmholtz und, wenn auch in ganz anderem und meiner Überzeugung nicht entsprechenden Sinne, von Schaefer[1]) ausgesprochenen Meinung gelangen, daß es überhaupt nur eine Art von Kombinationstönen, d. h. objektive gibt.

Für die Physiologie des Ohres würde durch diese Auffassung der Kombinationstöne jeder Widerspruch derselben gegen die Helmholtzsche Theorie der Tonempfindungen hinweggeräumt sein; diese Töne würden so wie jeder andere objektive Ton zur Wahrnehmung gelangen. Bekanntlich gibt es noch andere Schwierigkeiten für diese Theorie, auf welche einzugehen jedoch hier nicht der Ort ist.[2]) Es ist zu hoffen, daß diese schöne Theorie schließlich siegreich bleiben wird; aber das läßt sich schon jetzt mit Sicherheit behaupten, daß die bisherigen Versuche, die Theorie in den anatomischen Gebilden der Schnecke spezieller verwirklicht zu erblicken, ohne Ausnahme verfehlt sind; vielleicht sind die Resonatoren überhaupt keine Gebilde von mechanischer Elastizität.[3])

Königsberg i. Pr., Physiologisches Institut.

---

1) K. L. Schaefer, Archiv f. d. ges. Physiol. 78. p. 526. 1900. Schaefer suchte eine Entstehung objektiver Kombinationstöne im Ohre aus ähnlichen Ursachen abzuleiten, wie sie Helmholtz für die entsprechenden Vorgänge an Doppelsirene und Harmonium angenommen hat.

2) Besonders wichtig und noch nicht erledigt ist der von M. Wien erhobene Einwand, Festschrift für Wüllner p. 28—35. 1905.

3) Vgl. meine Ausführungen im Archiv f. d. ges. Physiologie 56. p. 497 f. 1894.

(Eingegangen 12. Februar 1908.)

4. *Zur Frage der Beugung der Röntgenstrahlen; von B. Walter und R. Pohl.*

(Hierzu Taf. V, Figg. 1 u. 2.)

Die Herren Haga und Wind haben in mehreren Abhandlungen den Nachweis zu führen gesucht, daß die Röntgenstrahlen — ebenso wie diejenigen des Lichtes — einer Beugung fähig sind; und ihre Versuche werden auch in neuerer Zeit vielfach als ein endgültiger Beweis für das Vorhandensein dieser Erscheinung angesehen. Demgegenüber glauben wir nun aber dartun zu können, daß die von den genannten Beobachtern einer Beugung der Strahlen zugeschriebenen Erscheinungen sämtlich auf ganz andere Ursachen zurückzuführen sind, und daß demnach bis jetzt irgend ein experimenteller Anhalt für eine Beugung dieser Strahlengattung nicht vorhanden ist.

Die erste Veröffentlichung von Haga und Wind stammt aus dem Jahre 1899[1]); und die damals von ihnen benutzte Versuchsanordnung war kurz die folgende. Von den Strahlen einer Röntgenröhre wurde durch einen Spalt, der 14, 18 oder 25 μ weit gemacht wurde, und dessen Höhe 1 cm betrug, ein schmales Bündel ausgeblendet. Dieses fiel in 75 cm Abstand auf einen zweiten Spalt, den sogenannten Beugungsspalt, dessen Höhe 3 cm war, und dessen Weite sich von 14 bis zu einigen μ keilförmig verjüngte. Zumeist in 75 cm Abstand hinter dem Beugungsspalt war ferner eine photographische Platte angebracht, auf der nach Belichtungszeiten von 29—200 Stunden Bilder dieses Spaltes erzeugt wurden. Diese „Beugungsbilder", von denen eines, welches sich auf eine Spaltweite von oben 10 und unten 6 μ bezieht, nach der Originalabhandlung in Fig. 1, Taf. V, in etwa 14facher Vergrößerung wiedergegeben ist, zeigten an einigen Stellen, von denen diejenige der Fig. 1 durch einen Pfeil gekennzeichnet ist; schwache seitliche Verbreiterungen, welche die Beobachter eben nicht anders als durch eine

1) H. Haga u. C. H. Wind, Kon. Akad. te Amsterdam, 25. April 1899 und Wied. Ann. 68. p. 884. 1899.

Beugung der zur Darstellung des Bildes benutzten Röntgenstrahlung erklären zu können vermeinten. Aus den Abständen, sowie den zugehörigen Weiten des Beugungsspaltes ermittelten sie für die Wellenlängen der Strahlen in erster Annäherung Werte zwischen 0,012 und 0,27 $\mu\mu$, während Hr. Sommerfeld nach einer etwas anderen Theorie aus der deutlichsten ihrer Verbreiterungen $\lambda = 0{,}13\,\mu\mu$ berechnete.[1])

Die Versuche wurden später von Walter[2]) in erheblich vervollkommneter Weise wiederholt, indem er zunächst die Weite des ersten Spaltes auf $9\,\mu$ verengerte, ferner zweitens die beiden Spalte und die photographische Platte zusammen auf eine starre Eisenschiene setzte und endlich drittens eine viel stärkere Strahlung (Wasserkühlröhren) und daher erheblich kürzere Expositionszeiten anwandte. Die erhaltenen Bilder, von denen eines, welches sich auf ungefähr die gleichen Spaltweiten und Abstände wie das der Fig. 1 bezieht, in Fig. 2, Taf. V, in gleicher Vergrößerung abgebildet ist, wiesen — trotz ihrer viel größeren Schärfe — doch in keinem Falle jene lokalen Verbreiterungen auf, aus denen Haga und Wind auf eine Beugung geschlossen hatten, und Walter kam deswegen zu der Ansicht, daß jene Unregelmäßigkeiten lediglich auf die ungleichmäßige Empfindlichkeit der photographischen Schicht der Haga und Windschen Originalaufnahmen zurückzuführen seien. Dieselbe Erscheinung könne man nämlich in kleinerem Maßstabe fast auf jeder derartigen Aufnahme beobachten; und das verhältnismäßig starke Auftreten derselben bei den Bildern der genannten Beobachter erkläre sich ungezwungen durch die übermäßig lange photographische Entwickelung, welche die Verfasser für ihre Aufnahmen für nötig erachtet hatten. Walter selbst hatte nämlich seine Platten stets nur so lange entwickelt, bis in den nicht belichteten Teilen derselben die ersten Spuren des Schleiers auftraten.

Diese Erklärung der lokalen Verbreiterungen der ersten Bilder von Haga und Wind darf jetzt wohl für um so sicherer gelten, als auch die neueren Aufnahmen dieser Beobachter, die ganz nach Art der Walterschen hergestellt

1) A. Sommerfeld, Physik. Zeitschr. 1. p. 105. 1900 u. 2. p. 58. 1901.
2) B. Walter, Physik. Zeitschr. 3. p. 157. 1902.

wurden, und auf die wir sogleich näher eingehen werden, in keinem Falle eine solche Verbreiterung zeigen; und wenn daher diese Erscheinung in der von Wind herrührenden schematisierten Form[1]) noch gegenwärtig sogar in Lehrbüchern[2]) abgebildet wird, so ist dies nach unserem Dafürhalten in keiner Weise durch die Versuche gerechtfertigt.

Kommen wir sodann zu den neueren Versuchen von Haga und Wind[3]), die in Veranlassung des Walterschen Einspruches gegen ihre ersten Aufnahmen unternommen wurden, so benutzten nun die Beobachter für die drei Aufnahmen, mit denen sie sich diesmal begnügten, stets dieselben beiden Spalte, von denen der zweite, der Beugungsspalt, sich — bei einer Länge von 4 cm — von 27 μ bis zum vollständigen Schlusse verjüngte, während die Weite des ersten Spaltes stets 15 μ betrug. Die Entfernungen blieben die früheren.

Die aufgenommenen „Beugungsbilder" zeigten nun diesmal zwar nicht, wie erwähnt, jene lokalen Verbreiterungen der früheren, dafür aber glaubten die Verfasser jetzt für das letzte Ende derselben, da, wo sie die Weite ihres Beugungsspaltes von 8—3,5 μ abnehmend angeben, eine ziemlich plötzlich einsetzende und auch ganz außerordentlich rasch zunehmende Verbreiterung dieser Bilder feststellen zu können, während die letzteren für das Gebiet von 27—8 μ Spaltweite hin nahezu die von der rein geometrischen Theorie, d. h. ohne Berücksichtigung von Beugung, verlangte Keilform zeigen sollten.

Zur besseren Übersicht haben wir die Haga und Windschen Ausmessungen ihrer genannten drei Bilder in umstehender Fig. 3 durch die drei punktierten Kurven wiedergegeben, während die ausgezogene Linie derselben die sich bei rein geometrischem Strahlengang ergebende Breite des Bildes darstellt. Von den an der Abszisse der Figur angeschriebenen Zahlenreihen gibt die obere die von Haga und Wind zur Orientierung auf ihren röntgenographischen Aufnahmen des

1) C. H. Wind, Physik. Zeitschr. 2. p. 298. 1901.

2) Vgl. z. B. J. J. Thomson, „Elektrizitätsdurchgang in Gasen". Deutsch von E. Marx, Leipzig 1906. p. 546.

3) H. Haga u. C. H. Wind, Kon. Akad. te Amsterdam, 22. Oktober 1902; Ann. d. Phys. 10. p. 305. 1903.

Beugungsspaltes[1]) angebrachten Teilstrichmarken und die untere die zugehörigen Weiten dieses Spaltes an. Die Ordinaten der Fig. 3 endlich stellen die gemessenen bzw. berechneten Breiten der „Beugungsbilder" dar.

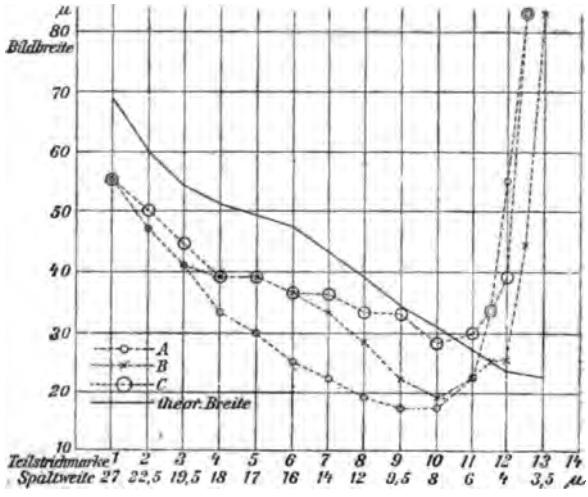


Fig. 3.

Der Vergleich der drei punktierten mit der ausgezogenen Kurve der Fig. 3 zeigt nun sofort, daß nach den Messungen der Beobachter in ihren drei in Rede stehenden Beugungsaufnahmen von einer Spaltweite von etwa 6 μ an plötzlich eine ganz gewaltige Verbreiterung des Beugungsbildes einsetzt, eine Verbreiterung, die, wenn sie der Wirklichkeit entspräche, natürlich kaum anders als durch eine Beugung der Strahlen zu erklären sein würde, wenn es allerdings auch schon sehr auffällig wäre, daß diese Erscheinung hier plötzlich in so un-

1) Diese „Spaltaufnahmen", die im Gegensatz zu den „Beugungsaufnahmen" nur den Zweck haben, die genaue Gestalt des Beugungsspaltes kennen zu lernen, werden in der Weise hergestellt, daß die photographische Platte — bei unveränderter Stellung des ersten und zweiten Spaltes — möglichst dicht hinter letzterem angebracht und also dieser mit einem *X*-Strahlenbündel von derselben Art abgebildet wird wie dasjenige ist, mit welchem auch das Beugungsbild hergestellt wird. Diese Art der Spaltausmessung ist jedoch, wie weiter unten gezeigt werden wird, nicht ganz zuverlässig.

geheurem Maßstabe einsetzt. Es läßt sich nun aber leicht der Nachweis führen, daß jene Verbreiterung in den fraglichen Bildern tatsächlich gar nicht vorhanden, *sondern den Beobachtern lediglich durch eine optische Kontrastwirkung vorgetäuscht worden ist.*

Um sich hiervon zu überzeugen, hat man nur auf ein Stück weißes Papier einen geradlinigen, schwarzen Strich von ungefähr $^1/_4$ mm Breite zu ziehen und auf diesen eine jener 17 fachen Vergrößerungen zu legen, welche Haga und Wind selbst von ihren in Rede stehenden Beugungsbildern auf photographischen Platten hergestellt und auch nach verschiedenen Seiten hin verschickt haben. Der schwarze Strich muß dabei möglichst durch die Mitte des Spaltbildes — bis zu seinem letzten Ende hin — gehen und ferner die Platte auch ein wenig gegen das Papier angedrückt werden, so daß Strich und Spaltbild möglichst zusammenfallen. Dann erscheint die in Rede stehende pinselartige Verbreiterung des letzten Endes dieser Bilder plötzlich wie weggeblasen, während demgegenüber der entsprechende Randschleier in den oberen Teilen der Bilder mit solcher Deutlichkeit hervortritt, daß dieselben hier auch ohne Messung sofort erheblich breiter erscheinen als unten.

Damit aber ist nun auch die von den Beobachtern so sehr vermißte Keilform ihrer Bilder — soweit wenigstens eine solche hier überhaupt erwartet werden kann — durchaus gewahrt; und eine Notwendigkeit aus ihren letzten Aufnahmen auf eine Beugung der Röntgenstrahlen zu schließen, liegt also nicht vor.

Was aber ferner die Ursache jener optischen Täuschung anbetrifft, welche die Veranlassung dazu war, daß Haga und Wind für das obere Ende ihrer Beugungsbilder eine viel zu geringe Breite maßen, so ist dieselbe darin zu suchen, daß hier der schwache Randschleier des Bildes gegenüber dem sehr kräftigen Kern desselben leicht übersehen wird, während man in den unteren Teilen des Bildes, wo der letztere fehlt, den ersteren natürlich auch stets in seiner ganzen Breite ausmißt. Bringt man jedoch jenen Kern nach der oben angegebenen Methode auch für die oberen Teile des Bildes zum Verschwinden, so tritt der Randschleier auch hier sofort in seiner ganzen Größe hervor.

Mit dieser Auffassung der Haga und Windschen Bilder stimmen übrigens auch die geometrischen Grundlagen derselben auf das beste überein; denn nach den oben angegebenen Spaltweiten und Entfernungen ergibt sich, daß der Kernschatten ihrer Bilder sich bis etwa 7,5 μ Spaltweite hinab erstreckte; und gerade von dort ab beginnt nun auch die von den Beobachtern an ihren Bildern gemessene Verbreiterung.

Eine besondere Diskussion verlangen ferner noch die *Unterschiede,* welche Haga und Wind bei ihren drei in Rede stehenden Bildern gefunden haben; und zwar um so mehr, als sie daraus sogar auf eine verschiedene Wellenlänge der harten und weichen Röntgenstrahlen schließen. Wir werden indessen sehen, daß auch diese Unterschiede sich von unserem Gesichtspunkte aus ganz einfach erklären.

Die letzteren selbst bestehen darin, daß bei den drei Aufnahmen *A*, *B* und *C* der Beobachter die von ihnen gemessene Verbreiterung nicht an derselben Stelle, sondern bei bzw. der Teilstrichmarke $10^1/_2$, 12 und 11 ihres Spaltbildes, entsprechend einer Spaltweite von bzw. 7, 4 und 6 μ, beginnt, so daß sie demnach auch für die dem Beginne der Verbreiterung entsprechenden Wellenlänge bzw. 0,16, 0,05 und 0,12 $\mu\mu$ berechnen. Und da nun ferner die Aufnahmen *A* und *C* nach ihren Angaben in der Hauptsache mit weichen, *B* dagegen vorzugsweise mit harten Röntgenstrahlen angefertigt wurde, so schließen die Beobachter demnach, daß der letzteren Strahlung die kleinere Wellenlänge zukomme, wie man es ja auch vom Standpunkte der von ihnen angenommenen Theorie wohl erwarten könnte.

Nach unserem Dafürhalten steht nun aber mit dieser Annahme zunächst schon die Tatsache in Widerspruch, daß die Breite des letzten Endes der drei Aufnahmen der Beobachter nach ihren eigenen Messungen in allen drei Fällen die gleiche ist (vgl. Fig. 3); denn nach jener Theorie müßte man doch offenbar erwarten, daß die Verbreiterung des Spaltbildes bei der mit härteren Strahlen hergestellten Aufnahme — ebenso wie sie erst bei einer kleineren Spaltweite einsetzt — so sich auch für das Ende des Spaltes in schwächerem Maße als bei den beiden anderen Aufnahmen zeigen sollte.

Im übrigen läßt sich nun aber auch zeigen, daß die er-

wähnten Unterschiede der in Rede stehenden drei Aufnahmen einfach dadurch entstanden sind, daß der Beugungsspalt selbst sich in den drei Monaten, welche zwischen den Aufnahmen lagen, entsprechend geändert hat. Für diese Annahme spricht nämlich zunächst schon der Umstand, daß auch die beiden röntgenographischen „Spaltaufnahmen" der Beobachter, von denen die eine vor Beginn und die andere nach Schluß ihrer drei Beugungsaufnahmen hergestellt wurden, sich hinsichtlich der Länge des Beugungsspaltes ganz beträchtlich unterscheiden, denn in der einen dieser Aufnahmen reicht nämlich das spitze Ende des Spaltbildes nur bis zur Marke 13, in der anderen dagegen bis nahe an 14 heran. Fast zur Gewißheit aber wird unsere Auffassung schließlich dadurch, daß auch die drei Beugungsbilder selbst sich um so weiter nach unten hin erstrecken, je später in ihnen die (scheinbare) Verbreiterung beginnt; denn das letzte Ende der drei Aufnahmen liegt bzw. bei den Teilstrichmarken $12^1/_2$, $13^1/_4$ und $12^3/_4$, d. h. der Spalt hatte sich eben an seinem unteren Ende bei der Aufnahme *B* erheblich weiter aufgetan als bei den beiden anderen.

Somit kommen wir also zu dem Schluß, daß *auch die neueren Beugungsaufnahmen von Haga und Wind bei genauerer Kritik in keiner Hinsicht einen Grund zu der Annahme einer Beugung der Röntgenstrahlen liefern — ebensowenig wie dies die älteren Bilder der genannten Beobachter, noch die zahlreichen Aufnahmen Walters aus dem Jahre 1901, noch auch endlich unsere vielfachen Versuche aus neuester Zeit getan haben.*

Denn wenn man vielleicht noch darauf hinweisen wollte, daß die neueren Aufnahmen der erstgenannten Beobachter nach ihren in Fig. 3 dargestellen Messungen die aus rein geometrischen Gründen am unteren Ende zu erwartende Breite jedenfalls ganz erheblich übertrafen, so haben wir dagegen zu bemerken, daß dies nach den obigen Darlegungen in gleichem Maße auch für die oberen Teile der betreffenden Bilder gilt, so daß es sich also hier nur um eine allgemeine Verbreiterung des ganzen Bildes handelt, eine Verbreiterung, auf die auch Haga und Wind niemals irgendwelchen Wert gelegt haben, da sie wohl wußten, daß eine geometrisch absolut vollkommene Abbildung eines solchen, außerordentlich feinen und noch dazu selbst durchaus nicht fehlerfreien Gebildes, wie es der Beugungs-

spalt darstellt, auf einer in so beträchtlichem Abstand dahinter aufgestellten photographischen Platte einfach unmöglich ist. Wir wollen daher an dieser Stelle auch nur noch auf eine einzige der vielen hierbei auftretenden Schwierigkeiten hinweisen, da uns diese von den genannten Beobachtern nicht genug hervorgehoben zu sein scheint. Dieselbe betrifft die genaue Parallelstellung des ersten, die Strahlenquelle bildenden Spaltes mit dem zweiten, dem abzubildenden: die Wichtigkeit dieses Punktes leuchtet ein, wenn man berücksichtigt, daß eine Verdrehung der beiden Spalte um nur *einen* Winkelgrad unter den vorliegenden Verhältnissen schon eine Verbreiterung des ganzen Beugungsbildes um etwa 50 μ bewirkt, während es sich hier doch um die Abbildung eines Objektes von 5 μ Breite und darunter handelt.

Alle diese Schwierigkeiten, vor allem aber auch die der Erlangung eines bei den in Rede stehenden Dimensionen noch genügend genauen Spaltes, die u. E. von Haga und Wind ebenfalls nicht in genügendem Maße gewürdigt worden ist, sind nun auch der Grund gewesen, warum auch wir trotz sehr zahlreicher, in neuester Zeit angestellter Versuche doch bisher nicht erheblich über die schon von Walter im Jahre 1901 erreichte Genauigkeit, wie sie etwa durch Fig. 2 der Taf. V dargestellt wird, hinausgekommen sind; wir hoffen jedoch, demnächst in Besitz eines nach gänzlich neuen Prinzipien hergestellten, wesentlich genaueren Spaltepaares zu gelangen, und gedenken dann diese Versuche noch einmal wieder aufzunehmen.

Schließlich sei noch eine weitere bei diesen Versuchen auftretende Fehlerquelle erwähnt, die von Haga und Wind nicht berücksichtigt worden ist, und die allerdings nicht die Herstellung des Beugungsbildes, sondern vielmehr nur die Ausmessung des Beugungsspaltes selbst anbetrifft. Es läßt sich nämlich leicht zeigen, daß die von den Beobachtern zu diesem Zwecke angewandte, auf p. 718 Anmerkung beschriebene Methode, für die hier in Betracht kommenden sehr kleinen Spaltweiten nicht mehr brauchbar ist, da sich nämlich mit Hilfe derselben einesteils für Spalte unter 4 μ Weite überhaupt kein adäquates Bild mehr erzielen läßt und da anderenteils auch die Breite des auf diese Weise erzeugten Bildes eines weiteren Spaltes mit der Größe der dabei auf-

gewandten Strahlungsenergie wächst. Zur Begründung dieser Behauptungen führen wir in nachstehender Tab. I unter B_o und B_u die Breiten der auf diese Weise erhaltenen Bilder des oberen bzw. unteren Teiles eines sehr vollkommenen, unter dem Mikroskope an den betreffenden Stellen bis auf etwa 0,5 μ Unsicherheit bzw. 7 und 1 μ breiten Spaltes von etwa 12 mm Länge an. Die photographische Schicht befand sich bei allen in der Tabelle angeführten Aufnahmen in 6 mm Abstand hinter diesem Spalte, während der in 75 cm Abstand davor aufgestellte Lichtspalt jeweilig die unter s_1 angegebene Breite hatte. Endlich ist noch in der Tabelle unter $s_1 i t$ das Produkt aus der Spaltbreite s_1 in μ, der die Röntgenröhre durchsetzenden, mittleren Stromstärke i in Milliampères und der Expositionszeit t in Minuten angegeben, ein Produkt, das als Maß der bei der betreffenden Aufnahme benutzten Röntgenenergie dienen kann, da die Härte der Röhre in allen Fällen annähernd die gleiche war.

Tabelle I.

Röntgenographische Breiten, B_o und B_u, zweier bzw. 7 und 1 μ breiten Teile eines Beugungsspaltes bei verschiedener Strahlungsenergie $s_1 i t$.

Abbildung	I	II	III	IV	V
s_1	7	100	100	100	400 μ
$s_1 i t$	3360	6500	7800	9300	20000
B_o	10	12	12	13	14 μ
B_u	4	5	6	7	8 μ

Man ersieht aus dieser Tabelle zunächst, daß das untere, etwa 1 μ weite Ende des Spaltes selbst bei der kleinsten aufgewandten Strahlungsenergie (Aufnahme I) im Bilde schon eine Breite von etwa 4 μ hatte, so daß also von einer adäquaten Abbildung des betreffenden Spaltteiles selbst in diesem Falle keine Rede mehr sein kann. Das so erzeugte Bild wird ferner bei Anwendung größerer Energiemengen immer breiter, so daß die Breite des genannten Spaltstückes bei der Aufnahme V sogar 8 μ betrug, d. h. also um etwa 6 μ zu breit war; denn nach der geometrischen Berechnung — auf Grund des angegebenen Wertes von s_1 und der angeführten Ab-

stände — sollte nämlich auch in diesem Falle das Bild höchstens um $1\,\mu$ breiter sein als der Spalt selbst. Statt dessen ist es aber an beiden Enden um ungefähr $6\,\mu$, d. h. also um nahezu dieselbe Größe, zu breit. Diese letztere Beziehung gilt übrigens auch für die anderen Aufnahmen, wie man einfach daraus ersieht, daß die Differenz $B_o - B_u$ für alle nahezu die gleiche und zwar gleich der Differenz der in Frage kommenden Spaltbreiten selbst ist.

Indem wir uns hinsichtlich der Ursache dieser Verbreiterung eine besondere Untersuchung vorbehalten, entnehmen wir daraus in bezug auf die hier in Rede stehende Frage schließlich noch das, daß die von Haga und Wind angegebenen Weiten zumal des letzten Endes ihres Beugungsspaltes sämtlich um ein beträchtliches zu groß waren, so daß sich demnach auch die Größe der von ihnen aus ihren Beugungsversuchen berechneten Wellenlängen um ein ganz beträchtliches erniedrigt; denn diese Wellenlänge nimmt, wie die Beugungsformel zeigt, *quadratisch* mit der Spaltbreite ab.

Da jedoch die Haga und Windschen Versuche nach unseren obigen Darlegungen in keiner Weise auf eine Beugung und also auch ebensowenig auf eine Wellenlänge der Röntgenstrahlen schließen lassen, so kann also dieses letztere Resultat nach unserem Dafürhalten höchstens in dem Sinne verwertet werden, daß danach *die fragliche Wellenlänge — falls überhaupt eine solche existiert — jedenfalls noch weit unter der von Haga und Wind gefundenen Größenordnung, d. h. also weit unter $0{,}1\,\mu\mu$ gelegen sein muß* — und das ist also schließlich auch das Resultat dieser Abhandlung.

Hamburg, Physik. Staatslaboratorium, im Januar 1908.

(Eingegangen 16. Januar 1908.)

5. *Zur Theorie der Überspannung bei elektrolytischer Gasabscheidung;* *von Hans Georg Möller.*

(Vorläufige Mitteilung.)

Der erste, der das Problem der Überspannung in Angriff nahm, war Nernst. Aus den Messungen von Caspari[1]), die auf seine Veranlassung hin unternommen wurden, schloß er[2]), daß für die leichte Abscheidung der Gase in Blasenform ihre Löslichkeit in der Elektrode wesentlich sei. Dieser Arbeit folgten eine Reihe experimenteller Untersuchungen und andere Erklärungsvorschläge. Während Caspari das Potential beobachtet hatte, welches zum Abscheiden des ersten Bläschens nötig war, nahmen Coehn und Dannenberg[3]) die Stromspannungskurve auf. Ihre Überspannungswerte stimmten mit den Casparischen hinreichend überein. Haber[4]) berechnet die Stromspannungskurve nach der logarithmischen Formel

$$E = a + b \log I, \tag{1}$$

worin E die Spannung, I der Strom, a und b Konstanten sind. Er deutet dieses Resultat durch Annahme einer träge verlaufenden Reaktion. Tafel[5]) schlägt vor, für diese träge Reaktion die Umsetzung $2H = H_2$ anzunehmen. Diese beiden Ansichten diskutiert später Lewis.[6]) Ostwald[7]) weist auf den Einfluß der Glätte der Elektrodenoberfläche hin, die nicht nur bei Quecksilber, sondern bei allen flüssigen Amalgamelektroden zu hoher Überspannung Veranlassung gebe, eine Annahme, die ebenfalls mehrfach diskutiert wird.[8])

1) W. Caspari, Zeitschr. f. physik. Chem. 30. p. 89. 1899.
2) W. Nernst, Theor. Chem. 5. Aufl. p. 745.
3) A. Coehn u. K. Dannenberg, Zeitschr. f. physik. Chem. 38. p. 609. 1900.
4) F. Haber, Zeitschr. f. physik. Chem. 32. p. 193. 1900.
5) J. Tafel, Zeitschr. f. physik. Chem. 34. p. 200. 1900.
6) G. N. Lewis, Zeitschr. f. physik. Chem. 56. p. 193. 1906.
7) W. Ostwald, Zeitschr. f. Elektrochemie 6. p. 39. 1899/1900.
8) Roskowki, E. Beetz, F. Streintz u. C. Fromme.

In der nachstehenden Untersuchung soll ein neuer Erklärungsversuch dargestellt werden unter Heranziehung der molekularen Anziehungskräfte, die an der Grenzfläche zwischen Elektrode und Elektrolyt tätig sind.

1. Theorie.

Auskunft über die molekularen Anziehungskräfte gibt die Kapillaritätstheorie. Die neuesten Fortschritte auf diesem Gebiet verdanken wir van der Waals und Bakker, die nicht nur die beiden Grundgesetze der Kapillartheorie, sondern auch die thermischen Eigenschaften der Kapillarkonstanten in den Bereich ihrer Untersuchungen zogen. Da ich auf ihren Anschauungen aufbauen will, muß ich einleitend über ihre Arbeiten kurz referieren[1]):

Nach diesen beiden Forschern ist an der Grenzfläche zwischen Flüssigkeit und Dampf keine Unstetigkeit, sondern eine wohldefinierte dünne Übergangsschicht anzunehmen. Die Dichteverteilung in dieser Schicht ist eine ganz bestimmte; die Differentialgleichung zur Berechnung der Abhängigkeit der Dichte ϱ von einer senkrecht zur Schicht verlaufenden räumlichen Koordinate h wird geliefert durch die Forderung der Stabilität in der Grenzschicht, d. h. durch das aus $\delta F = 0$ folgende Variationsproblem (F = freie Energie). Die Ableitungen von ϱ nach h gelangen folgendermaßen in den Ausdruck für F. Die freie Energie enthält als Anteil an der inneren Energie das Wechselwirkungspotential der Moleküle infolge ihrer molekularen Anziehungskräfte. Dieses wird in der üblichen Weise (vgl. Neumann, Theorie der Kapillarität, Leipzig) unter Annahme einer zunächst unbekannten, durch

$$\varrho = \varrho_0 + h\left(\frac{d\varrho}{dh}\right)_0 + \ldots \tag{2}$$

dargestellten Dichteverteilung berechnet, enthält also die Differentialquotienten von ϱ nach h.

1) J. van der Waals, Zeitschr. f. physik. Chem. **13.** 657; G. Bakker, l. c. **14.** p. 448; **20.** p. 500; **28.** p. 710; **33.** p. 487; **34.** p. 174; **36.** p. 683; **37.** p. 477; **42.** p. 72; **48.** p. 36; **51.** p. 356; **56.** p. 101; **59** p. 218.

Aus dem Resultat Bakkers, der Berechnung der Dichteverteilung in der Übergangsschicht aus der Bedingung für das Gleichgewicht, läßt sich mit Hilfe des Entropiesatzes folgern[1]): Eine Gasblase kann in einer Flüssigkeit erst dann entstehen, wenn das der Gleichgewichtsdichteverteilung entsprechende Dichtegefälle oder ein stärkeres bereits hergestellt ist. Und zwar ist diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Diese Folgerung, welche bereits Bakker, wenn auch ohne Beweis, zu seiner Bemerkung über den Siedeverzug benutzt, bildet den eigentlichen Übergang zu unseren Untersuchungen.

Den Vorgang der Gasentwickelung an einer Elektrode wird man sich demnach folgendermaßen zu denken haben: Zunächst wird durch die angelegte elektrische Spannung Gas in die Übergangsschicht zwischen Elektrode und Elektrolyt so lange hineingepreßt[2]) werden müssen, bis das nötige Dichtegefälle aufgebaut ist. Bei weiterer Elektrolyse müßte sich jetzt ein dünnes, über die ganze Elektrode ausgebreitetes Gashäutchen bilden. Dieses zieht sich, als labiles Gebilde zu kleinen „Elementarbläschen" zusammen, die sich ihrerseits wieder zu der großen Blase vereinigen, die man auf der Kuppe der Elektrode beobachtet.

Beim Zusammenschnellen der gasreichen Übergangsschicht an der Elektrode geht die Energie, die zu ihrem Aufbau nötig war, für die Gasentwickelung verloren. Sie setzt sich zunächst in die kinetische Energie des rasch verlaufenden Vorganges, dann in Wärme um. Diese Energie der Zwischenschicht, welche die Stromquelle über die normale Zersetzungsenergie hinaus zu liefern hat, ist die der Überspannung entsprechende.

Es berechnet sich somit die Überspannung $\Delta\varepsilon$ aus

$$\Delta\varepsilon \cdot 96540 \text{ Volt-Coul.} = \frac{E}{m} \text{ C.G.S.} = \frac{E}{m} 10^{-7} \text{ Volt-Coul.}$$

zu

$$\Delta\varepsilon = \frac{E}{m} \frac{10^{-7}}{96540} \text{ Volt,} \tag{3}$$

1) Die mathematische Durchführung der Beweise befindet sich in meiner demnächst erscheinenden Dissertation.

2) Damit nähern wir uns ganz den Anschauungen von Nernst. W. Nernst, Theoretische Chemie p. 745. 5. Aufl.)

wobei E die Energie in 1 qcm der Schicht in C.G.S. ausgedrückt, m die Gasmasse in 1 qcm der Schicht in Grammäquivalent ausgedrückt, bedeutet.

Der Einfluß der Zusammensetzung des Elektrolyten, der Temperatur und des Druckes äußert sich durch die Veränderungen, die diese Faktoren in der Dichteverteilung der Zwischenschicht Gas/Elektrolyt hervorrufen. Der Einfluß des verschiedenen Elektrodenmateriales zeigt sich in der verschieden starken Unterstützung, welche beim Aufbau der Zwischenschicht die elektrische Kraft von den molekularen Anziehungskräften erfährt. Elektroden, die das abzuscheidende Gas stark anziehen (*in extremo lösen*, *Nernst*, *l. c.*), werden daher die Überspannung herabdrücken.

Um die Energie E und die Masse m (Formel (3)) zahlenmäßig zu berechnen, wird man die van der Waalssche Methode für ein heterogenes System von drei Komponenten: Elektrode, Gas, Elektrolyt zu verallgemeinern haben. Den drei unabhängigen Dichtevariationen entsprechend, wird das Variationsproblem $\delta F = 0$ drei simultane Differentialgleichungen zur Bestimmung der Dichteverteilungen liefern. Diese Gleichungen werden aber zur wirklichen Durchführung der Rechnung zu kompliziert; sie enthalten außer den zwölf Konstanten der Zustandsgleichung[1]) noch *drei Reihen* von Konstanten, die zur Darstellung der vorläufig unbekannten Kräftefunktionen eingeführt werden mußten. Zur Vereinfachung des Problems wird in erster Linie die Beseitigung dieser drei Reihen von Konstanten, also die Kenntnis der Kräftefunktion nötig sein.

Eine mathematische Überlegung[2]) führt uns auf ein Wechselwirkungspotential Φ von der Form

$$\Phi = f \sum h k \int\int \frac{\varrho_k \varrho_h}{r} \cdot e^{-\frac{r}{\lambda_{kh}}} dk\, dk', \tag{4}$$

1) J. van der Waals, Die Kontinuität usw. 2. Kap. 2. § 2.

2) Für $\Phi = f \sum k h \int\int \varrho_k \psi_h\, dk\, dk'$, worin ψ_h das Potential der von der Molekülgattung h ausgehenden Anziehungskräfte für einen Pol im Volumenelement dk bedeutet, gelten folgende Bedingungen:

I. Die Energie ist überall endlich: $\Delta \psi_{(r=0)} = 4\pi\varrho$.

II. Das Wechselwirkungspotential ist innerhalb der homogenen Phase überall räumlich konstant: $\Phi = C$, höchstens ein New-

worin ϱ_h ϱ_k die Dichten der einzelnen Komponenten h, k in den Raumelementen dk, dk', r der Abstand der beiden Raumelemente, f eine Maßkonstante, λ_{kh} eine der Natur der Kräfte zwischen den Molekülen h und k entsprechende Konstante ist. Φ unterscheidet sich von dem Wechselwirkungspotential infolge Newtonscher Anziehungskräfte nur durch den Faktor $e^{-r/\lambda_{kh}}$. Dieser mit wachsendem r rasch abnehmende „Auslöschungsfaktor" bringt zur Darstellung, daß die molekularen Anziehungskräfte viel rascher wie die Gravitationskräfte abnehmen. Sie betragen in einer Entfernung λ_{kh} nur noch den e^{ten} Teil der Gravitation. Diese Überlegung zeigt den Zusammenhang von λ_{kh} mit dem Radius der Wirkungssphäre.

Für sein einkomponentiges System Dampf/Wasser hat van der Waals das Wechselwirkungspotential φ abgeleitet:

$$\varphi = \int\int \varrho^2 \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} dh\, dk'. \tag{5}$$

Formel (4) zeigt, daß das Wechselwirkungspotential Φ des allgemeinen Falles aus Funktionen φ linear zusammensetzt. Bei einer einfachen Superposition bleibt aber der Typus

---

tonsches Kraftfeld kann sich überlagern: $\Delta\,\Phi = 0$ (in erster Annäherung).

Hieraus folgt:

$$\Phi = f\int\int\int \sum \varrho_h\, \varrho_h \frac{1}{r} f(r)\, dk\, dk'.$$

Der Auslöschungsfaktor $f(r)$ muß folgende Eigenschaften haben:

1. $f(r)\,(r=0)$ ist endlich und von Null verschieden (Bedingung I).
2. $f(r)$ konvergiert mit wachsendem r stärker wie jede negative Potenz [Bedingung für die Konvergenz der van der Waalsschen Reihe für s (Zeitschr. f. physik. Chem. 13. p. 668)].
3. $f(r)$ ist überall stetig und endlich (eine Umformung nach dem Greenschen Satz muß möglich sein).
4. $f(r)$ enthält einen Parameter a derart, daß $\lim (a=\infty)\, \Delta\,\Phi = 0$ (Bedingung II).

Diesen Bedingungen genügen nur Funktionen von der Form

$$f(r) = a^{-\chi(r)}, \quad \chi(r) \leqq r, \quad \chi(r)_{(r=0)} = r.$$

Die Annahme der Funktion a^{-r} nach dem Vorbilde von van der Waals (Zeitschr. f. physik. Chem. 13. p. 706) wird also auch im allgemeinen Falll eine gute Annäherung liefern. Die Durchführung dieser hier nur skizzierten Überlegung findet sich in meiner Dissertation.

aller Gleichungen und somit auch der Resultate erhalten. Wir dürfen infolgedessen die einfachen Bakkerschen Formeln ohne weitere Rechnung auf den allgemeinen Fall übertragen und werden dabei qualitativ richtige Resultate erhalten.

Derartige qualitative Schlüsse sollen im nächsten Paragraphen gezogen und so die Theorie einer experimentellen Prüfung zugänglich gemacht werden.

2. Folgerungen aus der Theorie.

Die Aufdeckung des Zusammenhanges der Überspannung mit den molekularen Anziehungskräften gestattet unmittelbar noch keine experimentelle Prüfung, da die Werte der Anziehungskräfte nicht direkt gemessen werden können. Wir müssen daher eine zweite Gruppe von Erscheinungen aufsuchen, die ebenfalls vom Spiel dieser Anziehungskräfte abhängen, aber der Messung bei möglichst vielseitigen Versuchsbedingungen zugänglich sind. Schließt man von diesen rückwärts auf die Anziehungskräfte und weiter auf die Überspannung, so gelangt man zu den gewünschten Beziehungen zwischen zwei meßbaren Größen.

Diese zweite Gruppe meßbarer Größen sind die Kapillarkonstanten; sie bildeten ja den Ausgangspunkt zu dem Studium der molekularen Anziehungskräfte.

Die van der Waalssche Formel für die Kapillarspannung H einer Flüssigkeit gegen ihren Dampf

$$H = c \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2 dh, \tag{6}$$

worin c eine Konstante, ϱ und h dasselbe wie in Formel (2) bedeutet, zeigt, daß die Kapillarspannung an der Grenzfläche Gas/Elektrolyt mit dem Dichtegefälle wächst; da mit diesem auch die Überspannung wächst, so müssen *Kapillarspannung und Überspannung parallel gehen.*

Auch auf die Anziehungskräfte, die von der Elektrode ausgehen, gestatten die Kapillarkonstanten einen Schluß zu ziehen. Sind diese Kräfte groß, so wird sich die Flüssigkeit auf der Elektrode auszubreiten streben und der Randwinkel ϑ (Fig. 1) klein sein. Die Anziehungskräfte zwischen Elektrode

und Gas, die im entgegengesetzten Sinne wirken, sind wegen der geringen Dichte des Gases klein und durften daher hier vernachlässigt werden. Starke Anziehungskräfte der Elektrode unterstützen zu gleicher Zeit wirksam die elektrische Kraft beim Aufbau der Übergangsschicht und drücken die Überspannung herab. *Randwinkel der Gasblase und Überspannung müssen demnach gemeinsam sinken, d. h. ebenfalls parallel gehen.*

Ferner gibt die Theorie Aufschluß über einen möglichen Einfluß der Oberflächenrauhigkeit. Eine rauhe Oberfläche, in deren Rissen und Poren sich etwas Gas ansammeln kann, wird die Gasmasse in der Zwischenschicht (m in Formel (3) für Δs) vergrößern und die Überspannung herabdrücken. Da aber die Übergangsschichten, wie van der Waals gezeigt hat[1]), sehr dünn sind, so werden ziemlich gut polierte Elektroden sich immer noch wie rauhe Oberflächen verhalten. Nur bei Hochglanzpolituren oder flüssigen Amalgamelektroden wird ein Einfluß zu erwarten sein.

Schließlich sind alle Veränderungen der Oberfläche, die den Randwinkel beeinflussen, zu beachten. Von ihnen wird die Größe der Überspannung auch abhängen. So muß z. B. eine Verunreinigung der Elektrode mit minimalen Spuren von Fett, das bekanntlich die Benetzung durch wässerige Lösungen verhindert, die Überspannung stark erhöhen.

Eine weitere Folgerung aus unseren Anschauungen ist die Ausdehnung der Lippmannschen Messungen auf andere Metalle als Quecksilber. Das Dichtegefälle wird auch an Elektroden aus festem Metall durch elektrische Polarisation sicher geändert und mit ihm nach obiger Theorie die Kapillarspannung. Zugleich haben wir im Randwinkel ein Reagens auf Veränderungen der Oberflächenspannung, die sich ja bei festen Metallen nicht mehr durch Steigen und Fallen eines Meniskus kennzeichnen. Damit eröffnet sich ein weiteres Feld interessanter Anwendungen.

3. Experimenteller Teil.

Von den im vorigen Paragraphen mit Hilfe der Theorie vorausgesagten Erscheinungen beabsichtigte ich zunächst das

1) J. van der Waals, Zeitschr. f. physik. Chem. 13. p. 681.

Parallelgehen von Randwinkel und Überspannung zu prüfen. Zu diesem Zwecke sollte an Elektroden von verschiedenem Metall Wasserstoff aus $^1/_{10}$ normaler Schwefelsäure entwickelt werden. Die Zersetzungsspannung wurde in der üblichen Weise durch Aufnahme des Knickes in der Stromspannungskurve gemessen und durch Ermittelung des Potentials, bei dem sich das erste Bläschen bildete, kontrolliert. Die Potentialmessung wurde gegen eine ruhende Wasserstoffelektrode mit Hilfe der Kompensationsmethode, später direkt mit einem Dolezalekschen Binantenelektrometer ausgeführt. Um den durch gelösten Sauerstoff bedingten Reststrom herabzudrücken, diente als Arbeitselektrode eine zweite Wasserstoffelektrode. Zum Messen des Randwinkels diente folgende Einrichtung: Die auf der Elektrode aufsitzende Wasserstoffblase wurde durch ein Mikroskop anvisiert. Dieses besitzt einen Faden. Es ist um seine Achse drehbar; ein Teilkreis gestattet diese Drehung abzulesen. Der Faden wird dann einmal parallel dem Elektrodenrand (Stellung 1, Fig. 1), das andere Mal tangential dem Blasenrand (Stellung 2) eingestellt. Die Differenz der Ablesungen am Teilkreis gibt den Randwinkel ϑ.

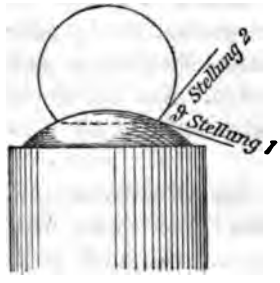


Fig. 1.

Zunächst gelang es allerdings nur auf Quecksilber eine einzelne, sauber aufsitzende Blase zu erzeugen. Auf anderen Metallen entstand ein ganzes Schwammgewächs von Blasen (Fig. 5a), die gegenseitig ihren Randwinkel verdeckten. Ich beschränkte mich daher zunächst auf Messungen am Quecksilber. Um verschieden hohe Überspannungswerte zu erhalten, wurde die Temperatur variiert.

Zur Ausführung der Messungen war die Konstruktion eines besonderen Thermostaten nötig, der die Temperatureinstellung genau und namentlich rasch zu wechseln erlaubte, da die Messungen wegen der Empfindlichkeit gegen die geringsten Verunreinigungen vor Fertigstellung einer ganzen Kurve nicht unterbrochen werden durften.

Die Beobachtungen ergaben folgende Kurven (Fig. 2,

Kurve 1): Die Überspannung Δs steigt zunächst mit abnehmender Temperatur, von 0,78 Volt bei Zimmertemperatur, von 9° an etwas steiler, erreicht bei 5,3° ein Maximum von 0,93 Volt und fällt dann wieder auf 0,86 Volt bei 2,0°.

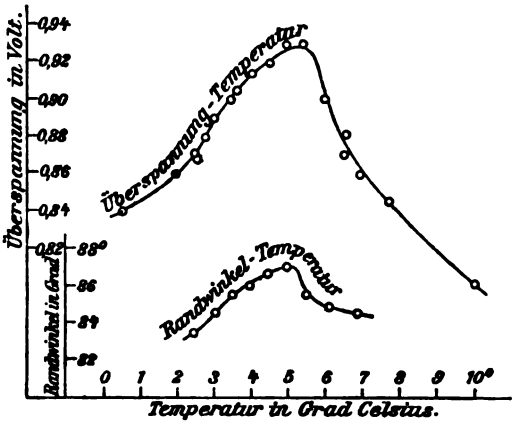


Fig. 2. Überspannungstemperatur- und Randwinkeltemperaturkurve für Quecksilberelektroden und Wasserstoff aus $^1/_{10}$ n. Schwefelsäure entwickelt.

Unsere Theorie verlangt dasselbe Maximum in der Randwinkeltemperaturkurve (ϑ, t-Kurve) und sagt damit ein ganz neues und unerwartetes Verhalten des Randwinkels voraus. Ich habe wenigstens in der Literatur, selbst in den umfassenden Arbeiten von Grunmach und Domke[1]) nichts darüber finden können. Der Verlauf der Kapillaritätskonstante des reinen Wassers mit der Temperatur zeigt ebenfalls keine Andeutung von einem solchen Maximum. Die Messungen des Randwinkels bei verschiedener Temperatur (Fig. 3, Kurve 2) ergaben in der Tat genau den theoretisch erschlossenen Verlauf der ϑ, t-Kurve. Der Randwinkel steigt zunächst mit abnehmender Temperatur von 9° an ebenfalls etwas steiler, erreicht genau wie die Überspannung bei 5,3° sein Maximum mit 87°, und fällt dann wieder bis auf 83° bei 2,1° C.

Die Kurve wurde zur Kontrolle jedesmal bei abnehmender Temperatur und sofort noch ein zweites Mal bei steigen-

1) L. Grunmach u. Domke, Wissenschaftliche Abhandlungen der Normaleichungskommission. Heft 3. 1907.

der Temperatur aufgenommen. Die zahlreich vorgenommenen Wiederholungen des Versuches ergaben Kurven von demselben Typus, immer mit einem Maximum von 5,3° und leidlich guter Übereinstimmung.

Durch das enge Zusammengehen der beiden Kurven (Fig. 3), sogar an Stellen, wo Unregelmäßigkeiten vorliegen, ist der Zusammenhang zwischen Kapillarität und Überspannung schlagend bewiesen und eine erste starke Stütze für die Theorie gewonnen.

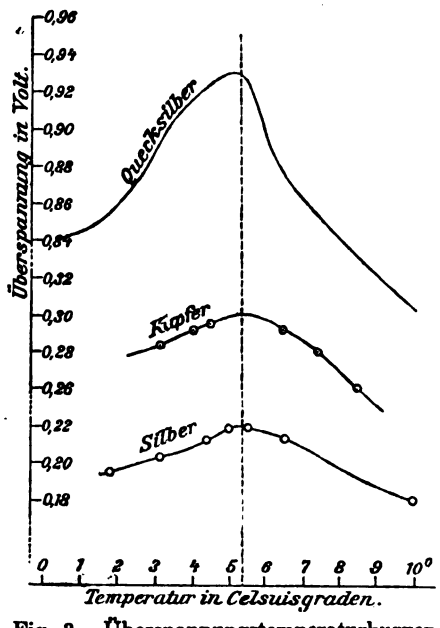


Fig. 3. Überspannungstemperaturkurven für Quecksilber, Kupfer, Silber.

Um zu entscheiden, ob man den Grund für das Auftreten dieses Maximums im Elektrolyten oder in der Quecksilberelektrode zu suchen hat, wurden Überspannungstemperaturkurven an noch anderen Metallen aufgenommen. Zeigen sie ebenfalls das Maximum bei gleicher Temperatur, so ist sehr wahrscheinlich die Ursache in dem kapillaren Verhalten des Elektrolyten zu finden. Die Messungen an Kupfer und Silber veranschaulicht Fig. 3. Das Maximum der Überspannung bei 5,3° konnte wieder mit Sicherheit nachgewiesen werden, obwohl die ganze Höhenlage der Kurve bei Wiederholung mit einer anderen Kupfer- oder Silberelektrode noch schwankte.

Da es hiernach richtig zu sein scheint, im Elektrolyten die Ursache für das Maximum zu suchen, so muß auch die Kurve, welche die Kapillarspannung des Elektrolyten gegen Luft darstellt, dieses Maximum erkennen lassen. Ihren Verlauf können wir sogar noch genauer voraussagen, wenn wir auf die Verschiedenheit der Kurven für Kupfer und Queck-

silber folgende Überlegung gründen: In dem verschieden starken Abfall der *gesamten* Kurve nach rechts zeigt sich offenbar der verschiedene Einfluß der Elektrode auf die Überspannung. Wie wir wissen, steigt mit sinkenden Kapillarkräften die Überspannung. Die Verschiedenheit der Quecksilber- und Kupferkurve müßte also durch die sehr plausible Annahme erklärt werden, daß die molekularen Anziehungskräfte des flüssigen Quecksilbers stärker mit der Temperatur abnehmen wie die des festen Kupfers. Ist diese Erklärung richtig, so müßte die Kurve für eine Elektrode mit konstanten Molekularkräften noch viel steiler im ganzen nach rechts sinken; diese durch Änderungen von seiten der Elektrode nicht beeinflußte Kurve würde dann den Einfluß des Elektrolyten genau angeben. Die ihr parallel verlaufende Kapillarspannungskurve des Elektrolyten an sich muß ebenfalls steil nach rechts sinken. Die nach der Steighöhenmethode ausgeführten Messungen (Fig. 4) bestätigen unsere Schlüsse vollkommen. — Durch Aufbau der Steighöhenkurve auf eine geeignet ansteigende Kurve, deren Neigung durch die Änderungsgeschwindigkeit der molekularen Anziehungskräfte zwischen Metall und Lösung mit der Temperatur gegeben ist, kann man also für beliebige Metalle die Abhängigkeit der Überspannung von der Temperatur finden. Für Quecksilber ist die Konstruktion in Fig. 4 durchgeführt. Die Abhängigkeit der Anziehungskräfte der Elektrode für die Lösung von der Temperatur ist als linear in erster Annäherung angenommen.

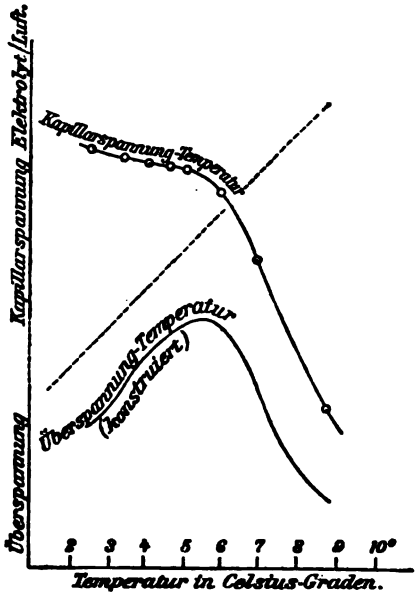


Fig. 4. Kapillarspannung–Elektrolyt–Luft–Temperaturkurve und die daraus konstruierte Überspannung–Temperaturkurve.

Der Parallelismus der konstruierten und der aufgenommenen Kurve ist evident.

Nun wurden die Randwinkelmessungen an anderen Metallen als Quecksilber wieder in Angriff genommen und damit die Aufgabe, die kleinen störenden Nebenblasen zu beseitigen. Veränderungen der Elektrodengröße und Gestalt, Nachbildung der Form der Quecksilberkuppe, verschiedenartige Polituren nutzten nichts. Endlich half folgendes Mittel: Über der Elektrode wurde ein etwas ausgehöhltes Dach angebracht, und unter ihm eine große Blase entwickelt, die sich zwischen

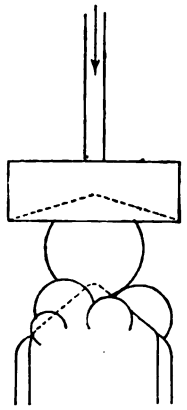


Fig. 5a.

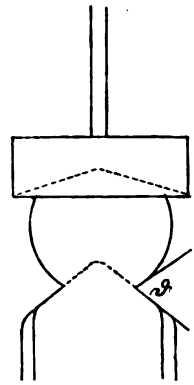


Fig. 5b.

Elektrode und Dach festsetzte (Fig. 5a). Beim Niedersenken des Daches drückt sich die große Blase auf der Elektrode breit und verschluckt dabei sämtliche störenden Nebenblasen. Zieht man das Dach wieder hoch, hat man nur noch die große Blase mit deutlich sichtbarem Randwinkel (Fig. 5b).

Damit waren aber die Schwierigkeiten noch nicht gehoben. Die mit basischem Wiener Kalk und Öl auf der Drehbank polierten und mit einem reinen Leder sorgfältig nachgeriebenen Elektroden zeigten ganz inkonstante Werte. Am ehesten gelang es, reproduzierbare Werte am leicht zu polierenden Nickel zu erhalten. Die Elektroden wurden lange Zeit mit trockenem basischen Wiener Kalk auf fettfreiem Leder unter ganz geringem Druck durch ein kleines Maschinchen poliert, das ich mir zu diesem Zweck konstruierte. Die Ab-

weichungen der Messungen bestanden in einer gleichzeitigen Erhöhung von Überspannung und Randwinkel gegen den durch langes Nachpolieren reproduzierbar erhaltenen Minimalwert. Wie die in der Tabelle angeführten Werte zeigen, ist der Grund der Fehler Verunreinigung durch Leinöl bzw. Paraffin.

Diese Abweichungen, obschon eine lästige Störung der Messungen, bilden somit wiederum eine vorzügliche Bestätigung der Theorie, und zwar im doppelten Sinne: Sie zeigen erstens das unbedingte Parallelgehen von Randwinkel und Überspannung, zweitens die am Ende des 2. Paragraphen vorausgesagte Erhöhung der Überspannung durch geringe Spuren benetzungverhindernder Verunreinigungen.

Elektrode	$\Delta\varepsilon$	ϑ	Art der Politur
Ni/H_2SO_4 $^1/_{10}$ n.	0,59 Volt	70°	Mit Paraffin in Berührung gebracht und mit Leder allein nachgerieben.
Ni/H_2SO_4 $^1/_{10}$ n.	0,32 „	51	Normaler Wert.
Cu/H_2SO_4 $^1/_{10}$ n.	0,62 „	71	Auf der Drehbank mit basischem Kalk und Öl poliert und mit Leder allein nachgerieben.
Cu/H_2SO_4 $^1/_{10}$ n.	0,23 „	37	Auf der Maschine mit trockenem Wiener Kalk lange Zeit nachpoliert.
Ag/H_2SO_4 $^1/_{10}$ n.	0,415 „	58	Vorläufige Werte, mit Eisenoxyd (aus Eisenoxalat durch Glühen hergestellt) und Alkohol auf der Maschine poliert.
Ag/H_2SO_4 $^1/_{10}$ n.	0,240 „	45	

Wir wiesen im theoretischen Teile nach, daß der Einfluß der Elektrode auf die Überspannung durch den Randwinkel, der Einfluß der Kombination von Elektrolyten und Gas durch die Größe der Kapillarkonstante an der Grenze Gas–Elektrolyt gekennzeichnet wird.

Wenn wir *alle* Messungen von Randwinkel und Überspannung, die *nur* die Kombination H_2/H_2SO_4 $^1/_{10}$ n. gemeinsam haben, in ein Koordinatennetz eintragen, so müssen sie sich zu einer glatten Kurve zusammenfügen. Fig. 6 bestätigt das. Diese Kurve enthält als Parameter nur noch die charak-

teristischen Eigenschaften der Kombination Gas–Elektrolyt. Diese sind mit dem Wechselwirkungspotential Φ gegeben. Denn kennt man dieses, so läßt sich prinzipiell alles andere aus $\delta F = 0$ berechnen. Für das an der Grenzfläche Elektrolyt–Gas gültige Wechselwirkungspotential wurde oben ein Ausdruck von der Form

$$\Phi = \int\int\int \left(\varrho_H^2 \frac{e^{-\frac{r}{\lambda_{H_2}}}}{r} + \varrho_H \varrho_{H_2O} \frac{e^{-\frac{r}{\lambda_{H_2,H_2O}}}}{r} + \varrho_{H_2O}^2 \frac{e^{-\frac{r}{\lambda_{H_2O}}}}{r} \right) dk\, dk' \tag{7}$$

abgeleitet. Die Bedeutung der Buchstaben ist dieselbe wie in Formel (4), nur wurde für $k\,k$ H_2 und H_2O dem vorliegenden Fall entsprechend eingesetzt. Dieses Φ enthält drei Konstanten λ_{H_2}, λ_{H_2,H_2O} und λ_{H_2O}. Die mathematische Formel für die Überspannungsrandwinkelkurve muß also ebenfalls drei Konstanten enthalten. Von diesen wird eine durch die theoretisch erschlossene Bedingung eliminiert, daß die Kurve durch den Nullpunkt geht, die beiden anderen sind empirisch aus den Messungen zu berechnen.

Diesen Anforderungen genügt die Formel

$$\Delta\varepsilon = \frac{e^{a\Phi} - 1}{b}. \tag{8}$$

Sie enthält die notwendigen drei Konstanten, von ihnen ist eine, nämlich die Eins, universell, und entspricht der Bedingung, daß die Kurve durch den Nullpunkt geht. Die anderen beiden, a und b, berechnen sich für die Kombination: Wasserstoff, Schwefelsäure $^1/_{10}$ normal zu

$$a = 0{,}0264\,,$$

$$b = 9\,.$$

Es gilt also für die Kombination H_2/H_2SO_4 $^1/_{10}$ n.

$$\Delta\varepsilon = \frac{e^{0{,}0264\,\Phi} - 1}{9} \text{ Volt},$$

wenn man ϑ in Grad ausdrückt, oder zur Berechnung mit Briggeschen Logarithmen handlicher:

$$\log(\Delta\varepsilon + 0{,}111) = 0{,}0115\,\vartheta - 0{,}954.$$

Die Kurve in Fig. 6 ist mit dieser Formel berechnet.

Der Gültigkeitsbereich der Formel ist ein sehr großer. Er erstreckt sich auf *alle Elektroden*, gleichgültig, aus welchem Metall sie bestehen, ob sie rauh sind, oder bis zu beliebigem Grade poliert, ob sie metallisch sauber sind, oder irgendwelche Verunreinigungen tragen. Er umfaßt ferner *alle Temperaturen*.

Die Übereinstimmung der Messungen mit der Formel ist eine so ausgezeichnete (die Abweichungen betragen nur etwa

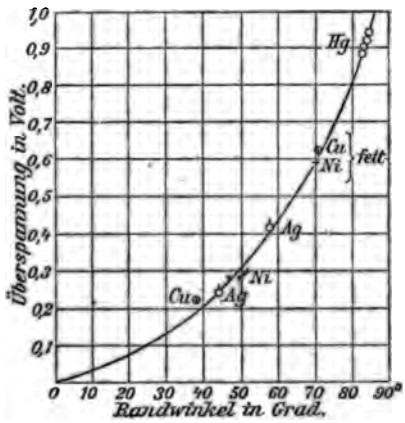


Fig. 6. Randwinkel-Überspannungskurve.

0,01 Volt), daß man eine handliche Methode zur Messung der Überspannung auf diesen Zusammenhang gründen kann. Der Randwinkel läßt sich mit jedem wagerecht gestellten Mikroskop rasch messen. Den zugehörigen Überspannungswert gibt die Formel oder die Kurve (Fig. 6) ebenso auf $^1/_{100}$ Volt genau an, wie die zeitraubende Aufnahme der Stromspannungskurve.

Als weiteres Anwendungsgebiet unserer Theorie wurde die Verallgemeinerung der Lippmannschen Beobachtungen

auf andere Metalle genannt. Das Studium der Lippmannschen Kurven für andere Metalle ist namentlich deswegen interessant, da jetzt die Möglichkeit vorliegt, weiteres Beob-

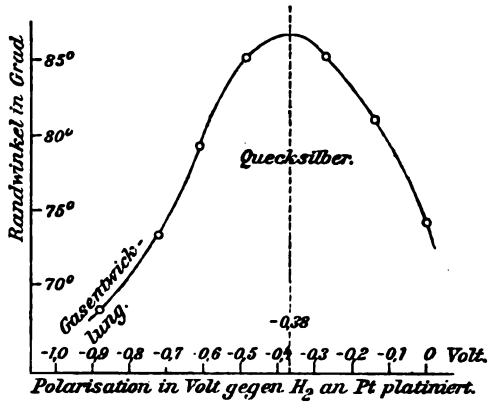


Fig. 7. Polarisation–Randwinkelkurve am Quecksilber.

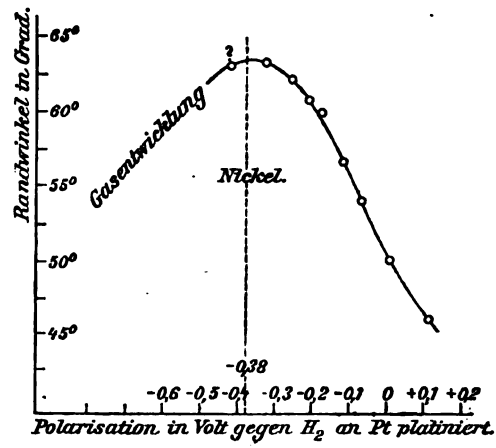


Fig. 8. Polarisation–Randwinkelkurve am Nickel.

achtungsmaterial zum Studium der noch fraglichen[1]) Theorie des absoluten Potentials zu gewinnen, die sich ja bis jetzt

1) W. Nernst, Referat über Berührungselektrizität, Beilage zu Wied. Ann. 1896. Nr. 8; F. Krüger, Göttinger Nachr. 1904. Heft 1. p. 33.

nur auf Messungen am Quecksilber gründete. Obwohl ich die Untersuchungen auf diesem Gebiet erst begonnen habe, will ich die beiden bis jetzt erhaltenen Kurven hier schon mitteilen.

Zur Kontrolle der Methode wurde zunächst die Randwinkelpolarisationskurve am Quecksilber aufgenommen. Das Resultat (Fig. 7) erweist den Randwinkel als brauchbares Reagens auf die Oberflächenspannung. Die Aufnahme der Kurve am Nickel zeigt Fig. 8. Wegen der über 0,32 Volt auftretenden Wasserstoffentwickelung war es leider nicht möglich, über das Lippmannsche Maximum hinauszukommen. Immerhin läßt die Gestalt der Kurve erkennen, daß es voraussichtlich an derselben Stelle liegt, wie beim Quecksilber, ein Resultat, welches für die Richtigkeit der Lippmannschen Theorie sprechen würde.

Zum Schluß möchte ich noch eine Bemerkung von Ostwald[1]) erwähnen, aus der man einen Einwand gegen unsere Theorie zu konstruieren versucht werden könnte. Ostwald sagt etwa folgendes: Die molekularen Anziehungskräfte können direkt mit der Überspannung nichts zu tun haben, denn sie sind nur von der Größenordnung des Binnendruckes, ungefähr 10000 Atm., 0,54 Volt; ein nicht abnorm hoher Wert für eine Überspannung, entspricht aber einem Druck von 10^{10} Atm.

Eine Arbeit gegen die molekularen Anziehungskräfte, von der Größenordnung der Verdampfungswärme, wäre allerdings viel zu klein. Eine solche kommt aber als reversibel umgesetzte Arbeit, zur Erklärung der irreversiblen Erscheinung der Überspannung, gar nicht in Frage. Wir betrachten hierzu vielmehr die weit größere Arbeit, die nötig ist, um die Zwischenschicht immer neu aufzubauen. Folgende Überschlagsrechnung soll zeigen, daß die Energie der Zwischenschicht bei weitem hinreicht, die Überspannung zu erklären.

Ich lege dabei die Zahlen für Wasser zugrunde, wie sie van der Waals in seiner Kontinuität, Bd. 1. p. 114, mitteilt. Ihre angenäherte Gültigkeit für verdünnte Lösungen darf man wohl annehmen. Die mittlere Wasserstoffdichte in der Zwischenschicht, die sicher kleiner wie die Gasdichte ist, nehme ich

1) W. Ostwald, Zeitschr. f. Elektrochemie 6. p. 39. 1899/1900.

gleich der Gasdichte an, um eher einen Fehler zugunsten des Einwandes zu begehen.

Die Dichte δ des Wasserstoffs in der Schicht beträgt:

$$\delta = 1 \text{ g-mol}/22 \text{ Liter} = {}^1/_2 10^{-4} \text{ g-mol cm}^{-3},$$

die Schichtdicke d ist

$$d = 1{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Mit einem Grammol kann man demnach eine Schicht von q qcm Größe aufbauen

$$q = \frac{1}{{}^1/_2 10^{-4} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-8}} = \frac{2}{1{,}5} 10^{12} \text{ cm}^2.$$

Der Energieüberschuß H in 1 qcm der Schicht ist

$$H = 155 \text{ C.G.S.}$$

Demnach beträgt die Energie der ganzen Schicht

$$E_s = 2 \cdot 10^{14} \text{ C.G.S.}$$

Einer Überspannung von 1 Volt würde für 1 g-mol H_2 die Energie

$$E_E = 1 \text{ Volt } 2 \cdot 96540 \text{ Amp. sec} = 10^8 \cdot 2 \cdot 96540 \cdot 10^{-1}$$
$$= \text{ca. } 2 \cdot 10^{13} \text{ C.G.S.}$$

entsprechen.

Die Energie der Zwischenschicht reicht also bei weitem zur Erklärung von 1 Volt Überspannung aus.

In dieser Arbeit werden nur die von van der Waals und Bakker in 13 Abhandlungen wohlbegründeten Anschauungen über die kapillare Zwischenschicht benutzt. Eine Hypothese ad hoc ist nicht darin enthalten.

Zusammenfassung.

Der Grundriß einer Theorie der Überspannung als Folgeerscheinung von molekularen Anziehungskräften wird auf den Bakkerschen Anschauungen über die kapillare Zwischenschicht aufgebaut. Aus dieser qualitativen Überlegung werden Zusammenhänge zwischen der Überspannung und den Kapillaritätskonstanten (dem Randwinkel der Blase und der Oberflächenspannung des Elektrolyten gegen Luft), der Oberflächenbeschaffenheit der Elektrode und zwischen Polarisation und der Oberflächenspannung der Elektrode gegen den Elektrolyt abgeleitet. Als brauchbares Reagens auf die Oberflächen-

spannung fester Metalle wird der Randwinkel der Blase aufgefunden.

Die Resultate der *Messungen* sind folgende:

I. Den Einfluß des Elektrolyten auf die Überspannung kennzeichnet die Kapillarspannungs- und Überspannungskurve des Elektrolyten gegen Luft. Sie geht mit der Überspannung parallel. Das wird bewiesen

1. Durch die Messungen am Quecksilber (Fig. 4) bei verschiedener Temperatur. Kapillarspannung und Überspannungskurve sind durch eine einfache geometrische Konstruktion ineinander überführbar.

2. Durch Messungen am Kupfer und Silber (Fig. 3) bei verschiedener Temperatur.

II. Den Einfluß der Elektrode auf die Überspannung kennzeichnet der Randwinkel. Er geht immer mit der Überspannung parallel. Dieses Gesetz ist von *völliger Allgemeinheit.* Es wurde experimentell bestätigt:

1. Für verschiedene Metalle (Fig. 6).

2. Für verschiedene Polituren (Tabelle).

3. Für Oberflächen, auf die Verunreinigungen gebracht wurden (Tabelle).

4. Für verschiedene Temperaturen (Fig. 2).

Der Randwinkel ϑ und die Überspannung $\Delta\varepsilon$ folgen dem Gesetz

$$\Delta\varepsilon = \frac{e^{a\vartheta} - 1}{b}.$$

Die Konstanten a und b drücken die charakteristischen Eigenschaften von Gas und Elektrolyt aus. Für die Kombination H_2/H_2SO_4 $^1/_{10}$ n. berechnen sie sich zu $a = 0{,}0264$, $b = 9$, wobei ϑ in Grad, $\Delta\varepsilon$ in Volt ausgedrückt ist. Zur Berechnung mit Briggeschen Logarithmen ist die Formel handlicher in der Gestalt

$$\log(\Delta\varepsilon + 0{,}111) = 0{,}0115\,\vartheta - 0{,}954 \text{ Volt.}$$

Infolge der ausgezeichneten Übereinstimmung der Messungen mit der Formel wird auf dieses Gesetz eine bequeme Methode zur Messung der Überspannung gegründet.

III. Das theoretisch erschlossene Parallelgehen von Randwinkel und Polarisation wird durch Messungen am Quecksilber

geprüft. Der Randwinkel wird dabei als taugliches Reagens auf Veränderungen der Oberflächenspannung erwiesen (Fig. 7).

Die Methode wird zur Aufnahme der Lippmannschen Kurve an einem festen Metall, nämlich Nickel, verwendet. Die Kurve (Fig. 8) läßt ein Maximum bei 0,38 Volt vermuten. Das Resultat steht im Einklang mit der Theorie der absoluten Potentiale.

Ausgeführt wurden die Messungen im physikalischen Institut der technischen Hochschule Charlottenburg auf Veranlassung und unter Leitung von Hrn. Prof. Dolezalek. Ihm bin ich für seinen wertvollen Rat zu wärmstem Danke verpflichtet.

(Eingegangen 28. Januar 1908.)

6. *Gleitbüschel auf Flüssigkeitsoberflächen;* *von Max Toepler.*

Je größer bei Gleitbüschelbildung auf Flüssigkeitsoberflächen die Ergiebigkeit der Stromquelle (angewendete Kapazität) ist, und je kleiner die Leitfähigkeit der Flüssigkeit, um so längere Zeit wird dem Büschel zur Ausbildung bleiben, bis man im Grenzfalle von einem *Dauer*gleitbüschel sprechen kann. Ganz analog geht ja auch pulsierendes Glimmen, die pulsierende Büschelentladung oder auch Funkenstrom in freier Luft bei hinreichender Stromintensität und genügendem Zuleitungswiderstande zu den Elektroden schließlich in Dauererscheinungen — Dauerglimmen, Dauerbüschel, Büschellichtbogen, Lichtbogen — über. An diesen *Dauer*entladungen lassen sich Untersuchungen und Messungen verschiedenster Art naturgemäß viel leichter ausführen als an stoßweise pulsierenden, sehr kurz dauernden Entladungsprozessen.

Leider stößt die Herstellung von Dauergleitbüscheln auf experimentelle Schwierigkeiten, z. B. die Notwendigkeit der Anwendung ungewöhnlich großer, hohe Spannungen vertragender Kapazitäten. Die mir verfügbare Kapazität, 74 große Leidener Flaschen von der Gesamtkapazität 310 000 cm (0,34 Mikrof.), welche sich bis 25000 Volt beanspruchen ließen, genügen doch nur zu einer Annäherung der Entladungsvorgänge an den gewünschten Dauerzustand. Immerhin lassen sich eine Reihe Gesetze für diesen aus den ausgeführten Messungen entnehmen.[1])

1) *Beständig* andauernde Büschel sind nur auf *festen* Halbleitern zu erhalten; auf Flüssigkeiten wird die störungsfreie Dauer durch die ausgelösten Flüssigkeitsströmungen nur auf Bruchteile einer Sekunde beschränkt; für die schlechtestleitende Flüssigkeit kamen meine Beobachtungen bei größter Kapazität dieser Grenze schon recht nahe.

I. Messungen.

A. *Versuchsanordnung.* Wie bei früheren Messungen von Gleitbüschelbildung auf Flüssigkeiten [1]) war zwischen zwei Glasplatten von 0,7 cm Stärke, 120 cm Länge und 7 cm Breite ein Gummischlauch $r\,r$ derart gepreßt, daß ein 1 cm breiter Trog entstand (vgl. Fig. 1). In diesen wurde zunächst Quecksilber und dann darauf die Flüssigkeit (stets destilliertes Wasser mit wechselnden Zusätzen von Kochsalz) gegossen. Der eine Gleitbüschelpol p_1 berührte die Flüssigkeitsoberfläche, der andere p_2 führte durch sie hindurch ins Quecksilber; beide Pole (Platinstifte) standen vom zugehörigen Trogende je 2 cm ab, ihr gegenseitiger Abstand $p_1 p_2$ betrug 110 cm. Als Trogtiefe wurde 4,0 cm gewählt, kleinere Flüssigkeitstiefen wurden zu leicht durchschlagen unter Zertrümmerung der Glasplattenwände.

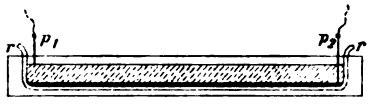


Fig. 1.

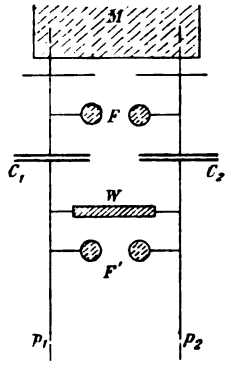


Fig. 2a.

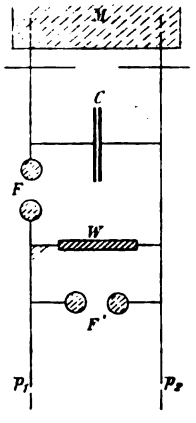


Fig. 2b.

In Fig. 2a ist die für Kapazitäten vom Gesamtbetrage der Anordnung bis 60 000 cm benutzte Versuchsanordnung skizziert:

1) Vgl. M. Toepler, Ber. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 1907. p. 422; Physik. Zeitschr. 8. p. 743 u. 919. 1907.

M bedeutet eine 60 plattige Toeplermaschine,
F „ Primärfunkenstrecke zwischen Messingkugeln von je 6 cm Durchmesser,
C_1 u. C_2 „ zwei gleiche Leidener Flaschenbatterien,
W „ Wasserwiderstand von ca. $5 \cdot 10^6$ Ohm,
F' „ Kontrollfunkenstrecke, ebenfalls zwischen Messingkugeln von je 6 cm Durchmesser.

Sollte die Kapazität der Leidener Flaschen voll ausgenutzt werden, so wurde die Anordnung der Fig. 2b benutzt.

Beide Anordnungen liefern plötzlich vom Augenblicke des Funkenausbruches F ab, eine Spannungsdifferenz zwischen $p_1 p_2$, welche nach Maßgabe der Leitfähigkeit im Troge abklingt (W kommt nur für die Batterieladung in Frage, da es stets groß war gegen den Widerstand zwischen $p_1 p_2$). Es bildet sich von p_1 aus nach p_2 zu ein Gleitbüschel.

B. *Büschellänge in Abhängigkeit von Spannung und Leitfähigkeit.* — In nachstehenden Tabellen seien gemessene Gleitbüschellängen zusammengestellt, wie dies schon für die Trogtiefe 6 cm und 2 cm am letzt zitierten Orte geschehen ist. Vorliegende Messungen unterscheiden sich außer durch die Trogtiefe von den genannten noch darin, daß die zwischen $p_1 p_2$ wirklich erreichte Spannung P' durch Messung von F' kontrolliert wurde und daß den einzelnen Bestimmungen durch größere Zahl der Einzelbeobachtungen etwa die doppelte Sicherheit zukommt.

Tabelle I.

Versuchsanordnung der Fig. 2a. Trogbreite 1,0 cm, Trogtiefe 4,0 cm. p_1 Anode, d. h. positive Gleitbüschel.

Leitfähigkeit λ der Flüssigkeit (Hg = 10630)	F in cm / P in Kilovolt	0,25 / 8,8	0,50 / 17,1	0,75 / 25,2	1,00 / 32,6	1,25 / 39,7	1,50 / 46,4	1,75 / 52,8	$P:P'$
1. Batteriekapazität 20000 cm									
$13{,}3 \cdot 10^{-6}$		1,5	8,1	19,8	37,5	59,5	81,5	101	—
$39{,}8 \cdot 10^{-6}$		2,5	12,5	26,5	42	61,5	82	—	1,00
$336 \cdot 10^{-6}$		3,3	11,0	22,5	33	45,5	58	68	1,00
$5370 \cdot 10^{-6}$		1,6	6,3	10,5	14	17	20	22,5	1,14
$21\,000 \cdot 10^{-6}$		1,2	3,6	5,6	7,7	9,6	11,2	12,6	1,35
$83\,000 \cdot 10^{-6}$		0,6	1,6	2,3	3,0	4,2	5,5	6,2	1,85
$215\,000 \cdot 10^{-6}$		—	—	1,0	1,4	1,9	2,3	2,8	2,51

Tabelle I (Fortsetzung).

Leitfähigkeit λ der Flüssigkeit (Hg = 10630)	F in cm P in Kilovolt	0,25 8,8	0,50 17,1	0,75 25,2	1,00 32,6	1,25 39,7	1,50 46,4	1,75 52,8	$P:P'$
2. Batteriekapazität 57000 cm.									
$17{,}4.10^{-6}$		1,8	10,3	26,8	49,3	82,4	—	—	—
$37{,}1.10^{-6}$		3,4	14,5	34,5	57	84	104	—	1,00
$39{,}8.10^{-6}$		3,3	16,5	36	57	85	—	—	—
$336\ .10^{-6}$		4,1	17,5	33	48	65	84	97	1,00
$5370\ .10^{-6}$		2,5	10	16,6	22,5	28	32,5	37	1,15
$21\,000\ .10^{-6}$		2,3	6,3	10,0	13,2	16,2	19	21	1,36
$83\,000\ .10^{-6}$		1,2	2,9	4,5	5,8	7,6	9,6	11,0	1,90
$215\,000\ .10^{-6}$		0,5	1,1	1,9	2,6	3,2	4,0	5,3	2,54

Tabelle II.

Versuchsanordnung der Fig. 2b.
Trogbreite 1,0 cm, Trogtiefe 4,0 cm.
p_1 Anode, d. h. positive Gleitbüschel.

Leitfähigkeit λ der Flüssigkeit (Hg = 10630)	F in cm P in Kilovolt	0,25 8,8	0,35 12,3	0,50 17,1	0,65 22,0	0,75 25,2	$P:P'$
Batteriekapazität 310000 cm							
$7{,}15.10^{-6}$		0,9	2,4	6,5	14,5	22	—
$9{,}53.10^{-6}$		—	3,3	8,3	19,0	—	—
$22{,}1\ .10^{-6}$		2,5	—	15,8	32,5	45	—
$52{,}3\ .10^{-6}$		4,6	—	34,9	63	85	—
$248\ .10^{-6}$		13,2	—	44,5	68	83	1,00
$5000\ .10^{-6}$	beobachtet	11,6	—	26	37	42	1,10
	berechnet (Faktor 1,1)	12,8	—	28,6	41	46	—
$215000\ .10^{-6}$	beobachtet	1,6	—	3,3	—	4,7	2,5
	berechnet (Faktor 2,5)	4,0	—	8,3	—	11,8	—

In Figg. 3 und 4 sind als Abszissen die Logarithmen der Leitfähigkeit λ gewählt, als Ordinaten die Gleitbüschellängen

eingetragen und die Werte für je gleiche Kapazität und Spannung zu Kurvenzügen verbunden. Fig. 3 gilt für ver-

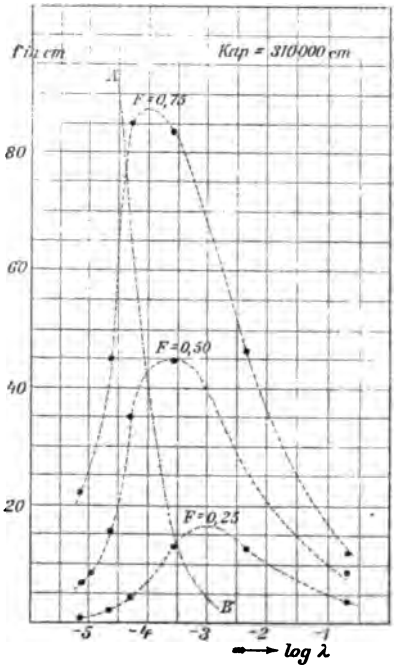


Fig. 3.

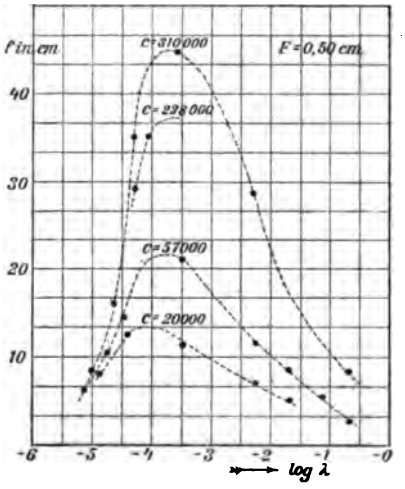


Fig. 4.

schiedene Spannungen bei gleicher Kapazität, Fig. 4 für verschiedene Kapazitäten aber gleiche Spannung.

C. *Korrektionsfaktor* $P : P'$. Beide Figuren geben für große Leitfähigkeit die jeweils mit dem Faktor $P : P'$ korrigierten Werte. In den Tabellen findet sich immer für bestimmte Leitfähigkeit nur ein einziges Verhältnis angegeben. Dies genügt, da zahlreiche Messungen zeigten, daß dies Verhältnis (innerhalb der Versuchsunsicherheitsgrenzen) für bestimmtes λ unabhängig vom Absolutwerte von P ist. Sobald $P : P'$ über 1 hinauswächst, ist also die durch p_1 abfließende Elektrizitätsmenge während des Spannungsanstieges in p_1 schon so groß, daß überhaupt nicht mehr die volle Spannung P erreicht wird, d. h. die Plötzlichkeit des Spannungsanlegens läßt bei dem gewählten Mechanismus schließlich zu wünschen übrig.

D. *Spannungsmessung längs des Gleitbüschels.* Es sei die Funkenstrecke F' nicht zwischen p_1 und p_2, sondern zwischen p_2 und eine Platinelektrode p', welche *zwischen* p_1 und p_2 irgendwo die Flüssigkeitsoberfläche berührt (vgl. die schematische Fig. 5) geschaltet.

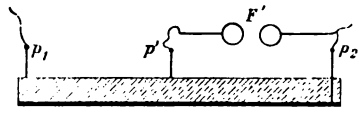


Fig. 5.

Solange der Abstand $p_1 p'$ größer ist als die Gleitbüschellänge, also p' sich jenseits des Büschelkopfes nach p_2 zu befindet, kann man F' bis auf etwa 0,02 cm verkleinern, ohne daß bei F' irgendwelche Funken sich bilden. Die Flüssigkeitsoberfläche nimmt also zwischen p_2 und dem Büschelende bis auf unwesentlich kleine Beträge die Spannung von p_2 an.

Bringt man bei ungeändertem F (ungeänderter Hauptspannung P an p_1), d. h. ungeänderter Gleitbüschellänge den Pol p' an irgend eine Stelle des Büschels, so sieht man, daß solange F' einen bestimmten Wert überschreitet, die Gleitbüschellänge durch Anbringung des Poles p' nicht wesentlich geändert wird; es wird ja auch nur das mit p' verbundene kleine (also kapazitätsarme) Leitungsstück geladen. Die *größte* Spannung, welche zwischen p' und p_2 während der Gleitbüschelbildung im Gleitbüschel an der Stelle p' herrscht, kann bestimmt werden, indem man F' langsam so lange verkleinert, bis zum ersten Male ein Funken bei F' (und natürlich damit ausgelöst ein Gleitfunken zwischen p_1 und p') erscheint.

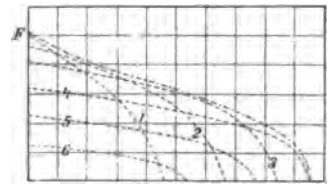


Fig. 6.

Bei ungenügender Kapazität erhält man so durch Messung von F' an verschiedenen Stellen längs des Büschels die *Einhüllende* der Spannungskurven, welche längs des wachsenden Gleitbüschels nacheinander während des Wachsens herrschen (vgl. Fig. 6).

Bei genügender Kapazität geht diese Einhüllende naturgemäß über in die Spannungskurve längs des Dauerbüschels.

Es genüge, in Fig. 7 einige derartige einhüllende Kurven für eine bestimmte Primärspannung ($F = 1{,}50$ cm, entsprechend 46,4 K.V.) und für bestimmte Kapazität (57000 cm) dar-

zustellen; die beobachteten Werte F' sind markiert. Für die große Kapazität von 0,34 Mikrof. erhält man bei Annäherung

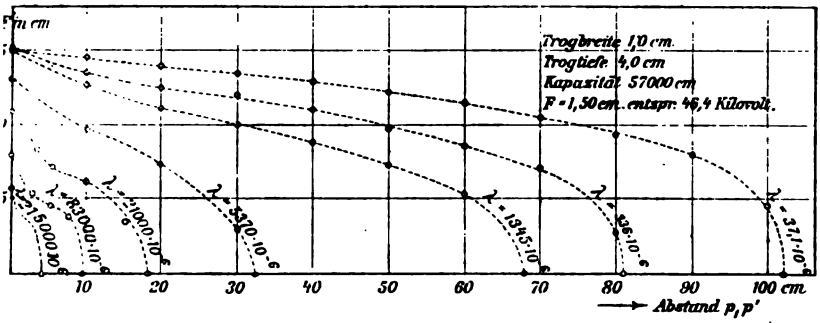


Fig. 7.

an *Dauer*büschel in gleicher Weise Kurven, bei welchen die Spannung p recht angenähert nach dem Gesetze

$$p^3 = \frac{P^3}{f} \cdot x$$

vom Büschelkopfe (Nullpunkte der x-Zählung) aus ansteigt; P ist die an p_1 gelegte Spannung, f die gesamte (Dauer-) Büschellänge.

E. *Grenze genügender und ungenügender Kapazität.* Die Tabellen und Figg. 3 und 4 zeigen, daß sich mit wachsender Leitfähigkeit zwei Gebiete von ganz verschiedenem Verhalten (Ansteigen und Abfallen der Länge) unterscheiden lassen — Gebiete genügender und ungenügender Kapazität. Vor Eingehen auf die uns hier weiterhin allein interessierenden Gesetze des ersteren Gebietes sei für dieses auch noch auf anderem Wege eine Grenze zu ziehen gesucht.

Als äußersten Fall von *Dauer*büschel wird man den bezeichnen können, bei dem während der vollen Gleitbüschelbildung die Spannung nur um 3 Proz. heruntergeht, die erreichte Büschellänge also um höchstens 10 Proz. von der maximalen abweicht. Aus den Messungen der Dauer von Gleitfunkenbildung auf Platten mit der Schlierenmethode folgt[1]), daß die Gleitbüschelbildung mindestens 10^{-5} Sek. erfordert. Nimmt man zur Grenzberechnung ferner an, daß während dieser Zeit längs

1) M. Toepler, Ann. d. Phys. 21. p. 212, Fig. 10. 1906.

der ganzen größten Büschellänge die Spannung des Poles p_1 auf der Flüssigkeitsoberfläche aufliegt, so läßt sich für jede Leitfähigkeit die größte Büschellänge, für welche diese Bedingungen bei bestimmter Kapazität und Spannung nicht überschritten werden, berechnen. Die Kurve AB in Fig. 3 gibt diese Grenze für 310000 cm. Man sieht, daß diese die gezeichneten Kurven nahe dem oberen Ende des Anstieges schneidet, wie zu erwarten stand.

Die Kurve AB verbindet Punkte, für welche $f.\lambda$ eine Konstante ist. Ein Blick auf Fig. 3 zeigt die Gültigkeit des mit den oben erörterten Grenzbedingungen engstens zusammenhängenden Satzes: Die bei gleicher Kapazität für verschiedene Spannungen erreichbare *größte Gleitbüschellänge ist der Leitfähigkeit der Bahnlängeneinheit umgekehrt proportional.* Weiter folgt gleichfalls aus der Parallelität der Verbindungslinie der Maxima für f mit der Kurve AB, daß die zum Erreichen der maximalen Länge nötige Zeit nahezu unabhängig von der Länge f (bzw. der benutzten Spannung F) ist.

II. Die Gesetze des Gleitbüschels von genügend großer Existenzdauer.

Für ein dauernd bestehendes Gleitbüschel lassen sich eine Reihe interessanter Beziehungen aufstellen und durch Vergleich mit den Beobachtungen Einblicke in die Gesetze desselben gewinnen.

Vom Büschelende aus gesehen wächst die Spannung längs des Büschels an. Das Gesetz dieses Anwachsens sei

$$p = \varphi(x) \tag{1}$$

bezeichnet. Es sei die Trogtiefe so klein, daß man annehmen kann, die Strömung in der Flüssigkeit erfolge überall *senkrecht* durch die Schicht, von der Oberfläche (dem Büschel) zur Quecksilberunterlage. Dann fließt an jeder Stelle x aus der Büschellängeneinheit der vertikale Strom

$$i = p \cdot \frac{\lambda}{\tau} \cdot b, \tag{2}$$

wo p die Spannung an der Stelle x, λ die Leitfähigkeit der Flüssigkeit, τ die Trogtiefe, b die Trogbreite bedeutet.

Es sei b speziell stets gleich 1 cm gewählt.

An der gleichen Stelle x muß dann *horizontal* längs der Flüssigkeitsoberfläche von x nach dem Büschelende zu dauernd der Strom J fließen, wo

$$J = \int_0^x i\,dx. \tag{3}$$

Dieser Strom J wird getrieben durch das Gefälle Δp von p längs der Flüssigkeitsoberfläche.

Der Widerstand W der Längeneinheit des Büschels an der Stelle x wäre zu definieren aus

$$W = \frac{\Delta p}{J} = \frac{\tau}{\lambda} \cdot \frac{\varphi'(x)}{\int_0^x \varphi(x)\,dx}. \tag{4}$$

Durch Messung der Spannung p an verschiedenen Stellen des Dauerbüschels (also von $\varphi(x)$), wie oben in Abschnitt I., D. geschildert (vgl. Fig. 7), läßt sich also bei Kenntnis der Leitfähigkeit der Bahnlängeneinheit (d. h. von λ/τ) ohne weiteres W finden, wohl die einfachste Methode zur Bestimmung von Widerständen im Büschelstiele. Bei dem noch nicht völligen Genügen der Kapazität erscheint es jedoch zweckmäßig, Gesetze für W nicht auf einzelne Messungen, sondern auf die *allgemeinen* für angenähert hinreichende Kapazität geltenden *Beziehungen* zu gründen.

Die Beobachtungen und Messungen zeigten, daß:

die Büschellänge f proportional ist der Leitfähigkeit λ,
„ „ f umgekehrt proportional der Trogtiefe τ,
„ „ f proportional der *dritten* Potenz[1]) der Spannung P am Pole p_1.

Also gilt

$$f = \varkappa \cdot \frac{\lambda}{\tau} \cdot P^3. \tag{5}$$

---

1) Wie aus den in vorliegender Arbeit mitgeteilten Messungen hervorgeht, gehört die früher (vgl. Physik. Zeitschr. l. c. und Berichte der Deutsch. Physik. Gesellschaft l. c.) behauptete Proportionalität mit der *zweiten* Potenz der Spannung noch dem *Übergangsgebiete* von ungenügender zu genügender Kapazität an.

Ferner zeigten die Beobachtungen, daß p vom Büschelende aus nach dem gleichen Gesetze zum Büschelanfange zu aufsteigt, daß also auch

$$x = \varkappa \cdot \frac{\lambda}{\tau} \cdot p^3 \tag{6}$$

ist, so daß erfahrungsgemäß

$$p = \varphi(x) = \left(\frac{\tau}{\varkappa \cdot \lambda}\right)^{1/3} \cdot x^{1/3} \tag{7}$$

wird. Hieraus folgt

$$J = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\lambda^2}{\tau^2 \cdot \varkappa}\right)^{1/3} \cdot x^{4/3}, \tag{8}$$

$$\Delta p = \frac{1}{3} \left(\frac{\tau}{\varkappa \cdot \lambda}\right)^{1/3} \cdot x^{-2/3} \tag{9}$$

und

$$W = \frac{4}{9} \cdot \frac{\tau}{\lambda} \cdot x^{-2}. \tag{10}$$

Der Widerstand im Büschelstiel ist umgekehrt proportional der Leitfähigkeit der Bahnlängeneinheit ($\lambda : \tau$) und umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes vom Büschelkopfe.

Will man dieses Widerstandsgesetz mit den sonst gefundenen Beziehungen für Funkenwiderstände und ähnliche Größen vergleichen, so ist es zweckmäßig, dieses auf die hier übliche Form

$$W = \frac{a}{J^n} \tag{11}$$

zu bringen.

Man erhält aus (8) und (10)

$$W = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3\varkappa}} \cdot \frac{1}{J^{1/2}}. \tag{12}$$

Als Charakteristik würde hiernach für den Büschelstiel (*Dauer*büschel) folgen

$$V = \frac{1}{2\sqrt{3\varkappa}} \cdot \frac{1}{\sqrt{J}} = \frac{a}{\sqrt{J}}, \tag{13}$$

wo V das Gefälle (Volt : cm), J die Stromstärke und $\varkappa$ und a Konstanten bedeuten.

Die Charakteristik verläuft umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Stromstärke.

Schon öfters habe ich auf die Identität eines Büschelstielstückes mit einem Stück Büschellichtbogens[1]) (des von mir

1) M. Toepler, Wied. Ann. **63.** p. 109. 1897; **66.** p. 660. 1898.

zuerst in freier Luft hergestellten Glimmstromes) hingewiesen. Für letzteren hat Kaufmann[1]) dann die Gültigkeit eines Gesetzes genau wie (13) gefunden (V proportional $1/\sqrt{J}$), während Stuchtey[2]) seine Messungen am Büschellichtbogen durch die nicht allzusehr abweichende Beziehung V proportional $1 : J^{0,431}$ wiedergibt.

Gleitbüschel und Büschellichtbogen besitzen demnach die gleiche Charakteristik.

Aus der Kenntnis der Charakteristik des Büschellichtbogens lassen sich natürlich auch umgekehrt die Gesetze des Gleitbüschels ohne weiteres ableiten.

Zu diesen allgemeinen Ergebnissen ist schließlich noch einiges über den Wert der Konstanten a hinzuzufügen.

Aus vorliegenden Messungen würde sich a zu etwa 350 für das Beobachtungsbereich von ca. 0,01 bis 5 Amp. Stromstärke J im Gleitbüschelstiele ergeben.[3])

Aus meinen Messungen über Büschellichtbogen ergibt sich für 0,5 bis 2 Milliamp. a zu 100 bei Bogenlängen bis 1 cm.

Aus den Angaben von Stark[4]) rechnet sich a zu 125 bis 150 (Stromstärken 9,6 bis 62 Milliamp.).

---

1) W. Kaufmann, Physik. Zeitschr. 4. p. 578. 1903.

2) C. Stuchtey, Diss. Bonn 1904.

3) Im einzelnen erhält man aus Tab. II vermittelst x aus Gleichung (5)

für $\lambda = 7{,}15 \cdot 10^{-6}$ a zu 336, 395, 339, 331, 329 und
für $\lambda = 9{,}53 \cdot 10^{-6}$ a zu —, 389, 346, 334, —. Die Werte
für $\lambda = 22{,}1 \cdot 10^{-6}$ a zu 354, —, 382, 388, 405

zeigen schon beginnendes Ungenügen der verwandten Kapazität. Die *größten* Stromstärken J im Büschelstiele werden [in Gleichung (8) ist $x = f$ zu setzen]:

für $\lambda = 7{,}15 \cdot 10^{-6}$ 0,010; 0,044; 0,149; 0,427; 0,743 Amp.
für $\lambda = 9{,}53 \cdot 10^{-6}$ — ; 0,080; 0,254; 0,747; — „
für $\lambda = 22{,}1 \cdot 10^{-6}$ 0,891; — ; 1,09 ; 2,89 4,59 „

Es sei noch bemerkt, daß man durch Einführung eines mit J langsam ansteigenden Exponenten von J in die Charakteristikengleichung (13) einerseits noch besseren Anschluß an die Messungen von Stuchtey gewinnen, andererseits die vorliegenden Beobachtungen noch etwas weiter in das Gebiet größerer J bzw. λ hinein darstellen kann.

4) J. Stark, Physik. Zeitschr. 4. p. 535. 1903.

Kaufmann findet zwischen 0,9 und 20 Milliamp. a zu rund 160, während Stuchtey die Konstante zu 110 angibt.[1])

Bei einem Vergleiche hat man zu berücksichtigen, daß der Gleitbüschel ja auch bei der größten Kapazität noch *nicht ganz* als *Dauer*erscheinung aufzufassen ist, und daß meine Büschel auf einer *Flüssigkeitsoberfläche auflagen*, also in einer Atmosphäre sich befinden, die mit freier Luft nicht identisch ist. In Anbetracht dieser Umstände und der Verschiedenartigkeit der Bestimmungsmethoden ist die Übereinstimmung wohl noch als recht gute zu bezeichnen.

Mit den Gleitbüscheln auf Flüssigkeitsoberflächen stehen solche auf Isolatoren (Rohren und Platten) in engster Beziehung. Durch die voranstehend gewonnenen Erkenntnisse ist also das ganze Gebiet der Gleitfunkenbildung überhaupt qualitativ und, soweit die Umstände es erwarten lassen, auch quantitativ an die bekannten Gesetze von Gasentladungen angeschlossen.

Dresden, den 30. Januar 1908. Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

1) Die angegebenen Zifferwerte sind auf Gefälle in Volt : cm und Stromstärken in Amp. umgerechnet.

(Eingegangen 31. Januar 1908.)

7. *Über Schwankungen der radioaktiven Strahlung und eine Methode zur Bestimmung des elektrischen Elementarquantums;*

von Edgar Meyer und Erich Regener.

§ 1. Hat man einen einheitlichen radioaktiven Körper vor sich, so nimmt dessen radioaktive Strahlung bekanntlich mit der Zeit ab, und zwar erfolgt diese Abnahme nach dem Exponentialgesetze:

$$J_t = J_0 e^{-\lambda t},$$

wobei J_0 die Anfangsaktivität, J_t die nach Ablauf einer gewissen Zeit t noch vorhandene Aktivität bedeutet. λ ist eine Konstante, die sogenannte „Abklingungskonstante", die für die verschiedenen radioaktiven Substanzen charakteristische Werte besitzt. Dieses Gesetz ist von Rutherford und Soddy aus ihrer Zerfallstheorie abgeleitet worden. Nach den Vorstellungen dieser Theorie sind die Atome der radioaktiven Körper instabil, sie besitzen nur eine bestimmte mittlere Lebensdauer, die durch den Wert $1/\lambda$ gegeben ist.

§ 2. Es wäre nun an sich wohl denkbar, daß bei einem radioaktiven Körper zu einer gewissen Zeit plötzlich alle Atome explosionsartig zerfallen würden. Daß das nicht der Fall ist, liegt daran, daß das Ende der Lebenszeit jedes einzelnen Atoms zu verschiedenen Zeiten erreicht wird. Da wir in dem einzelnen Falle nicht die Gründe dafür anführen können, weswegen ein Atom früher oder später zerfällt, so müssen wir sagen, daß der Zeitpunkt des Zerfalles eines Atoms durch den Zufall bestimmt wird. Hier ist der Begriff des Zufalles so zu nehmen, wie er in der Wahrscheinlichkeitsrechnung definiert wird.[1]) Aus dem Gesagten geht hervor, daß man auf den Zerfall der radioaktiven Atome die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden kann.

1) Z. B. Weber u. J. Wellstein, Enzyklopädie der Elementar-Mathematik 3. p. 358. Leipzig 1907.

Das hat nun E. v. Schweidler[1]) in einer Abhandlung „Über Schwankungen der radioaktiven Umwandlung" getan. Er leitet das obige Exponentialgesetz folgendermaßen ab. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Atom in einer gegebenen Zeit zerfällt, wird proportional dieser Zeit sein. Bezeichnet man also die Wahrscheinlichkeit, daß ein Atom in der sehr kleinen Zeit dt zerfällt, mit λdt, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es in der Zeit t nicht zerfällt, $e^{-\lambda t}$. Bei einer sehr großen Anzahl N gleichartiger radioaktiver Atome wird daher, entsprechend dem Gesetz der großen Zahlen, die Anzahl der nach der Zeit t noch vorhandenen Atome gegeben sein durch

$$n = Ne^{-\lambda t}.$$

Das ist aber gleichbedeutend mit dem Gesetze $J_t = J_0 e^{-\lambda t}$, da die Aktivität eines Stoffes in jedem Momente der Zahl der zu dieser Zeit noch unverwandelt gebliebenen Atome proportional ist.[2])

Hat man aber eine *nicht sehr große* Anzahl radioaktiver Atome vor sich, so wird die Abnahme ihrer Anzahl mehr oder weniger von diesem idealen Exponentialgesetz abweichen, d. h. n und damit J_t wird gewissen Schwankungen unterworfen sein. Die Größe dieser „Streuung" wurde von Hrn. v. Schweidler ebenfalls berechnet. Er verfährt folgendermaßen[3]):

Können in einer Reihe von s Versuchen nur zwei einander ausschließende Ereignisse A und B mit den Wahrscheinlichkeiten p bzw. q eintreten, so ist die Wahrscheinlichkeit W, daß m_1, die Zahl der für A günstigen Fälle zwischen den Grenzen $ps \pm \nu$ und gleichzeitig m_2, die Zahl der für B günstigen Fälle zwischen den Grenzen $qs \pm \nu$ liegt, gegeben durch:

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\nu\sqrt{\frac{1}{2spq}}} e^{-t^2} dt.$$

1) E. v. Schweidler, Premier Congrès international pour l'étude de la Radiologie et de l'Ionisation, Liège 1905: „Über Schwankungen der radioaktiven Umwandlung"; Beibl. 31. p. 356. 1907.

2) Rutherford-Aschkinass, Die Radioaktivität p. 240. 1907.

3) Gegeben nach K. W. F. Kohlrausch, Sitzungsber. d. Wiener Akad. 115. Abt. II a. p. 673. 1906.

Nach einer Formel der Fehlerrechnung[1]) ist aber die obere Integralgrenze das Produkt aus der Grenze, die der Fehler nicht übersteigen soll, und aus h, dem sogenannten „Maße der Präzision". Aus h ergibt sich der mittlere Fehler zu:

$$\eta = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

Diese Formel wird nun auf folgenden Fall angewendet. Es seien N radioaktive Atome mit der Abklingungskonstante λ gegeben. Nach einer gewissen Zeit δ ist die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Atom noch nicht zerfallen zu sein, $e^{-\lambda\delta}$, die zerfallen zu sein $1 - e^{-\lambda\delta}$. Setzt man

$$1 - e^{-\lambda\delta} = \alpha, \quad e^{-\lambda\delta} = 1 - \alpha,$$

so ergibt sich:

$$s = N; \quad p = 1 - \alpha; \quad q = \alpha.$$

Daher wird die Wahrscheinlichkeit W', daß die Anzahl m_s der in der Zeit δ zerfallenden Atome zwischen den Grenzen $N\alpha \pm N\alpha\sigma$ liegt:

$$W' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{N\alpha\sigma\sqrt{\frac{1}{2N\alpha(1-\alpha)}}} e^{-t^2} dt.$$

Da nun $N\alpha\sigma$ die Fehlergrenze ist, so ist

$$h = \frac{1}{\sqrt{2N\alpha(1-\alpha)}}$$

und

$$\eta = \sqrt{N\alpha(1-\alpha)}$$

der mittlere Fehler.

Drückt man noch diesen mittleren Fehler in Bruchteilen des normalen Wertes αN aus, so ergibt sich, wenn man diesen prozentuellen Fehler mit $\bar{\varepsilon}$ bezeichnet:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\eta}{N\alpha} = \sqrt{\frac{1-\alpha}{N\alpha}}.$$

Nimmt man jetzt δ klein gegen die mittlere Lebensdauer $1/\lambda$ eines Atoms, dann ist α sehr klein, $1 - \alpha$ nahe gleich 1, und man erhält:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{N\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{Z}};$$

d. h.: *Die mittlere Schwankung ist nur abhängig von der Zahl Z,*

1) Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften 1. D. 2.

der Anzahl von Atomen, die bei strenger Gültigkeit des Gesetzes $n = Ne^{-\lambda t}$ innerhalb der Zeit δ zur Umwandlung gelangen würden, und zwar gleich der reziproken Wurzel aus dieser Zahl.

§ 3. Diese Schweidlersche Beziehung versuchte K. W. Fritz Kohlrausch[1]) experimentell zu verifizieren. Es sei uns hier erlaubt zu bemerken, daß Hr. K. W. F. Kohlrausch diese Schwankungen der radioaktiven Umwandlung nicht als erster beobachtet hat. Bronson[2]) fand nämlich bei der Verwendung seines radioaktiven Luftwiderstandes bei der „Methode der konstanten Ausschläge" zur Messung an radioaktiven Substanzen, daß die Elektrometernadel nicht ruhig in der abgelenkten Stellung verblieb, sondern noch kleinere unregelmäßige Schwankungen ausführte. Da er auf das sorgfältigste Luftströmungen sowie elektrostatische Störungen ausschloß, kam er selbst zu dem Schlusse: „The most probable explanation seems to be that it is due to exceedingly small and rapid changes in the ionisation current itself".

§ 4. K. W. F. Kohlrausch verwandte bei der Prüfung der Schweidlerschen Beziehung eine Differentialmethode. Zwei Messingkästen waren mit den Enden einer Akkumulatorenbatterie verbunden, deren Mitte geerdet war. Auf den Böden der Kästen befanden sich zwei nahezu gleich starke Poloniumpräparate. In die Kästen ragten Elektroden hinein, die untereinander und mit dem einen Quadrantenpaare eines Dolezalekelektrometers verbunden waren. Da die Poloniumpräparate nicht gleich stark waren, zeigte das Elektrometer langsame Aufladung an. Die Aufladung, die das Elektrometer in einer Minute erfuhr, war nun bei verschiedenen Beobachtungen ganz verschieden, damit Schwankungen der Strahlung der Poloniumpräparate in den Messingkästen anzeigend. Aus einer größeren Anzahl von Beobachtungen rechnet Hr. Kohlrausch die mittlere Abweichung nach der bekannten Formel $\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n-1}}$ aus. Hr. Kohlrausch zeigt, daß diese Abweichungen und damit die mittlere Schwankung der Strahlung der Polonium-

1) K. W. F. Kohlrausch, Sitzungsber. der Wiener Akad. 115. Abt. IIa. p. 673. 1906.

2) H. L. Bronson, Amer. Journ. Science, Februar 1905; Phil. Mag. (6) 11. p. 143. 1906.

präparate von der an die Messingkästen angelegten Spannung in der Weise abhängig ist, daß die Schwankungen am kleinsten ausfallen bei der kleinsten an die Kästen angelegten Spannung, um bei höheren Spannungen einem Grenzwerte zuzustreben. Das Aussehen der Kurve, die die Abhängigkeit der Schwankungen von der Spannung widergibt, ist also das gleiche, welches die Abhängigkeit des durch die Kästen fließenden Stromes von der Spannung zeigt. Einen Vergleich der beobachteten Schwankungen mit den nach der Theorie des Hrn. v. Schweidler berechneten lassen die Beobachtungen des Hrn. Kohlrausch aber nur in beschränktem Maße zu, da aus den Beobachtungen nur *ein* Wert zum Vergleich herangezogen werden darf, nämlich der bei Sättigungsstrom. Um nun die Schweidlersche Beziehung allgemein zu prüfen, wurden die folgenden Versuche unternommen. Die Verfasser konnten mit Hilfe einer empfindlichen Versuchsanordnung die Schwankungen leicht nachweisen und die Beziehung $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{Z}}$ durch Variieren von Z bestätigen. Auch wurde der Einfluß der Versuchsbedingungen auf die Schwankungen untersucht.

§ 5. Die benutzte Versuchsanordnung war folgende (vgl. Fig. 1). Die untersuchte Radiotellurplatte P, eine Cu-Platte

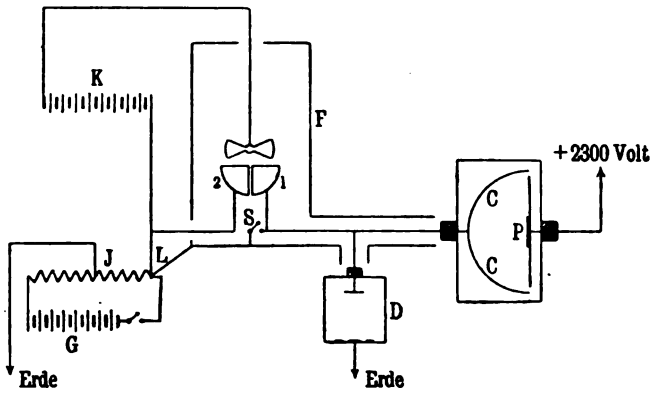


Fig. 1.

von 4 cm Durchmesser, die auf einer Seite mit RaF belegt war (bezogen von Sthamer, Hamburg), war auf einer mit Hartgummi isolierten Messingplatte von 11 cm Durchmesser

befestigt. Die von dem RaF ausgehenden α-Strahlen haben in Luft eine Reichweite von ungefähr 4 cm, d. h. sie sind in einer Entfernung von 4 cm vollständig absorbiert. Um die durch die Absorption der Strahlen hervorgerufene Ionisation vollständig zur Messung zu bringen, befand sich der Poloniumplatte P gegenüber die Elektrode CC aus Messing in Form einer Halbkugel. Sie wurde durch eine Isolation von Bernstein getragen. Der Durchmesser der Halbkugel betrug 13 cm, so daß die Entfernung der Halbkugel von der Poloniumplatte überall größer als 4 cm, die Reichweite der α-Strahlen, war. Dadurch wurde auch erreicht, daß Schwankungen von Druck und Temperatur, die die Reichweite der α-Strahlen verändern, ohne Einfluß auf den mit dieser Anordnung gemessenen Ionisationsstrom blieben. Das Ganze befand sich in einem Messingkasten, der geerdet oder auf ein anderes Potential gebracht werden konnte. Auf die Radiotellurplatte konnten noch Blenden aufgeschoben werden. Es waren Messingbleche von 1 mm Dicke, die zentrische Bohrungen von folgenden Dimensionen besaßen:

Blende Nr.	Durchmesser der Bohrung
1	6,1 mm
2	12,5 „
3	18,4 „
4	24,0 „
5	30,1 „
6	36,1 „

Mit Blende 0 soll bezeichnet werden, daß das ganze unbedeckte Präparat strahlte.

Die Messungen wurden immer bei Sättigungsstrom ausgeführt. Um diesen herzustellen, war P mit einer Hochspannungsakkumulatorenbatterie von etwa 2300 Volt verbunden; CC war in leitender Verbindung mit dem einen Quadrantenpaare 1 eines Dolezalekschen Elektrometers F mit Bernsteinisolation. Die Nadel des Elektrometers wurde durch eine besondere Hochspannungsbatterie K meistens auf etwa 210 Volt geladen. Der Aufhängedraht der Nadel war ein dünner Wollastondraht. Die Empfindlichkeit des Instrumentes betrug im allgemeinen etwa 2300 Skt. Ausschlag pro 1 Volt. Es wurde jedoch auch manchmal bei sehr viel geringerer Empfind-

lichkeit gemessen. Nach jedem Versuch wurde die Empfindlichkeit des Elektrometers neu bestimmt.

CC war gleichzeitig noch mit dem einen Ende eines Widerstandes *D* nach Bronson[1]) verbunden, dessen anderes Ende geerdet war. Er bestand aus einer Messingbüchse *D*, auf deren Boden Poloniumpräparate ausgebreitet wurden. Von oben ragte eine Messingelektrode hinein, die durch Bernstein isoliert war. Es wurde so der durch die Poloniumzelle *P* fließende Strom durch die an den Enden des Bronsonwiderstandes auftretende Potentialdifferenz gemessen. Durch Aufnahme der Stromspannungskurve wurde festgestellt, daß sich der Widerstand innerhalb der Spannungen, die bei unseren Versuchen auftraten, als Ohmscher Widerstand verhielt.[2])

Wir haben im Laufe der Untersuchung eine große Anzahl verschiedener solcher Widerstände benutzt. Immer verwandten wir RaF-Präparate zum Ionisieren. Durch Einlegen von verschiedenen Präparaten konnte man einen Widerstand von passender Größe erhalten. Es empfiehlt sich das besser, als den Plattenabstand zu variieren. Denn es ist günstig, wenn der Ionisationsraum so groß ist, daß alle α-Teilchen ganz in der Luft absorbiert werden. Man ist dann unabhängig von Schwankungen des Luftdruckes und der Temperatur.

§ 6. Um nun Änderungen des Potentials des Quadrantenpaares 1 und mithin des Stromes genau messen zu können, wurde eine Kompensationsmethode verwandt.

G ist eine dritte Hochspannungsbatterie von etwa 140 Volt, bei der aber mehrere Batterien parallel geschaltet waren. Dieses geschah zur Vergrößerung ihrer Kapazität, da es sehr darauf ankam, daß diese Spannung konstant war. Änderte sie sich nur um geringe Bruchteile, so bekam man eine stetige Wanderung der Elektrometernadel, die sich über die zu messenden Stromschwankungen überlagerte. Diese Batterien waren durch einen Widerstand *J* von über 100 000 Ohm geschlossen. An *J* konnte man abzweigen und eine beliebige Spannung an das andere Quadrantenpaar 2 des Elektrometers anlegen. Man kompensierte so die mittlere Spannung, die

1) H. L. Bronson, l. c.

2) Der Sättigungsstrom durch die Bronsonzelle *D* war 12 mal stärker als derjenige, welchen das Poloniumpräparat *P* gab.

sich auf CC ausbildete, und das empfindliche Elektrometer zeigte nur noch die Schwankungen des von P nach CC übergehenden Stromes an. War z. B. die Empfindlichkeit des Elektrometers 2000 mm pro 1 Volt und war die Kompensationsspannung 50 Volt, so entsprach ein Ausschlag des Elektrometers von 1 mm einer Änderung der Spannung des Quadranten 1, mithin des Stromes um

$$\frac{1}{2000 \cdot 50} = 0{,}001 \text{ Proz.}$$

Gleichzeitig ergab diese Kompensationsspannung in Verbindung mit dem Werte des Bronsonwiderstandes (Größenordnung 10^{10} Ohm) auch die Stärke des jeweiligen Sättigungsstromes. Das Elektrometer, die Poloniumzelle, der Bronsonwiderstand, sowie alle Verbindungen waren in leitende, miteinander in Verbindung stehenden Metallhüllen eingebaut.

Da die sich auf CC ausbildenden Spannungen (bis 90 Volt) nicht mehr gegenüber der Nadelspannung des Elektrometers zu vernachlässigen waren, so nahm die Empfindlichkeit des Elektrometers mit Wachsen der Spannung auf CC stark ab. Wir haben diesen Übelstand folgendermaßen verhindert. Das Elektrometergehäuse sowie der zweite Pol der Batterie K, die die Nadel auflud, wurde ebenfalls auf das Potential der Kompensationsspannung gebracht, d. h. es wurde dafür gesorgt, daß in allen Fällen die Potentialdifferenz zwischen der Nadel und den Quadranten dieselbe blieb. Diese Schaltung hat sich sehr bewährt. Die Empfindlichkeit des Elektrometers blieb ganz konstant, wenn auch die Kompensationsspannung von 0,5 Volt auf 90 Volt stieg. Bei der Einstellung der Kompensationsspannung blieb der Schlüssel S zunächst geschlossen. Beim vorsichtigen Öffnen zeigte es sich dann, ob die Kompensationsspannung zu hoch oder zu niedrig war. Durch Änderung des Abzweigwiderstandes J ließ sich die Kompensationsspannung dann leicht einstellen.

Zur Eichung des Elektrometers wurde bei geschlossenem Schlüssel S die Verbindung des Quadrantenpaares 2 mit dem Elektrometergehäuse bei L unterbrochen und dazwischen ein kleiner Teil des Abzweigwiderstandes J gelegt. Mit der entstehenden geringen Potentialdifferenz ließ sich dann die Empfindlichkeit des Elektrometers bestimmen. Dieses geschieht dabei

unter genau denselben Bedingungen wie während des Experimentes, d. h. während beide Quadrantenpaare die Kompensationsspannung besitzen.

§ 7. Wurde nun, wie eben beschrieben, die Kompensationsspannung eingestellt, so sollte, falls der Strom durch die Poloniumzelle konstant war, auch das Potential des Quadranten 1 und damit die Stellung der Elektrometernadel

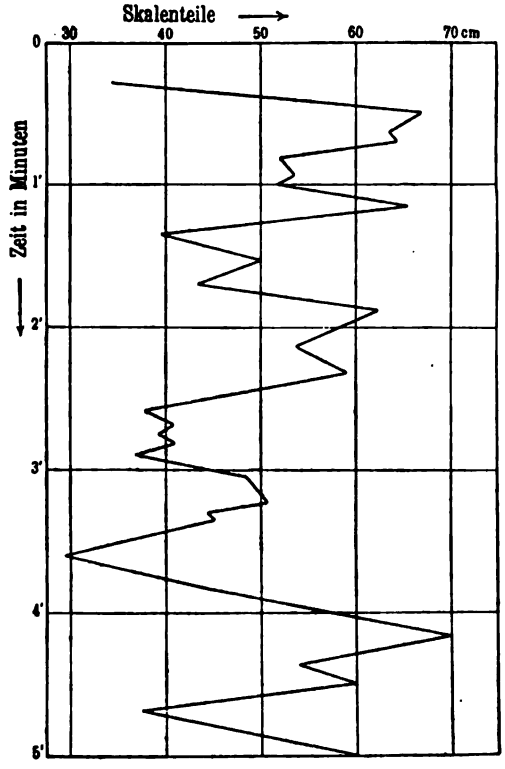


Fig. 2.

konstant bleiben. Da aber die Strahlung des Poloniums Schwankungen zeigte [1]), so war die Elektrometernadel in

1) Wir haben auch qualitative Versuche mit einem Präparat von reinem Radiumbromid (ca. 6 mg) angestellt. Dieselben haben ergeben, daß auch das Radium diese Schwankungen der Aktivität zeigt. Das Radiumbromid war bei diesen Versuchen mit einer Glimmerplatte bedeckt, so daß nur die β- und γ-Strahlen zur Wirksamkeit gelangten.

ständiger und zwar unregelmäßiger Bewegung. Zur Aufzeichnung der Schwankungen wurden die Umkehrpunkte der Elektrometernadel mit den dazugehörigen Zeiten abgelesen. Fig. 2 gibt als Beispiel ein auf diese Weise erhaltenes Bild der Schwankungen. Das Bild ist nur ein angenähertes, da die Umkehrpunkte der Elektrometernadel durch gerade Linien verbunden sind, während in Wirklichkeit die Bewegung der Nadel ungleichförmig war. Aus einer größeren Anzahl von Umkehrpunkten, die durch Beobachtung der Schwankungen über eine längere Zeit (8—15 Min.) erhalten wurden, wurde die mittlere Schwankung nach der Formel

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n-1}}$$

berechnet. Wurde die so erhaltene mittlere Schwankung in Skalenteilen mit der Elektrometerempfindlichkeit multipliziert und durch die Kompensationsspannung dividiert, so ergab dies die mittlere prozentische Schwankung, die mit $\bar{s}$ bezeichnet werden soll.

§ 8. Zur Prüfung der Schweidlerschen Beziehung $\bar{s} = \frac{1}{\sqrt{Z}}$ wurde in folgender Weise verfahren. Das Poloniumpräparat wurde mit den Blenden aus Messingblech, deren Dimensionen oben in § 5 angegeben sind, abwechselnd bedeckt. Dadurch trat von demselben Präparat nur ein Bruchteil der zerfallenden Atome in Wirksamkeit, man konnte also Z variieren und die Abhängigkeit der mittleren Schwankung davon feststellen. Die folgende Tabelle gibt die erhaltenen Resultate:

Blende	i stat.	$\bar{s}$ Schwankung Proz.	$\bar{s}\sqrt{i} \cdot 10^2$	e Schwankung in Strom (stat.)
1	0,04	1,28	25,6	0,0005
2	0,22	0,57	26,7	0,0013
3	0,58	0,38	29,2	0,0023
4	1,14	0,29	30,4	0,0033
5	2,02	0,23	33,1	0,0048
6	3,25	0,20	35,1	0,0065
0	4,25	0,16	33,0	0,0070

Die zweite Reihe gibt die (Sättigungs-) Ströme (in statischen Einheiten), die bei diesen Blenden durch die Poloniumzelle flossen. Dieselben wurden bei Blende 0 galvanometrisch gemessen, bei den übrigen Blenden aus der Kompensations-

spannung und dem Bronsonwiderstande berechnet. Der Strom bei kleinster Blende entspricht ungefähr 1000, der bei unbedecktem Präparat ungefähr 100000 in der Sekunde zerfallenden Atomen. Die dritte Reihe gibt die mittlere prozentische Schwankung, die für jede Blende aus zwei bis drei Beobachtungsreihen von je 8 Min. erhalten wurde (etwa 200 Umkehrpunkte). Nach der v. Schweidlerschen Theorie soll $\bar{\varepsilon}\sqrt{Z}$, oder, da Z proportional dem Sättigungsstrome i ist, $\bar{\varepsilon}.\sqrt{i}$ konstant sein. Wie aus der vierten Reihe ersichtlich, ist dies ziemlich gut der Fall. Der noch vorhandene Gang erklärt sich aus Versuchsfehlern. Zu diesen gehört unter anderen der Einfluß des Bronsonwiderstandes, in dem sich ja Poloniumpräparate, die auch Schwankungen zeigten, befanden.[1]) Diese Schwankungen kommen aber nur in sehr geringem Maße mit zur Beobachtung, da der Bronsonwiderstand bei Spannungen gebraucht wurde, die sehr weit von denen, bei welchen Sättigungsstrom fließt, entfernt waren. Dementsprechend verkleinern sich auch die Schwankungen. Unter Zuhilfenahme der Messungen des Hrn. K. W. F. Kohlrausch[2]) konnte ausgerechnet[3]) werden, daß die Schwankungen des Bronsonwiderstandes diejenigen des Poloniumpräparates bei unbedecktem Präparate nur um einige Prozente vergrößerten. Bei kleineren Blenden kamen die Schwankungen des Bronsonwiderstandes gar nicht in Betracht. Eine zweite Fehlerquelle wird durch kleine Änderungen in der Spannung der Batterie G hervorgerufen. Es werden dadurch die beobachteten Schwankungen scheinbar vergrößert, und zwar kommt dieser Fehler bei den größten Blenden am meisten in Betracht, so daß auch hierdurch der Wert der Konstanten mit zunehmender Blendenöffnung wächst. In der letzten Spalte der obigen Tabelle sind noch die Absolutwerte der

1) Die hier behandelten Schwankungen der radioaktiven Strahlung sind vielleicht der Grund für die mehrfach ausgesprochenen Klagen über den Bronsonwiderstand (z. B. Ebert, in der Diskussion zu dem Vortrage von E. Ladenburg auf der Naturforscherversammlung 1907 in Dresden; Physik. Zeitschr. 8. p. 775. 1907).

2) K. W. F. Kohlrausch, l. c.

3) Nach Kohlrausch (l. c.) ist die beobachtete Schwankung $s^2 = s_1^2 + s_2^2$, wobei s_1 bzw. s_2 die Schwankungen bedeuten, die von der Poloniumzelle bzw. dem Bronsonwiderstande herrühren. Zu beachten ist auch, daß die Poloniumpräparate in D 12 mal stärker waren als dasjenige in F.

mittleren Schwankungen in Strom, wie sie wirklich auftraten, angegeben. Dieselben sind gleichzeitig mit den prozentischen Schwankungen in den Kurven Fig. 3 (I prozentische Schwankung, II absolute Schwankung) in Abhängigkeit von dem

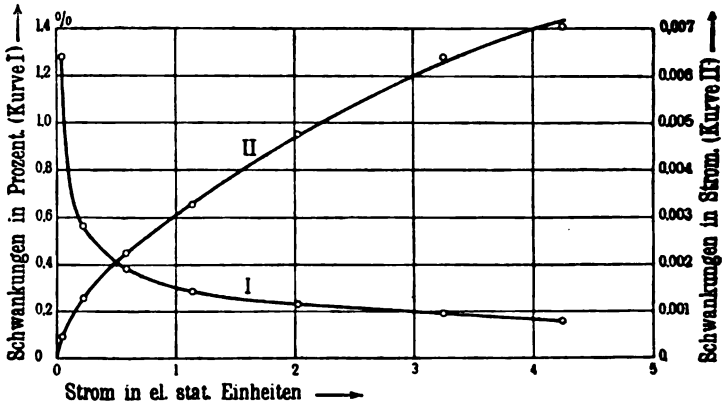


Fig. 3.

Sättigungsströme i wiedergegeben. Es ist aus diesen Kurven zu ersehen, daß die prozentischen Schwankungen am größten bei kleinster Blende, die absoluten am größten bei unbedecktem Präparat sind. Da also die absoluten Schwankungen bei starken Präparaten am größten sind, so werden sie sich bei diesen, besonders wenn man eine Kompensationsmethode anwendet, am leichtesten beobachten lassen.

§ 9. Die Schwankungen lassen sich vorausberechnen, wenn man in der v. Schweidlerschen Formel $\bar{s} = \frac{1}{\sqrt{Z}}$ an Stelle von Z den Sättigungsstrom i einführt. Bei dem Zerfall eines jeden Atomes wird ein α-Teilchen ausgesandt[1]), das auf seinem Wege in Luft eine gewisse Anzahl Ionen erzeugt. Nach Rutherford[2]) erzeugt ein α-Teilchen, das von Radium selbst

1) Das RaF sendet bekanntlich auch Elektronen von sehr geringer Geschwindigkeit aus. Die durch diese Elektronen erzeugte Ionisation ist gegenüber der durch die α-Partikel hervorgerufenen vernachlässigt.

2) E. Rutherford, Phil. Mag. (6) 10. p. 207. 1905. Bei dieser Bestimmung ist vorausgesetzt, daß jedes α-Partikel sowie jedes gebildete Ion als Ladung *ein* Elementarquantum trägt. Die Kenntnis des Elementarquantums ist nicht notwendig.

im Zustande seiner Minimalaktivität fortgeschleudert wird, bei seiner Absorption in Luft 86000 Ionenpaare. Unter Berücksichtigung der etwas größeren Reichweite der Poloniumstrahlen, 3,86 cm gegenüber 3,50 cm für die α-Partikel des Radiums selbst[1]), muß man hier etwa 94000 Ionenpaare setzen. Dann ist der durch den Zerfall von Z Atomen in der Sekunde entstehende Strom $i = Z.94000.e$, wo e die Ladung eines Ions bedeutet. Ist Z nicht die in der Sekunde zerfallende Anzahl, sondern die in der Zeit δ, so ist

$$i = \frac{Z.94000.e}{\delta} \quad \text{oder} \quad Z = \frac{i.\delta}{94000.e}.$$

Wird dies in die Formel $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{Z}}$ eingesetzt, so ergibt sich:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{94000.3{,}4.10^{-10}}}{\sqrt{i\delta}} = \frac{5{,}66.10^{-5}}{\sqrt{i.\delta}}.$$

Die Zeit δ ist offenbar die Zeit, über die die Elektrometernadel die Schwankungen vermöge ihrer Trägheit integriert. Hat man eine aperiodische Elektrometernadel, so kann für diese Zeit höchstens die Schwingungsdauer der Nadel in Betracht kommen. Betrachtet man nämlich den Ausschlag der Elektrometernadel zu einer gewissen Zeit t_1, so wird ein Impuls, den die Elektrometernadel zu einer Zeit erhalten hat, die zeitlich weiter zurückliegt als eine ganze Schwingung der Nadel, ohne Einfluß auf den Ausschlag der Nadel zu der Zeit t_1 bleiben. Die Elektrometernadel integriert aber nicht gleichmäßig über die Zeit ihrer Schwingungsdauer, da, wie man leicht sieht, die Impulse, die die Elektrometernadel eine halbe Schwingungsdauer früher empfangen hat, am meisten Einfluß auf den Ausschlag zu der Zeit t_1 haben. Unter Verzicht auf die theoretische Behandlung wurde bei den vorliegenden Beobachtungen für δ zunächst die Schwingungsdauer der Nadel eingesetzt. Man erhält dann für die nach der Formel

$$\bar{\varepsilon} = \frac{5{,}66.10^{-5}}{\sqrt{i.\delta}}$$

berechnete Schwankung den unteren Grenzwert, indem δ in dieser Formel zu groß eingesetzt ist.

---

1) **M. Levin, Physik. Zeitschr. 7. p. 521. 1906.**

§ 10. Die im § 8 mitgeteilten Beobachtungen sind nun wenig zu einer derartigen Berechnung geeignet, indem das dort benutzte Elektrometer nicht aperiodisch war, sondern erst nach etwa vier bis fünf Schwingungen zur Ruhe kam. Für ein solches kann man auch nicht die Schwingungsdauer der Nadel als Grenzwert für die Zeit, über die das Elektrometer die Schwankungen integriert, einsetzen. Es sei nur erwähnt, daß die dort beobachteten Werte etwa drei- bis viermal größer waren als die berechneten, bei denen für δ die ganze Schwingungsdauer der Nadel eingesetzt wurde.

Es wurden deshalb Versuche mit einem Dolezalekelektrometer gemacht, das durch Benutzung einer sehr leichten Nadel und durch Luftdämpfung mit Glimmerblättchen aperiodisch gemacht worden war. Die erhaltenen Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Blende	i (stat. Einh.)	$\bar{\varepsilon}$ in Proz.	$\bar{\varepsilon} = \frac{5{,}66 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{i} \cdot \delta}$	$\bar{\varepsilon}\sqrt{i} \cdot 10^3$
8	0,45 [1])	0,144	0,108	97
4	0,84	0,118	0,075	104
5	1,87	0,087	0,059	102
6	2,02	0,076	0,049	108

Die in Spalte 5 angegebenen Werte von $\bar{\varepsilon} \cdot \sqrt{i}$ zeigen wieder gute Konstanz. Wie aus Spalte 3 und 4 ersichtlich, sind die beobachteten Werte nur verhältnismäßig wenig größer als die berechneten, bei denen für δ die ganze Schwingungsdauer der Nadel (67″) eingesetzt wurde. Da in Wirklichkeit für δ ein Bruchteil dieser Zeit einzusetzen ist, so werden dann wahrscheinlich die berechneten Werte größer ausfallen

1) Die Sättigungsströme bei den einzelnen Blenden sind in der obigen Tabelle alle kleiner, als die entsprechenden in § 8 angegebenen Sättigungsströme. Das ist die Folge der zeitlichen Abklingung der Aktivität des untersuchten RaF-Präparates. Dieselbe verlief sehr angenähert nach der bekannten Gleichung $J_t = J_0 e^{-5{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot t}$. Als Beispiel sei eine nicht ausgewählt gute Messung herausgegriffen. Am 6./8. 1907 wurde der Sättigungsstrom des unbedeckten Präparates zu $14{,}18 \cdot 10^{-10}$ Amp., am 15./10. 1907 zu $9{,}73 \cdot 10^{-10}$ Amp. bestimmt. Die Rechnung nach obiger Formel liefert für den 15./10. 1907 den Wert $10{,}11 \cdot 10^{-10}$ Amp.

wie die beobachteten. Aber auch dies würde noch in Einklang mit den beobachteten Werten stehen, denn, wie im nächsten Paragraphen gezeigt werden wird, sind die beobachteten Werte wegen der Kapazität des Elektrometers um ungefähr 50 Proz. zu klein gefunden worden.

§ 11. Um den Einfluß der Kapazität auf die Schwankungen zu untersuchen, wurden die Schwankungen mit einem Goldblattelektrometer nach Hankel beobachtet, das eine sehr kleine Kapazität besitzt. Die Kapazität desselben wurde dann dadurch vergrößert, daß zu dem Hankelelektrometer noch die Kapazität des Dolezalekelektrometers hinzugeschaltet wurde, das schätzungsweise eine sechs- bis zehnfach so große Kapazität besaß. Es ergab sich, daß, wenn die Schwankungen an dem Hankelelektrometer allein beobachtet wurden, sie fast doppelt so groß ausfielen, als wenn mit dem Hankelelektrometer noch die Kapazität des Dolezalekelektrometers verbunden war. Es wurde z. B. in einem Versuche die prozentige Schwankung mit dem Hankelelektrometer zu 0,17 Proz. beobachtet; wurde zu dem Hankelelektrometer noch das Dolezalekelektrometer hinzugeschaltet, so ergab sich die prozentige Schwankung zu 0,089 Proz. Die im vorigen Paragraphen erwähnten Beobachtungen mit dem aperiodischen Dolezalekelektrometer sind infolge dieses Resultates auch um 50 Proz. zu vergrößern, um noch mehr, wenn auf die Kapazität 0 extrapoliert werden würde. Dieser Einfluß der Kapazität auf die Größe der beobachteten Schwankungen ist zusammengesetzterer Natur. Es kann erstens die Aufladezeit des Elektrometers gegenüber der Zeit zwischen zwei Schwankungsimpulsen in Betracht kommen. Die beobachteten Schwankungen werden dann zu klein ausfallen. Ferner ist eine gewisse Elektrizitätsmenge zum Laden und Entladen der Elektromerkapazität nötig, die dem durch den Bronsonwiderstand fließenden, einer Schwankung entsprechenden Strome verloren geht. (Auch die Schnelligkeit des Ausgleiches der Spannungen durch den Bronsonwiderstand kann in Betracht kommen.) Welcher von diesen Faktoren den von uns beobachteten Einfluß der Kapazität vorwiegend bewirkt hat, läßt sich nicht entscheiden.

§ 12. Fassen wir die erhaltenen Resultate zusammen, so hat sich ergeben:

1. Die v. Schweidlersche Beziehung $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{Z}}$ konnte durch Variieren von Z im Verhältnisse 1:100 bestätigt werden.

2. Verkleinerung der Kapazität des angewandten Elektrometers vergrößert bei der benutzten Versuchsanordnung die mit demselben beobachteten Schwankungen.

3. Berechnet man die zu erwartenden Schwankungen aus dem Sättigungsstrom, so stimmen die beobachteten Werte insofern mit den berechneten überein, als die beobachteten größer ausfallen als der kleinste nach der Theorie mögliche, nämlich der, bei dem für die Zeit, über die das Elektrometer die Schwankungen integriert, die Schwingungsdauer des (aperiodischen) Elektrometers eingesetzt wird.

§ 13. Nimmt man die von Hrn. v. Schweidler aufgestellte Beziehung $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{Z}}$ durch die vorliegenden Versuche für bestätigt an, so ergibt sich daraus eine einfache Methode zur Bestimmung des elektrischen Elementarquantums.[1]) Wurde an Stelle von Z der Sättigungsstrom i eingeführt, so ergab sich (§ 9)

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{e \cdot 94000}}{\sqrt{i\delta}}.$$

Diese Gleichung ergibt für das Elementarquantum e die Beziehung $e = \frac{\bar{\varepsilon}^2 i\delta}{94000}$. Die beschriebenen Versuche reichen nun noch nicht aus, um daraus einen exakten Wert für e ausrechnen zu können. Einerseits hat die Zeit δ, über die das Elektrometer die Schwankungen integriert, noch nicht genau bestimmt werden können, andererseits sind die Schwankungen wegen der Kapazität der benutzten Elektrometer zu klein ausgefallen. Um aber zu sehen, ob schon jetzt für e wenigstens die richtige Größenordnung herauskommt, wurde aus den Versuchen mit dem Hankelelektrometer e das Elementarquantum ausgerechnet. δ wurde dabei = 1 Sek. gesetzt. Es ergab sich $e = 1{,}3 \cdot 10^{-10}$ stat. Einh. Das ist in der Tat ein Wert, der in der Größenordnung sehr gut mit den von anderen Beob-

1) Es wird hier vorausgesetzt, daß das Ionisierungsvermögen der α-Teilchen konstant ist.

achtern gefundenen stimmt. Richarz fand aus der Elektrolyse $1{,}29 \cdot 10^{-10}$, Thomson $3{,}4 \cdot 10^{-10}$, Planck aus der Strahlungstheorie $4{,}69 \cdot 10^{-10}$. Wenn auch auf den oben mitgeteilten Zahlenwert kein Gewicht zu legen ist, so scheint die Übereinstimmung doch zu zeigen, daß die Methode zur Bestimmung des Elementarquantums brauchbar ist.

Diese von uns angegebene Methode hat mit der Thomsonschen Methode den Vorzug, daß bei ihr die Loschmidtsche Zahl nicht verwandt wird. Gegenüber der Thomsonschen Bestimmungsweise aber zeichnet sie sich dadurch aus, daß sie erstens einfacher ist, und zweitens die Versuche in einem vollkommen trockenen Gase angestellt werden.

§ 14. Es sei uns noch folgende Bemerkung gestattet. Ebenso wie man aus den Schweidlerschen Schwankungen[1]) das elektrische Elementarquantum erhalten kann (§ 13), kann man natürlich auch die Konstante berechnen, die angibt, wieviel Ionenpaare von einem α-Teilchen während seiner ganzen Flugbahn in einem Gase erzeugt werden (vgl. § 9). Selbstverständlich muß man dann das elektrische Elementarquantum als bekannt voraussetzen.

Nun ergibt sich aber jene Konstante auch noch durch folgende Überlegung. Bringt man z. B. eine Platte, bezogen mit RaF, in ein sehr gutes Vakuum und mißt den Strom, den die α-Teilchen befördern, so ist dieser

$$i_0 = Ne,$$

worin N die Anzahl der pro Sekunde ausgesandten α-Teilchen bedeutet, e das Elementarquantum. Mißt man jetzt den Sättigungsstrom der Ra F-Platte, wenn dieselbe sich in Luft befindet, so ist derselbe $i_l = Ne \cdot C$, wobei C die zu bestimmende Konstante ist. Dabei ist die Ladung Ne der α-Teile selbst gegenüber NeC vernachlässigt. Durch Division beider Gleichungen erhält man[2]):

$$C = \frac{i_l}{i_0}.$$

Setzt man diesen Wert nun in die Schweidlersche Beziehung ein, so ergibt sich, falls sie erfüllt ist, daß die Glei-

1) Diese Bezeichnung möchten wir für diese ganz charakteristischen Schwankungen radioaktiver Umwandlung vorschlagen.

2) E. Rutherford, l. c.

chung $i_0 = Ne$ zu Recht besteht. Das würde aber besagen, daß jedes α-Teilchen nur die Ladung *eines* Elementarquantums trägt. Auf diese Weise kann man die Anzahl der Hypothesen über das α-Teilchen, ob es besteht aus einem Wasserstoffmolekül in Verbindnng mit einem elektrischen Elementarquantum, oder aus einem zwei Elementarquanta mit sich führenden Heliumatom, oder endlich aus einem halben Heliumatom verbunden mit einem Elementarquantum, einschränken oder sogar bestimmt zwischen ihnen entscheiden. Letzteres wäre dann der Fall, wenn sich aus derartigen Versuchen die Gleichung

$$i_0 = N.2e$$

ergeben würde.

Leider reichen unsere Versuche bis jetzt nicht dazu aus, hier zu entscheiden.

Die Versuche mußten durch den Weggang des einen von uns[1]) abgebrochen werden. Sie sollen von dem anderen speziell auch zur genaueren Bestimmung des Elementarquantums fortgesetzt werden.

Berlin, Physik. Institut d. Universität.

---

1) Edgar Meyer.

(Eingegangen 10. Februar 1908.)

8. *Die elektrolytische Ventilwirkung des Niobs und eine Klassifizierung des Verhaltens elektrolytischer Anoden;* *von Günther Schulze.*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Die elektrolytische Ventilwirkung des Niobs wurde von W. v. Bolton[1]) festgestellt, der zuerst reines Niob darstellte, nachdem längere Zeit die Wasserstoffverbindung für das Metall gegolten hatte. Er fand, „daß bei 120 Volt Wechselstrom durch einen Elektrolyten ($^1/_{10}$ H_2SO_4) nicht hindurchgeht, wenn beide Elektroden aus Niobblech bestehen. Ist die eine Nb, die andere Pt, so geht nur die eine Phase des Wechselstromes hindurch, ähnlich wie bei Tantal, und zwar von Pt nach Nb, das heißt, wenn Niob negativ ist".

Muthmann und Fraunberger[2]) fanden, „daß die seltenen Metalle V und Nb die Eigenschaft der Passivierbarkeit zeigen". Als Maß für den Grad der Passivierbarkeit diente die elektromotorische Kraft, welche eine Kombination der betreffenden Elemente mit der Normalquecksilberelektrode zeigte. Doch konnte nach W. v. Bolton das Material, das sie benutzten, kein reines Niob sein.

In den Versuchen, über die hier berichtet werden soll, stellte W. v. Bolton von der Firma Siemens & Halske in liebenswürdigster Weise seinen Vorrat an Niob zur Verfügung. Derselbe bestand aus einigen dünnen Blechen unregelmäßiger Umrandung von 1—3 qcm Oberfläche, einem ziemlich regelmäßigen Würfel von 0,13 ccm Inhalt und einigen ca. 0,1 ccm großen Bruchstücken eines kugelförmigen Regulus, die an einer Seite durch eine glatte, kugelförmig gekrümmte Oberfläche begrenzt werden.

1) W. v. Bolton, Zeitschr. f. Elektrochem. 13. p. 145. 1907.

2) W. Muthmann u. F. Fraunberger, Sitzungsber. der Kgl. Akad. der Wissensch. zu München 34. II. 1904.

Der Gang der Untersuchung, die Schaltung, die benutzten Apparate waren dieselben wie bei der Untersuchung des Tantals.[1])

Infolge der Kleinheit der einzelnen Stücke bot die Abdichtung der stromzuführenden Drähte die größten Schwierigkeiten, deren Überwindung nicht in befriedigender Weise gelang. Bei allen Dichtungsmitteln, die probiert wurden (Chatterton–Kompound, Mennigekitt, Siegellack, Bleiglätte-Glyzerinkitt), bahnte sich der Strom zwischen Niob und Dichtungsmaterial einen Weg, bis er zu dem stromzuführenden Drahte gelangte. Bei Spannungen unter 100 Volt wurde die Zelle erst nach Tagen undicht, bei höheren Spannungen dagegen in ziemlich kurzer Zeit.

Orientierende Versuche über die Formierungsgeschwindigkeit ergaben dieselbe Größenordnung wie beim Tantal.

Um zu untersuchen, in welchen Elektrolyten Niob Ventilwirkung zeigt, wurden die Niobbleche von oben her ein wenig in den Elektrolyten eingetaucht. Da der Elektrolyt allmählich am Niobblech in die Höhe kroch, auch Funken vom Elektrolyten zum nicht formierten Teile des Bleches übersprangen, ließ sich in verdünnten Lösungen die Maximalspannung nicht annähernd erreichen. Aus der im folgenden mitgeteilten Tabelle läßt sich nur ersehen, wo Ventilwirkung vorhanden ist, und oberhalb welches Betrages sie liegt.

Die Lösungen wurden in mittlerer Verdünnung angewandt:

Tabelle I.

Elektrolyt	Ausgehaltene Spannung	Elektrolyt	Ausgehaltene Spannung
$NaOH$	300 Volt	KCN	300 Volt
NH_4OH . . .	300 „	$K_4Fe(CN)_6$ . .	150 „
HCl	300 „	K_2CO_3 . . .	310 „
H_2SO_4	210 „	Essigsäure . .	300 „
HNO_3	170 „	$(NH_4)_2HPO_4$.	300 „
H_3AsO_4 . . .	250 „	$NaBr$	200 „
$KHCr_2O_7$ . . .	210 „	KJ	200 „
$KMnO_4$ . . .	170 „	HF	250 „

1) G. Schulze, Ann. d. Phys. 23. p. 226. 1907.

Die Tabelle zeigt, daß ebenso wie bei Tantal in allen untersuchten Elektrolyten Ventilwirkung bis zu beträchtlichen Spannungen vorhanden ist.

Um den Einfluß der Konzentration auf die Maximalspannung zu ermitteln, wurde versucht, die Maximalspannung beim Eintauchen von oben her trotz der angegebenen Störungen zu erzwingen. Das charakteristische äußerliche Kennzeichen der Maximalspannung ist das Überspringen zahlreicher feiner Fünkchen innerhalb der Flüssigkeit vom Elektrolyten zum Metall. Wenn nun das Niobblech zuerst fast ganz eingetaucht und möglichst weit formiert, dann ein wenig gehoben wurde, so daß die Flüssigkeitsoberfläche von schon formierten Teilen durchsetzt wurde, so ließ sich bei verhältnismäßig hoher Stromdichte (0,05 Amp./qcm) und nicht zu geringen Konzentrationen das Funkenspiel erzwingen und gleichzeitig beobachten, daß dann tatsächlich die Spannung von der Stromdichte nahezu unabhängig wurde. Diese Spannung wurde als Maximalspannung angesehen. Da sie aber wegen der dabei auftretenden starken Erhitzung des Bleches und wegen anderer Störungen nicht ohne weiteres mit den gelegentlich der Tantaluntersuchung angegebenen Werten vergleichbar war, wurden mit zwar wesentlich größerem, aber fast ebenso dünnem Tantalblech, das die Firma Siemens & Halske zur Untersuchung seiner Brauchbarkeit zum Gleichrichten von Wechselstrom zur Verfügung gestellt hatte, ganz dieselben Versuche ausgeführt. So wurden für Niob und Tantal folgende Werte erhalten:

Tabelle II.

Einfluß der Konzentration des Elektrolyten auf die Maximalspannung.

Elektrolyt:		NaOH		HCl		$(NH_4)_2HPO_4$	
Metall:		Nb	Ta	Nb	Ta	Nb	Ta
		Volt	Volt	Volt	Volt	Volt	Volt
Maximal-	10 Proz.	76	120	170	200	210	250
spannung	1 „	190	320	220	280	360	380
bei	0,1 „	470	490	350	410	530	525

Die Tabelle zeigt, daß sich Niob dem Tantal sehr ähnlich verhält. Bei Niob scheint die Maximalspannung im allgemeinen

ein wenig niedriger zu sein und mit zunehmender Konzentration noch schneller zu sinken als bei Tantal.

Aus den Versuchen läßt sich mutmaßen, daß Niob bei einwandsfreier Einführung nicht zu kleiner Elektroden und großer Verdünnung des Elektrolyten fast ebenso hohe Spannungen abdrosseln kann, wie Tantal, also z. B. über 900 Volt in 0,02 Proz. K_2CO_3.

Bei den Versuchen der Tab. II ließ sich die Flüssigkeit zum Sieden erhitzen, ohne daß die Maximalspannung wesentlich sank. Der Einfluß der Temperatur auf die Ventilwirkung ist also ebenso gering wie beim Tantal.

Zur Bestimmung der Kurve der Sperrfähigkeit[1]) ($a = f(\delta/\varepsilon)$, $\delta/\varepsilon = f/4\pi C$, δ Dicke, f Fläche, C Kapazität, ε Dielektrizitätskonstante der dielektrischen Gasschicht) wurden der Würfel und das größte der Bruchstücke des Regulus benutzt. Sie wurden stumpf gegen einen oben amalgamierten Kupferstab gepreßt und dann, soweit sie abgedichtet werden sollten, zunächst mit einer dünnen Schicht Chatterton-Kompound überzogen. Darüber wurde ein Kitt aus Glyzerin und Bleiglätte gestrichen, der in kurzer Zeit erhärtete und das Niob gut am Kupferstabe festhielt. Nachdem dieser Kitt völlig getrocknet war, wurde er zur Verbesserung der Isolation gegen den Elektrolyten mit Siegellack getränkt. Diese Art der Abdichtung bewährte sich am besten, war aber auch nur bis höchstens 200 Volt brauchbar. Deshalb wurden die Versuche nur bis 100 Volt ausgedehnt. Da die Bestimmung der freien Oberfläche der kleinen Niobstücke schwierig war, die Versuche eine große Empfindlichkeit der Ventilwirkung gegen Stromunterbrechungen ergaben und die oben angegebenen Störungen noch hinzukamen, kann die unten angegebene Kurve der Sperrfähigkeit auf große Genauigkeit keinen Anspruch machen.

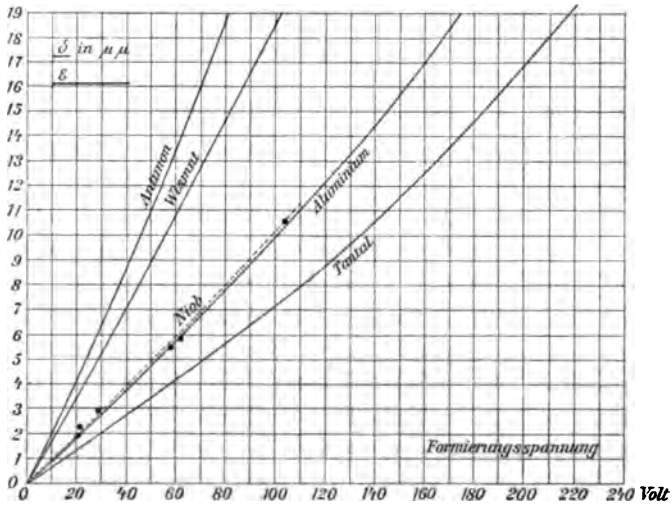
Die Messungen wurden mit 0,1 Proz. K_2CO_3 ausgeführt und zwar bei Zimmertemperatur, da bei derselben die Dichtung besser standhielt als bei 0° C. Trotzdem sind die Werte mit dem für andere Metalle bei 0° C. erhaltenen vergleichbar, da alle bisherigen Messungen ergaben, daß der Einfluß der

1) G. Schulze, Ann. d. Phys. 24. p. 43. 1907.

Temperatur auf die Kapazität, wenn überhaupt vorhanden, jedenfalls sehr gering ist.

Durch Vorversuche wurde festgestellt, daß die Gashaut ungefähr $1^1/_2$ Stunden nach dem Anlegen der Spannung ihre endgültige Dicke erreicht. Die endültigen Messungen wurden 2—3 Stunden nach Anlegen der Spannung ausgeführt.

Die nachstehende Figur zeigt, daß die Kurve der Sperrfähigkeit des Niobs der des Aluminiums sehr nahe und wesentlich höher liegt als die des Tantals. Außer Niob und Tantal zeigen die in derselben fünften Gruppe des periodischen Systems



Kurve der Sperrfähigkeit des Niobs. Zum Vergleich: Bi, Sb, Ta, Al.

der Elemente befindlichen Metalle Wismut und Antimon Ventilwirkung. Bei ihnen liegt ebenfalls die Kurve der Sperrfähigkeit bei dem Metalle mit höheren Atomgewichten tiefer. Da Niob und Tantal einer anderen Untergruppe angehören als Antimon und Wismut, läßt sich eine gleichmäßige Beeinflussung der Sperrfähigkeitskurven aller vier Elemente durch das Atomgewicht nicht erwarten.

Da ferner nach dem Verhalten von Niob und Tantal einerseits und von Antimon und Wismut andererseits chemisch ähnliche Stoffe ähnliche Ventilwirkung zeigen, so läßt sich die Vermutung aussprechen, daß die dem Aluminium chemisch

sehr nahestehenden Elemente Scandium, Yttrium, Lanthan, Ytterbium auch Ventilwirkung zeigen werden, und daß ihre Ventilwirkung der des Aluminiums ähnlich ist.

So ist also die elektrolytische Ventilwirkung bisher bei elf Elementen nachgewiesen oder wenigstens wahrscheinlich gemacht. Als Bedingung für ihr Zustandekommen war in der Arbeit über Wismut, Antimon und Magnesium[1]) angegeben, daß „das Metall als Anode im Elektrolyten schwer löslich sei und mit ihm eine schwer lösliche nichtleitende Verbindung bilden könne".

Um die Bedingung für das Zustandekommen der Ventilwirkung noch besser zu formulieren und zu zeigen, welcher Platz der Ventilwirkung in einer allgemeinen Klassifizierung elektrolytischer Anoden zukommt, möge eine solche hier zunächst durch Aufsuchen der einzelnen typischen Möglichkeiten versucht werden.

Wenn eine beliebige Substanz mit metallischer Leitfähigkeit in einem beliebigen Elektrolyten zur Anode gemacht wird, so können zunächst zwei Fälle eintreten:

I. Die Anode bildet mit dem Anion eine lösliche Verbindung.

II. Die Anode bildet mit dem Anion keine lösliche Verbindung.

Im zweiten Falle sind wieder zwei Möglichkeiten da:

1. Die Anode verbindet sich überhaupt nicht mit dem Anion (oder einem Teile desselben). Dann findet im allgemeinen Sauerstoffentwickelung an ihr statt. Beispiel: Pt, C.

2. Die Anode bildet mit dem Anion (oder einem Teile desselben) eine unlösliche Verbindung. Diese Verbindung wird die Oberfläche der Anode zunächst als Haut überziehen. Dabei läßt sich weiter unterscheiden:

a) Die Haut ist körnig, rissig, grobporös oder schwammig und haftet nur lose auf der Anode.

α) Sie leitet. Dann kann sie das Metall vor der Einwirkung des Anions um so besser schützen, je zusammenhängender und je dicker sie ist. Beispiel: Pb in H_2SO_4.

---

1) l. c.

β) Sie leitet nicht. Dann kann sie das Metall vor der weiteren Einwirkung des Anions nicht schützen. Der Strom wird sie dauernd verstärken, bis sie beginnt, abzublättern und zu Boden zu sinken. Beispiel: Pb in K_2CrO_4.

Im Fall α) wird an der Anode meist ein geringer, im Falle β) ein mäßiger Spannungsverlust eintreten.

b) Die Haut bildet eine zusammenhängende, fest auf der Anode haftende Schicht.

α) Die Schicht leitet. Dann schützt sie das Metall vor dem weiteren Angriff durch das Anion. Sie selbst kann nicht wachsen (wenn nicht das Anion sekundär durch sie hindurchdiffundiert), und bleibt auf molekularer Dicke stehen. Das Metall erscheint edel. Sogenannte „Passivität". Beispiel: Fe, Ni, Cr u. a. in wässerigen Lösungen von Sauerstoffsalzen.

β) Die Schicht leitet nicht. Dann werden die Anionen, wenn ihnen genügend Spannung zur Verfügung steht, mechanisch durch die Schicht hindurchdringen. Die Schicht erhält eine äußerst feinporöse (röhrenförmige) Struktur und wächst dauernd mit der hindurchgeschickten Elektrizitätsmenge. Hier ist eine Art Ventilwirkung möglich dadurch, daß die Anionen und Kationen verschiedenen Widerstand in den feinen Poren erfahren. Dieser Fall scheint bei Ag in HBr vorzuliegen und läßt sich grob nachahmen mit einem porösen Tonzylinder, auf dem ein geeignetes Metall niedergeschlagen ist.

Zwischen diesen typischen Grenzfällen sind Kombinationen möglich. Zum Beispiel kann zwischen dem Grenzfalle, daß sich an der Anode nur Gas entwickelt, weil sie sich überhaupt nicht mit dem Anion verbindet und dem Grenzfalle, daß alle zur Anode gelangenden Anionen mit ihr eine nichtleitende poröse Haut bilden, so daß sich überhaupt kein Gas entwickelt, die Kombination eintreten, daß sowohl Gasentwickelung als Hautbildung stattfindet. Dies ist das Gebiet der echten Ventilwirkung. Das Gas bildet in den Poren der festen Haut eine äußerst dünne Schicht, welche die eigentümlichen Erscheinungen der echten Ventilwirkung verursacht. Wenn für eine bestimmte Kombination von Metall und Elektrolyt zwischen der gebildeten Hautmenge und Gasmenge ein festes gesetzmäßiges Verhältnis besteht, so müssen sich Beziehungen finden lassen zwischen diesem meßbaren Verhältnisse und der

Formierungsgeschwindigkeit, Empfindlichkeit gegen Stromunterbrechungen, Maximalspannung und anderen Erscheinungen der betreffenden Kombinationen.

Zusammenfassung.

1. Die elektrolytische Ventilwirkung des Niobs ist der des Tantals sehr ähnlich.

2. Es ist wahrscheinlich, daß auch Scandium, Lanthan, Yttrium, Ytterbium Ventilwirkung zeigen.

3. Es wurde ein Schema für das Verhalten elektrolytischer Anoden aufgestellt, und die Stellung der elektrolytischen Ventilwirkung in demselben, sowie die Bedingungen für das Zustandekommen der Ventilwirkung angegeben.

(Eingegangen 8. Februar 1908.)

9. *Ein neues Universalvariometer für Lokalvariationen, Intensitäts- und Deklinationsschwankungen;* von *Erich Mayer.*

(Tübinger Inaugural-Dissertation 1907.)

Grundprinzip.

Die Methode des hier beschriebenen Variometers besteht darin, die Änderungen der Horizontalintensität zu messen durch die Verschiebungen eines Kompensierungsmagnetes gegen ein feststehendes Magnetometer, an dessen Ort die Feldänderungen kompensiert werden.

Beschreibung des Apparates.

Auf einem Dreifuß mit Stellschrauben sitzt mikrometrisch drehbar die Grundplatte (*P*), auf welcher der Apparat aufgebaut ist. Er besteht wesentlich aus 5 Teilen:

1. *Dem Fernrohr* (*F*), das mit einem Bügel an der Platte befestigt ist. Es ist in Höhe und Richtung verstellbar und besitzt ein Gaußsches Okular und einen Doppelfaden.

2. *Dem Schlitten* (*S*). Dieser befindet sich in der Mitte der Platte und ist mit einer Schraube von der Ganghöhe 0,25 mm horizontal verschiebbar. An der Schraube ist eine Trommel (*T*) angebracht, die in 250 Teile geteilt ist und so die direkte Ablesung einer Verschiebung von 0,001 mm gestattet. Die Zahl der ganzen Umdrehungen der Trommel wird an einer seitlichen Skale abgelesen.

Auf den Schlitten ist eine um eine vertikale Achse mikrometrisch drehbare Scheibe aufgesetzt, die das Lager des Kompensierungsmagnetes trägt. Außerdem erwies es sich als notwendig, das Lager mit einer Schraube zu seitlicher Verschiebung des Magnetes in Richtung seiner Längsachse zu versehen. Der Magnet liegt in zwei Stützen und wird in der Mitte durch eine Feder von oben festgedrückt.

3. *Dem Magnetometer* (*M*). Dem Fernrohr gegenüber angebracht, steht auf einer Kreisplatte das rechteckige Kupfer-

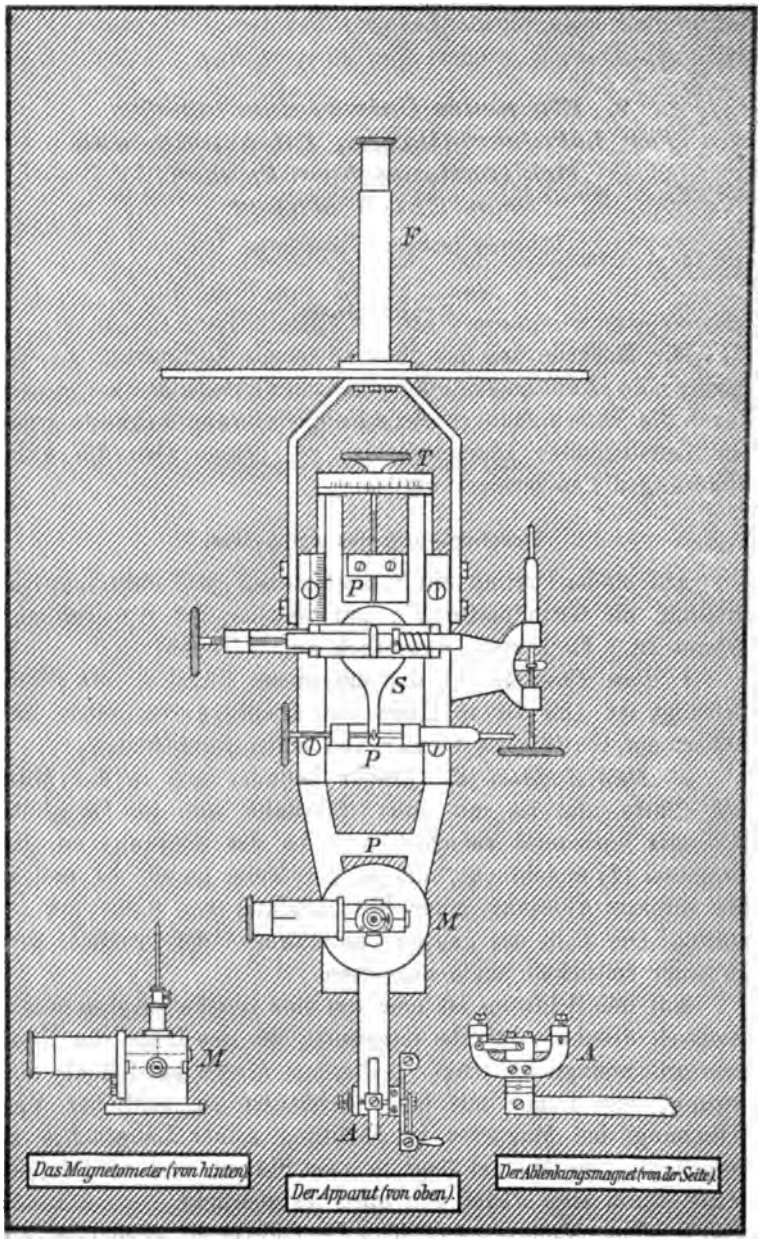

F
T
P
S
P
P
M
M
A
A
Das Magnetometer (von hinten).
Der Apparat (von oben).
Der Ablenkungsmagnet (von der Seite).

Fig. 1.

gehäuse. Durch eine Bohrung führt vom Torsionskopf ein Quarzfaden, an dem ein Spiegelchen von 5 mm Durchmesser hängt. An der Rückseite des Spiegels ist ein noch kleineres Magnetchen (2 mm) mit Klebwachs angeheftet. Zur Einsetzung des Spiegels ist das Gehäuse in vertikaler Ebene durchschnitten und zerlegbar. In der Richtung zum Fernrohr hat das Gehäuse eine Bohrung, die auf 0,2 mm dem Spiegel angepaßt ist. Zur Verstärkung der Dämpfung ist in diese Bohrung von hinten ein rechtwinklig zugespitzter Kupferbolzen eingeführt, der dem Spiegel sehr nahe gebracht werden kann, ohne seine Ablenkung zu stören. Senkrecht zu dieser geht in derselben Höhe eine zweite horizontale Bohrung, die an beiden Enden mit Silberspiegeln verschlossen ist. Eine dritte horizontale Bohrung ist unmittelbar über dieser und parallel zu ihr durchgeführt und trägt an der einen Seite ein Mikroskop mit Fadenkreuz zur Beobachtung der Stellung des Quarzfadens. Die freien Öffnungen des Gehäuses sind durch Deckgläser verschlossen.

4. *Dem Ablenkungsmagnet* (*A*). Vom Fuß des Magnetometers auf der Platte (*P*) und um diesen drehbar führt horizontal nach hinten ein Arm, der den Ablenkungsmagnet trägt. Der letztere ist um eine horizontale Achse senkrecht zu diesem Arm drehbar und ist mit einem federnden Hebel versehen, der bei vertikaler Stellung durch einen Dorn in einer Vertiefung festsitzt und horizontal nach beiden Seiten gegen Anschlagschrauben gelegt werden kann.

5. *Dem Deklinationsspiegel.* Zwischen den Füßen des Apparates, am unteren Ende der Drehachse, ist ein Spiegel befestigt, durch den aus einiger Entfernung mit einem Skalenfernrohr die Drehungen des Apparates beobachtet werden.

Die Maße des Apparates zeigt die Abbildung in $^1/_4$ nat. Größe. (Vgl. Fig. 1.)

Das Material des ganzen Apparates ist Messing mit Ausnahme des Dämpfungsgehäuses, das aus elektrolytischem Kupfer gearbeitet ist, und der Mikrometerschrauben, zu denen Neusilber verwendet wurde.

Der Apparat wurde hergestellt in der Werkstätte des physikalischen Institutes zu Tübingen.

Der Magnet wurde ein Jahr vor Ausführung der Messungen

angefertigt, bis zur Sättigung magnetisiert und künstlich gealtert. Mehrmalige Bestimmungen seines Momentes ergaben eine gute Konstanz.

Justierung.

Zunächst werden Kompensierungs- und Ablenkungsmagnet entfernt, dann geschieht die Aufstellung in folgender Weise:

1. *Senkrechtstellen der Achse durch die Stellschrauben.* Dies wird erreicht mit Hilfe des Mikroskops und des Quarzfadens. Die Achse steht senkrecht, wenn der Faden bei jeder Drehung des Apparates mit dem Fadenkreuz in Deckung bleibt. Es ist erforderlich, daß die Ebene durch die Achse des Mikroskops und den Aufhängepunkt des Fadens parallel der Drehachse des Apparates ist.

2. *Einstellen des Fernrohres* auf den Spiegel des Magnetometers.

3. *Einstellen des Spiegels in den Meridian.* Der Apparat wird so weit gedreht, bis der Doppelfaden mit seinem Spiegelbild so zur Deckung kommt, daß man vier parallele Faden mit gleichen Zwischenräumen erhält (vgl. Fig. 2).

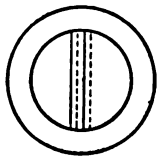


Fig. 2.

4. *Einsetzen des Ablenkungsmagnetes* in den in die Fernrohrachse gerichteten Arm. Der Magnet wird zunächst zu seinem Hebel so orientiert, daß er bei vertikaler Stellung des Hebels keine Wirkung auf das Magnetometer ausübt. Dann wird er nach beiden Seiten bis zu maximalen Ausschlägen umgelegt und die Anschläge festgelegt.

5. *Beseitigung der Torsion des Fadens.* Diese geschieht durch Vergleichung der Ablenkungen nach beiden Seiten:

entweder mit gewöhnlichem Okular und Skale am Fernrohr. In diesem Falle kann an Stelle der Ablenkung durch den Magnet eine solche durch die Torsion des Fadens treten, indem man den Spiegel um ein- oder mehrmals 360° nach beiden Seiten umlegt

oder wenn, was auch sonst von Vorteil ist, das Lager des Ablenkungsmagnetes auf seinem Arm verschoben werden kann, mit Hilfe einer Ablenkung um 45° unter Benützung des Gaussschen Okulars und der seitlichen Spiegel.

6. *Einlegen des Kompensierungsmagnetes* so, daß der Spiegel in seiner Einstellung bleibt.

7. *Justierung dieses Magnetes.* Es muß erreicht werden, daß das Magnetometer sich in der Äquatorialebene des Magnetes befindet. Der Schlitten wird um einige Millimeter verschoben und der dadurch hervorgerufene Ausschlag zur Hälfte durch Drehung und zur Hälfte durch seitliche Verschiebung des Magnetes beseitigt. Dieser Vorgang wird wiederholt bis die Verschiebung keinen Ausschlag mehr hervorbringt.

Diese Justierung muß eine sehr exakte sein, so daß die seitliche Verschiebung des Magnetes von freier Hand sich als zu schwierig erwies. Ebenso ergaben sich Fehler aus einer Anordnung, bei welcher der Magnet nach der Justierung durch Anziehen von Schrauben in ringförmigen Lagern festgehalten werden sollte. Außerdem ist zu beachten, daß während der Dauer dieser Korrektionen die Deklination sich fortgesetzt ändert; es muß deshalb die Beseitigung des Fehlers schließlich auch noch durch Drehung des Apparates versucht werden. Dies geschieht in der Weise, daß der Magnet manchmal möglichst weit vom Magnetometer weggerückt wird; dann kommt die wahre Richtung des magnetischen Meridians am stärksten zur Geltung, der Fehler ist also am geringsten. Die Justierung kann leicht so ausgeführt werden, daß auch bei größeren Verschiebungen sich kein Fehler bemerkbar macht.

8. *Nachprüfung der Torsion.* Diese ist insofern angebracht, als durch die Annäherung des Magnetes die Empfindlichkeit des Magnetometers wesentlich größer wird.

9. *Nachprüfung der Justierung des Ablenkungsmagnetes* aus dem eben erwähnten Grunde.

Bestimmung des Skalenwertes.

Hilfskonstruktion. Zu diesem Zweck sind zwei Hilfsfelder nötig, eines senkrecht zum Meridian und eines in dessen Richtung, welches das Erdfeld beliebig zu variieren gestattet. Es werden auf der Grundplatte vier vertikale Stromspulen befestigt, von denen je zwei auf den anderen beiden senkrecht stehen. Die Spulen werden mit paarweise gleichen Abständen um das Magnetometer festgesetzt, die gleichgerichteten Spulen mit-

einander verbunden und beide Paare mit Kommutatoren versehen. Das Paar in Richtung des Meridians wird justiert durch Vergleichung der Ausschläge, die ein konstanter Strom nach beiden Seiten hervorbringt. Bei dem Paar, das senkrecht zum Meridian steht, darf ein hindurchgeschickter Strom keine Wirkung auf das Magnetometer ausüben.

Die Wirkung eines Spulenpaares wird berechnet als:

$$H' = \frac{2\pi r^2 n}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot J$$

wo:

r den Spulenhalbmesser,
n die Anzahl der Windungen beider Spulen,
x den Abstand der Spulenmitte vom Magnetometer,
J die Stromstärke in absoluten Einheiten

bedeutet. Es ergab sich damit:

1. Hilfsfeld (senkrecht zum Meridian)	2. Hilfsfeld
$r = 10{,}165$ cm	$r = 9{,}563$ cm
$x = 3{,}55$ cm	$x = 8{,}125$ cm
$n = 8$	$n = 8$
$H' = 4{,}161 \,.\, J$	$H'' = 2{,}326 \,.\, J$

Die Zuleitungen wurden, um Störungen zu vermeiden, zusammengedreht; auch wurde ihre Isolation geprüft. Die verwendeten Ströme wurden nach dem Ohmschen Gesetz berechnet aus Spannung und Widerstand.

Dazu wurde der Widerstand zweier Spulen bestimmt als:

$$w = 0{,}23\ \Omega.$$

Hierzu kommt der Widerstand der Zuleitung, so daß für Spulen und Leitung zusammen genommen wurde:

$$w = 0{,}35\ \Omega.$$

Anmerkung: Da diese Werte neben den verwendeten Widerständen von 120—900 S.E. kaum in Betracht kommen, so genügt eine angenäherte Bestimmung derselben.

Bestimmung des magnetischen Momentes M des Kompensierungsmagnetes. Bezeichnen wir mit:

H die Horizontalkomponente des Erdfeldes,
F_1 das abgeschwächte Feld am Ort des Magnetometers,

H_1, H_2, H_3 die Hilfsfelder senkrecht dazu,
k die Konstante der Torsion[1]),
α_1, α_2, α_3 die Ausschlagswinkel des Magnetometers,
a_1, a_2, a_3 die Abstände der Pole des Kompensierungsmagnetes von der Mitte des Magnetometers,

so haben wir die Beziehungen:

$$\frac{H_1}{F_1 + k} = \operatorname{tg} \alpha_1 \quad \text{und} \quad F_1 = H - \frac{M}{a_1^3},$$

damit erhalten wir aus drei Beobachtungen zwei Werte für M, nämlich:

$$H - \frac{M}{a_1^3} + k = \frac{H_1}{\operatorname{tg} \alpha_1},$$

$$H - \frac{M}{a_2^3} + k = \frac{H_2}{\operatorname{tg} \alpha_1},$$

$$H - \frac{M}{a_3^3} + k = \frac{H_3}{\operatorname{tg} \alpha_3},$$

$$M_1 = \frac{\frac{H_1}{\operatorname{tg} \alpha_1} - \frac{H_2}{\operatorname{tg} \alpha_2}}{\frac{1}{a_2^3} - \frac{1}{a_1^3}},$$

$$M_2 = \frac{\frac{H_2}{\operatorname{tg} \alpha_2} - \frac{H_3}{\operatorname{tg} \alpha_3}}{\frac{1}{a_3^3} - \frac{1}{a_2^3}}.$$

Während der Dauer der Messung ist H als konstant angenommen.

Bei nachstehender Beobachtung wurde die am Fernrohr angebrachte Skale zur Bestimmung der Ausschlagswinkel benützt; diese kann jedoch wegbleiben, wenn H_1 und a_1 bzw. H_2 und a_2 bzw. H_3 und a_3 so gewählt werden, daß $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 45^0$ ist. Dann fällt auch die Messung des Skalenabstandes fort.

---

1) Mit den Bezeichnungen von Kohlrausch (Lehrb. d. prakt. Phys. 9. Aufl. p. 339) haben wir:

$$k = \Theta \,.\, F = \frac{d}{M \,.\, F} \cdot F = \frac{d}{M},$$

d. h. k ist eine Konstante unabhängig von F.

Die obigen Gleichungen können zugleich zur Bestimmung von H dienen, wenn Θ bestimmt wird. Außerdem muß dazu der Abstand x_1 des Kompensierungsmagnetes vom Magnetometer sehr genau gemessen werden, da ein Fehler von 0,1 mm bei dieser Messung im Resultat einen Fehler von $^4/_{10000}$ H ausmacht.

Soll aus diesen Gleichungen nur der Skalenwert ermittelt werden, so genügt eine rohe Messung von x_1, da dieser Wert nur als Hilfswert zur Berechnung dient und ein Fehler wohl in M nicht aber im Endresultat zur Geltung kommt.

Wir haben als Konstanten:

$x_1 = 15{,}76$ cm Abstand des Komp.-Magnetes im Anfangspunkt der seitlichen Skale,

$l = 3{,}69$ cm halber Polabstand ($^6/_8$ der halben Länge) des Komp.-Magnetes, wo also:

$$a_1^2 = (x_1^2 + l^2)^{3/2},$$

$A = 28{,}25$ cm Skalenabstand,

$E = 2{,}062$ Volt Stromspannung.

Wir erhalten damit:

	Punkt I	Punkt II	Punkt III
Abstand	$x_1 = 15{,}76$ cm $\frac{1}{a_1^3} = 0{,}00023583$	$x_2 = 14{,}76$ cm $\frac{1}{a_2^3} = 0{,}00028398$	$x_3 = 13{,}76$ cm $\frac{1}{a_3^3} = 0{,}00034590$
Ausschlagswinkel	70,33 6,33 64,00 6,36 6,345 cm 57,64 $\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{6{,}345}{28{,}25}$	68,95 4,95 64,00 4,96 4,955 cm 59,04 $\operatorname{tg} 2\alpha_2 = \frac{4{,}955}{28{,}25}$	71,12 7,12 64,00 7,19 7,155 cm 56,88 $\operatorname{tg} 2\alpha_3 = \frac{7{,}155}{28{,}25}$
Widerstand	120 S.E. = 112,89 Ω $w =$ 0,35 Ω $W_1 = 113{,}24$ Ω	250 S.E. = 235,18 Ω $w =$ 0,35 Ω $W_2 = 235{,}53$ Ω	900 S.E. = 846,66 Ω $w =$ 0,35 Ω $W_3 = 847{,}01$ Ω
Hilfsfeld	$H_1 = \frac{4{,}161 \cdot E}{10 \cdot W_1}$ abs. Einh. $= \frac{4{,}161 \cdot 2{,}062}{10 \cdot 113{,}24}$ $= 0{,}0075767$	$H_2 = \frac{4{,}161 \cdot E}{10 \cdot W_2}$ abs. Einh. $= \frac{4{,}161 \cdot 2{,}062}{10 \cdot 235{,}53}$ $= 0{,}0036427 5$	$H_3 = \frac{4{,}161 \cdot E}{10 \cdot W_3}$ abs. Einh. $= \frac{4{,}161 \cdot 2{,}062}{10 \cdot 847{,}01}$ $= 0{,}0010130$
	$\frac{H_1}{\operatorname{tg}\alpha_1} = 0{,}068311$	$\frac{H_2}{\operatorname{tg}\alpha_2} = 0{,}041854$	$\frac{H_3}{\operatorname{tg}\alpha_3} = 0{,}008125$

$$M_1 = \frac{0{,}026457}{0{,}00004815} = 549{,}46,$$

$$M_2 = \frac{0{,}033729}{0{,}00006192} = 544{,}72.$$

$$\underline{M = 547{,}09}.$$

Berechnung des Skalenwertes. Aus dem magnetischen Moment des Komp.-Magnetes wird die Größe der Feldänderung be-

rechnet, die einer gewissen Verschiebung dieses Magnetes am Orte des Magnetometers entspricht. Nach der Formel:

$$\text{Wert von } (x_2 - x_1) = M\left(\frac{1}{(x_1^2 + l^2)^{3/2}} - \frac{1}{(x_2^2 + l^2)^{3/2}}\right)$$

erhält man für die Skalenwerte folgende Tabelle:

Abstand des Komp.-Magnetes in cm	Wert eines Skalenteiles = 0,001 mm abs. Einh.
13,1	0,000 004 61
13,2	448
13,3	436
13,4	424
13,5	413
13,6	402
13,7	391
13,8	381
13,9	371
14,0	361
14,1	352

Empirische Bestimmung des Skalenwertes. Zu diesem Zweck werden in mehreren Stellungen des Komp.-Magnetes durch entsprechend gewählte Hilfsfelder H_1, H_2, H_3 Ablenkungen um 45° hervorgerufen. Dann wird jedesmal das Erdfeld um ein bestimmtes Feld H'' variiert und die Änderung durch Verschiebung des Magnetes wieder aufgehoben. So erhält man direkt den Skalenwert für die betreffenden Stellen; es geben dabei die zeitlichen Änderungen des Erdfeldes zu Störungen Anlaß, doch wird die Genauigkeit bei rascher Ausführung zu ruhiger Tageszeit eine befriedigende sein.

Wir hatten:

$$E = 2{,}038 \text{ Volt Stromspannung},$$

$$W = 250 + 0{,}35\ \Omega \text{ Widerstand},$$

somit:

$$H'' = 2{,}326 \,.\, J = \frac{2{,}326 \,.\, 2{,}038}{10 \,.\, 250{,}35}$$

$$= 0{,}001\,8985 \text{ abs. Einh.}$$

Die Messung ergab nun:

	Punkt I	Punkt II	Punkt III
Abstand	$x_1 = 13{,}685$ cm	$x_2 = 13{,}935$ cm	$x_3 = 14{,}360$ cm
Mit $+H''$ Größe der Verschiebung in Skalenteilen	$+H_1$: 479,2; 478,3 → 478,75; 481,7 $-H_1$: 485,1; 484,1 → 484,6	$+H_2$: 511,6; 511,5 → 511,55; 511,3 $-H_2$: 511,0; 511,1 → 511,05	$+H_3$: 571,1; 569,4 → 570,25; 574,5 $-H_3$: 580,3; 577,1 → 578,7
Mit $-H''$	$+H_1$: 483,6; 484,5 → 484,05; 487,8 $-H_1$: 492,1; 491,1 → 491,6	$+H_2$: 517,8; 518,5 → 518,15; 521,7 $-H_2$: 527,0; 523,5 → 525,25	$+H_3$: 569,2; 572,2 → 570,7; 574,8 $-H_3$: 577,6; 580,1 → 578,85
Mittel	484,75	516,5	574,6
Skalenwert	0,000003906	0,000003666	0,000003295
Aus der Tabelle	0,000003926	0,000003675	0,000003320

Die Abweichungen betragen also weniger als 1 Proz. des Skalenwertes.

Nachprüfung des Skalenwertes. Ist dieser einmal in der angegebenen Weise bestimmt worden, so kann er jederzeit leicht nachgeprüft werden unter Anwendung des zweiten Hilfsfeldes und des Ablenkungsmagnetes. So wurde obige Bestimmung zwei Monate später nachgeprüft, man hatte:

$$E = 2{,}034 \text{ Volt Stromspannung,}$$

$$W = 250 \text{ S.E.} + 0{,}35\ \Omega \text{ Widerstand,}$$

somit:

$$H'' = 2{,}326 \,.\, J = \frac{2{,}326 \,.\, 2{,}034}{10 \,.\, 235{,}53}$$

$$= 0{,}0020089 \text{ abs. Einh.}$$

Man erhielt als Verschiebungen:

Mit $+H''$	563,7		Mit $-H''$	566,4	
	562,0			569,7	
	558,6	Mittel:		567,6	Mittel:
	556,2	558,0		565,2	567,6
	554,0			568,8	
	554,0			567,9	

Dies ergibt für Punkt 14,057 cm als Skalenwert 0,000003569,
während die Tabelle angibt . . . . . 0,000003559.

Der Skalenwert war also unverändert.

Die Messungen.

Zu den eigentlichen Messungen werden die Stromspulen entfernt, so daß der Apparat handlich und leicht transportabel ist. Die Aufstellung geschieht rasch mit Hilfe des Mikroskops. Der Apparat wird auf den Meridian eingestellt, der Ablenkungsmagnet umgelegt und der Schlitten verschoben, bis die Ablenkung 45° beträgt. Die Stellung des Schlittens wird abgelesen, der Magnet nach der anderen Seite umgelegt, wieder eingestellt und abgelesen. Nach beliebigen Zeitabschnitten wird von neuem auf den Meridian eingestellt, nach beiden Seiten auf 45° abgelenkt und jedesmal die Stellung des Schlittens abgelesen.

Die Messungen nach beiden Seiten sind ganz selbständig, man erhält also zwei voneinander unabhängige Werte, die einem zeitlichen Unterschied von ungefähr 1 Min. entsprechen.

Um etwaige Fehler aus einem toten Gang der Schraube zu vermeiden, wurde bei nachstehenden Beobachtungen stets in derselben Richtung eingestellt. Die Beleuchtung des Okulars erfolgte durch ein Auerlicht, das in 1,5 m Entfernung vom Apparat aufgestellt war, und dessen Strahlung von den übrigen Teilen des Apparates abgeschirmt war. Die Temperatur wurde auf 0,1° genau beobachtet.

Um die Deklinationsschwankungen zu verfolgen, wird in einigem Abstand ein Fernrohr mit Skala aufgestellt.

Zeit	Vernon Variometer				Viennahvariometer				Libellen			Temp.
	Ablen.	Variat.	Mittel	Wert	Ablen.	Diff.	Variat.	Wert	Ablen.	Variat.	Wert	
2	217,1 284,0	0 0	0	0	176,9 139,3	47,1	0	0	[illegible]	0	0	13,3
2[15]	214,5 284,0	2,6 0	1,3	0,0000949	176,8 139,3	47,0	0,05	0,0000000	[illegible]	0,0	0	13,3
2[30]	208,0 191,0	9,1 13,0	11,0	0,0000418	176,1 130,7	45,4	0,85	0,0000154	[illegible]	1,0	1' 00"	13,0
2[45]	189,0 171,1	28,1 32,9	30,5	0,0001159	175,0 131,9	43,1	2,0	0,0000187	[illegible]	0,0	1' 1"	13,1
3	175,9 160,9	41,2 43,1	42,1	0,0001600	174,2 131,6	42,6	2,85	0,0000148	[illegible]	0,7	0' 0"	13,1
3[15]	160,8 151,1	56,3 52,9	54,6	0,0002075	173,7 132,0	41,7	2,7	0,0000179	[illegible]	0,0	0' 0"	13,0
3[30]	153,0 136,0	64,1 68,0	66,0	0,0002508	172,9 133,3	39,6	2,75	0,0000208	[illegible]	0,0	1' 4"	13,0
3[45]	149,7 138,2	67,4 70,8	69,1	0,0002626	172,9 133,8	39,6	2,75	0,0000208	[illegible]	1,1	1' 00"	13,0
4	148,1 134,5	69,0 69,5	69,2	0,0002630	172,8 130,9	41,9	2,6	0,0000185	[illegible]	1,0	0' 7"	13,0
4[15]	150,6 141,0	66,5 68,0	64,7	0,0002459	172,6 133,0	39,6	2,75	0,0000208	[illegible]	0,0	0' 00"	13,0

4^{45}	145,0	72,1	72,9	0,0002770	172,5	37,8	4,65	0,000295	506,4	2,6	3′ 27″	16,5
	130,3	73,7			184,7							
5	135,4	81,7	81,8	0,0003108	172,9	36,7	5,2	0,000330	506,1	2,2	2′ 55″	16,5
	122,1	81,9			186,2							
5^{15}	128,4	88,7	90,2	0,0003428	172,8	35,8	5,9	0,000375	506,0	2,1	2′ 47″	16,5
	113,2	91,8			187,0							
5^{30}	112,9	104,2	104,6	0,0003975	171,0	36,6	5,25	0,000383	505,8	1,9	2′ 31″	16,6
	98,9	105,1			184,4							
5^{45}	108,9	118,2	115,2	0,0004378	170,4	38,2	6,95	0,000441	505,9	2,0	2′ 39″	16,6
	86,7	117,3			187,2							
6	99,0	118,1	122,7	0,0004663	168,6	30,9	8,1	0,000514	506,9	3,0	3′ 59″	16,7
	76,7	127,3			187,7							
6^{15}	99,1	118,0	120,7	0,0004587	169,3	33,3	7,4	0,000470	506,7	2,8	3′ 43″	16,6
	80,5	123,5			187,0							
6^{30}	102,9	114,2	113,8	0,0004324	169,9	33,6	6,75	0,000429	504,9	1,0	1′ 20″	16,7
	90,6	113,4			186,3							
6^{45}	148,6	68,5	66,7	0,0002535	172,6	37,9	4,6	0,000292	506,7	2,8	3′ 43″	16,7
	139,1	64,9			184,7							
7	181,0	36,1	30,3	0,0001151	174,8	43,7	1,7	0,000108	509,1	5,2	6′ 54″	16,7
	179,4	24,6			181,1							
7^{15}	153,7	63,4	66,7	0,0002535	171,3	36,5	5,3	0,000337	512,6	8,7	11′ 38″	16,7
	134,0	70,0			184,8							

Zeit	Neues Variometer				Vierstabvariometer				Deklination			Temp.
	Ables.	Variat.	Mittel	Wert	Ables.	Diff.	Variat.	Wert	Ables.	Variat.	Wert	
7^{30}	163,0 147,1	54,1 56,9	55,5	0,0002109	171,0 132,3	38,7	4,2	0,000267	512,6	8,7	11′ 33″	16,7
7^{45}	145,0 138,2	72,1 65,8	68,9	0,0002618	170,7 132,9	37,8	4,65	0,000295	509,1	5,2	6′ 54″	16,7
8	154,3 141,5	62,8 62,5	62,6	0,0002379	171,8 133,1	38,7	4,2	0,000267	506,6	2,7	3′ 35″	16,8
8^{15}	155,4 141,0	61,7 63,0	62,3	0,0002367	171,0 132,5	38,5	4,3	0,000273	506,2	2,3	3′ 3″	16,8
8^{30}	141,0 134,1	76,1 69,9	73,0	0,0002774	172,2 135,0	37,2	4,95	0,000314	504,4	0,5	40″	16,8
8^{45}	135,5 121,9	81,6 82,1	81,8	0,0003108	171,7 135,1	36,6	5,25	0,000333	505,9	2,0	2′ 39″	16,8
9^{30}	—	—	—	—	—	—	—	—	510,0	0	0	—
9^{45}	—	—	—	—	—	—	—	—	509,7	−0,3	− 24″	—
10	—	—	—	—	—	—	—	—	508,6	−1,4	− 1′ 52″	—
10^{15}	103,2 86,5	0 0	0	0	169,3 134,9	34,4	0	0	509,3	−0,7	− 56″	16,2
10^{30}	88,4 72,1	19,8 14,4	17,1	0,0000650	167,8 135,0	32,8	1,05	0,000067	509,0	−1,0	− 1′ 20″	16,3

10^{45}	108,6	− 5,4	− 10,9	− 0,0000414	168,4	35,4	− 0,5	− 0,000032	510,7	+0,7	+ 56″	16,4
	103,0	− 16,5			133,0							
11	119,9	− 16,7	− 16,3	− 0,0000619	169,9	36,5	− 1,05	− 0,000067	511,8	1,8	2′ 23″	16,3
	102,5	− 16,0			133,4							
11^{15}	95,4	7,8	8,1	0,0000308	168,6	34,6	− 0,1	− 0,000006	511,9	1,9	2′ 31″	16,4
	78,0	8,5			134,0							
11^{30}	64,7	38,5	35,9	0,0001364	167,2	36,3	− 0,95	− 0,000060	513,6	3,6	4′ 47″	16,5
	53,2	33,3			130,9							
11^{45}	105,1	− 1,9	− 7,6	− 0,0000289	168,9	35,0	− 0,3	− 0,000019	515,2	5,2	6′ 54″	16,3
	99,8	− 13,8			135,9							
12	144,9	− 41,7	− 47,3	− 0,0001797	170,9	39,5	− 2,55	− 0,000162	514,7	4,7	6′ 14″	16,4
	139,5	− 53,0			131,4							
12^{15}	157,0	− 53,8	− 58,6	− 0,0002227	173,1	42,2	− 3,9	− 0,000248	514,9	4,9	6′ 30″	16,4
	149,9	− 63,4			130,9							
12^{30}	137,3	− 34,1	− 34,3	− 0,0001303	171,7	37,5	− 1,55	− 0,000098	515,2	5,2	6′ 54″	16,3
	121,0	− 34,5			134,2							
12^{45}	96,2	7,0	5,4	0,0000205	169,2	33,1	0,65	0,000041	514,2	4,2	5′ 34″	16,5
	82,6	3,9			136,1							
1	78,1	25,1	22,3	0,0000847	168,4	32,9	0,75	0,000048	516,4	6,4	8′ 29″	16,4
	66,9	19,6			135,5							
1^{15}	96,1	7,1	6,8	0,0000258	170,5	36,3	− 0,95	− 0,000060	516,6	6,6	8′ 45″	16,5
	80,0	6 5			134,2							
1^{30}	87,0	16,2	20,9	0,0000794	166,7	35,4	− 0,5	− 0,000032	513,5	3,5	4′ 39″	16,5
	60,9	25,6			131,3							

1. Zeitliche Variationen von Intensität und Deklination.

Folgende Messungen wurden im Erdgeschoß des physikalischen Instituts zu Tübingen am 10. II. 07 von 2^h mittags bis $8^h\,45^m$ abends und am 7. II. 07 von $9^h\,30^m$ bis $1^h\,30^m$ nachts ausgeführt. Zur Kontrolle wurden in einiger Entfernung gleichzeitige Beobachtungen mit Kohlrauschs Vierstabvariometer gemacht. Da beide Messungen von einem Beobachter ausgeführt wurden, sind die Ablesungen am Vierstabvariometer etwa 2 Min. nach den anderen erfolgt; es erklären sich daraus die an einigen Stellen auftretenden größeren Abweichungen beider Messungen (vgl. Fig. 3).

Als Konstanten haben wir:

$A = 129{,}6$ cm Skalenabstand des Deklinationsfernrohres,

$$E = \frac{1}{2\mathfrak{A}} \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{510} \cdot \operatorname{tg} 10{,}2^\circ$$

$$= 0{,}0003528 \,.\, H,$$

mit $H = 0{,}18$ $= 0{,}00006350$ abs. Einh. Skalenwert des Vierstabvariometers.

Für das neue Variometer kann der Skalenwert für den Bereich der Messung als konstant angesehen werden und zwar für den Abstand:

$15{,}76 - 1{,}95 = 13{,}81$ cm Skalenwert $= 0{,}00000380$ abs. Einh.

2. Lokalvariation.

Diese Messung wurde ausgeführt in dem eben benutzten Lokal und in dem ein Stockwerk höher gelegenen Maschinensaal. Um einen Mittelwert zu erhalten, wurden an beiden Orten je vier Beobachtungen gemacht. Während der Messungen wurden gleichzeitig die zeitlichen Variationen mit dem Vierstabvariometer beobachtet, um diese im Resultat berücksichtigen zu können.

Um diese Lokalvariation mit dem Vierstabvariometer messen zu können, erwies es sich als notwendig, das Hilfsfeld desselben bedeutend zu verstärken. Man erhielt dann als Skalenwert:

$$E = \frac{1}{2\mathfrak{A}} \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{510} \cdot \operatorname{tg} 23{,}8^\circ$$

$$= 0{,}0008444 \,.\, H$$

$$= 0{,}0001520 \text{ abs. Einh.}$$

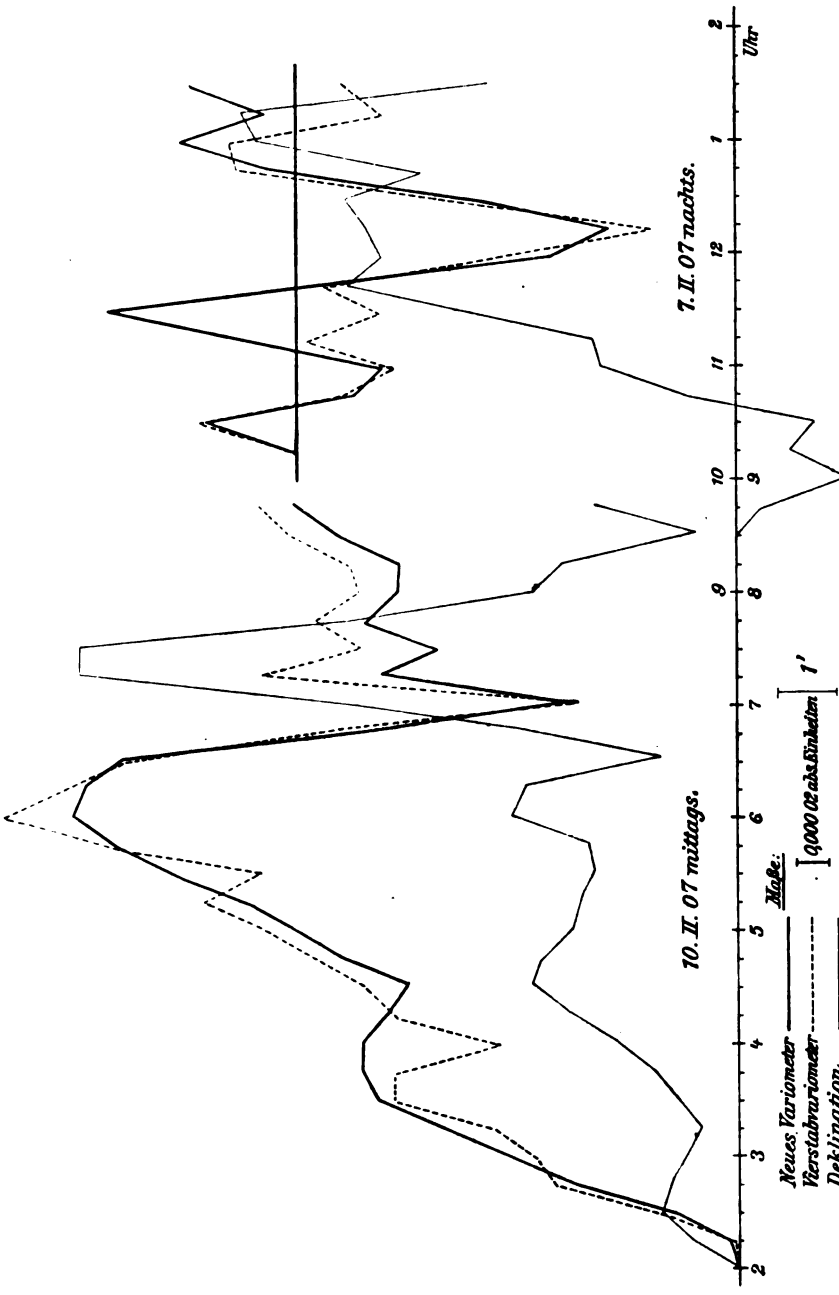


Fig. 8. Zeitliche Variationen von Intensität und Deklination.

Die Messung gestaltet sich folgendermaßen:

Neues Variometer.					Vierstabvariometer.				
Zeit	Ables.	Mittel	Stand	Temp.	Zeit	Ables.	Diff.	Stand	Temp.
		Erdgeschoß:					Erdgeschoß:		
6^{55}	148,1 147,3	147,7		17,1	6^{58}	226,1 32,1	194,0		17,1
7	147,3 138,5	142,9	Mittel: 132,7	17,1	7^{3}	226,5 33,1	193,4	Mittel: 192,8	17,1
7^{5}	133,3 116,3	124,8	Seitl. Skale: 16,8673 mm	17,1	7^{8}	225,7 33,4	192,3		17,1
7^{10}	116,3 114,5	115,4		17,2	7^{13}	225,4 34,0	191,4		17,2
		Maschinensaal:					Erdgeschoß:		
7^{55}	248,7 19,1	258,9		17,1	8	225,6 33,6	192,0		17,1
8^{5}	238,7 14,1	251,4	Mittel: 254,1	17,3	8^{10}	224,9 33,6	191,3	Mittel: 191,6	17,1
8^{15}	244,9 17,2	256,0	Seitl. Skale: 21,9959 mm	17,2	8^{20}	225,1 33,9	191,2		17,2
8^{25}	233,4 16,4	249,9		17,1	8^{30}	225,8 33,9	191,9		17,1
Lokale Variation = 5128,6 Skt.					Zeitliche Variation = 0,6 Skt.				
Für das neue Variometer haben wir als mittleren Skalenwert: im Abstand 13,82 cm Skw. = 0,000 003 79									
Wert der lokalen Variation: + 0,019 437					Wert der zeitlichen Variation: + 0,000 091				

Wahre Lokalvariation = 0,019 437 − 0,000 091
= 0,019 346 abs. Einh.

Bestimmung des Temperatureinflusses.

1. *Auf die Messungen.* Um diesen zu bestimmen, wurde anschließend an vorstehende Lokalvariation das neue Variometer auf tiefere Temperatur gebracht, während das Vierstabvariometer auf derselben Temperatur erhalten wurde. Es ergab sich:

Neues Variometer.					Vierstabvariometer.				
Zeit	Ables.	Mittel	Stand	Temp.	Zeit	Ables	Diff.	Stand	Temp.
11^{20}	160,1 179,9	170,0		9,7	11^{25}	224,6 36,4	188,2		17,2
11^{30}	148,0 167,8	157,9	Mittel: 156,0	9,6	11^{35}	223,6 36,6	187,0	Mittel: 187,3	17,1
11^{40}	141,0 154,6	147,8	Seitl. Skale: 21,8440 mm	9,6	11^{45}	223,6 37,4	186,2		17,1
11^{50}	139,0 157,6	148,3		9,4	11^{55}	214,9 37,2	187,7		17,1
Variation: 21995,9 − 21844,0 = 151,9 Skt. Skalenwert im Abstand 13,57 cm: 0,00000406 Wert der Variation: − 0,0006167					Variation: $\frac{191,6 - 187,3}{2}$ = 2,15 Skt. Skalenwert: 0,0001520 Wert der Variation: + 0,0003266				

Wir können nun für den Temperatureinfluß folgende Formel aufstellen, wo dH die wahre Größe der Variation darstellt:

$$dH = dH_t^{t'} + \mu(t - t'),$$

und wir erhalten für den Temperaturkoeffizienten:

$$0{,}0003266 = -0{,}0006167 + \mu(17{,}2 - 9{,}6),$$

$$\underline{\mu = 0{,}000124.}$$

Anmerkung. Am vorteilhaftesten wird es immer sein, Temperaturschwankungen möglichst zu vermeiden. Bei kürzeren Messungen kann dies erreicht werden durch Umhüllung der Magnete mit Watte oder Filz[1]), bei solchen von längerer Dauer durch Temperierung mit fließendem Wasser[2]), die an unserem Apparat leicht eingerichtet werden kann.

2. *Auf den Skalenwert.* Es handelt sich darum, ob bei einem bestimmten Abstand des Komp.-Magnetes vom Magneto-

1) F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys. 9. Aufl. p. 334. Leipzig 1901.

2) M. Th. Edelmann, Neuere Apparate f. N. Schw. u. F. p. 105. Stuttgart 1882.

meter der Skalenwert bei jeder beliebigen konstanten Temperatur derselbe ist. Der Skalenwert wurde berechnet als:

$$E = M\left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2}\right),$$

er wird sich also wesentlich proportional mit M ändern. Da der Temperaturkoeffizient eines Magnetes maximal 0,001 beträgt[1]), so wird der Temperatureinfluß auf den Skalenwert in normalen Grenzen zu vernachlässigen sein.

In Übereinstimmung damit ergab die Messung als Skalenwerte:

bei 23°	0,00000381
bei 15,9° . . .	0,00000379

Der Unterschied liegt also innerhalb der Beobachtungsfehler.

Allgemeines.

Die Grundlage zu dieser Arbeit bildet der von Herger[2]) schon 1844 ausgesprochene Gedanke eines Intensitätsmagnetometers unter Benützung der Verhältnisse in unmittelbarer Nähe des Indifferenzpunktes eines Magnetes (d. h. des Punktes, in welchem Magnetfeld und Erdfeld sich kompensieren). Die starken Richtungsänderungen der Kraftlinien um diesen Punkt sollten durch eine kleine Nadel beobachtet werden und als Maß dienen für die Verschiebungen des Punktes infolge der Änderungen der Intensität des Erdfeldes.

Große Schwierigkeit machte Herger die Trennung der beiden Einflüsse von Deklinations- und Intensitätsschwankungen, und er hielt schließlich nur eine Lösung für möglich. Er schlug vor, das ganze System des Magnetes und der fest mit diesem verbundenen Nadel an einem Faden aufzuhängen. Ein aus Aluminium provisorisch hergestelltes Modell zeigte die praktische Untauglichkeit dieser Anordnung infolge zu geringer Stabilität, was auch der Grund dafür sein mag, daß Hergers Anregung ungenützt blieb.

Hrn. Professor Dr. Paschen, dem Vorstand des physikalischen Instituts Tübingen, gelang es nun eine andere Lösung dieser Aufgabe zu finden, deren Auswertung diese Arbeit darstellt.

---

1) F. Kohlrausch, l. c. p. 336.

2) J. E. Herger, Die Systeme der magnetischen Kurven, Kap. VI. Leipzig 1844.

Dadurch, daß die Magnetnadel nicht, wie bei Herger, seitwärts von der Äquatorialebene des Magnets gesetzt wird, sondern in diese hinein mit der Richtung senkreckt zu ihr, wird erreicht, daß die Nadel zunächst von Intensitätsänderungen in ihrer Richtung nicht beeinflußt wird und nur Deklinationsänderungen angibt. Nachdem der ganze Apparat durch mikrometrische Drehung diesen gefolgt ist, können die Intensitätsänderungen des Erdfeldes dadurch zur Geltung gebracht werden, daß ein zum Erdfeld senkrechtes Feld von bestimmter Größe eingeschaltet wird.

Das Deklinationsinstrument stellt also ein kompensiertes Variometer dar, wie es Barlow[1]) im Prinzip anwandte. Vor den sonst gebräuchlichen nicht kompensierten Variometern (Gauss, Gambey, Lamont) hat es den Vorzug einer wesentlich gesteigerten Empfindlichkeit, einer nahezu vollkommenen Dämpfung, eines kleinen Lokaleinflusses und der vollständigen Unabhängigkeit von der Torsion des Aufhängungsfadens. Die Genauigkeit der Ablesung dürfte etwa 8″ betragen.

Transportable und selbständige Apparate zur Messung der Intensitätsänderungen sind die Variometer von Kohlrausch[2]) und das von Heydweiller[3]), von denen das Kohlrauschsche Vierstabvariometer[4]) für die meisten Fälle das geeignetste und leistungsfähigste sein dürfte. Das neue Variometer beruht auf demselben Prinzip wie dieses (Kompensierungs- und Ablenkungsmagnet) und leistete bei dem anfangs angewandten Ablenkungswinkel von wenigen Graden etwa dasselbe.

Die Einführung eines konstanten Ablenkungswinkels erspart die Skalenablesung und die Messung des Skalenabstandes, und vereinfacht dadurch die Messungen. Einen konstanten Ablenkungswinkel gebrauchte auch Edelmann[5]) bei seinem Magnetometer. Er benützte als Maß die Verschiebungen des Ablenkungsmagnetes, hatte aber keine Kompensation und einen Ablenkungswinkel von wenigen Graden.

---

1) E. Mascart, Traité de Magnétisme Terrestre, p. 189. Paris 1900.
2) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 15. p. 540. 1882.
3) A. Heydweiller, Wied. Ann. 64. p. 735. 1898.
4) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 19. p. 138. 1883.
5) M. Th. Edelmann, Neuere Apparate f. N. Sch. u. F. p. 8. Stuttgart 1882.

Es erweist sich jedoch als ganz besonders vorteilhaft, einen Ablenkungswinkel von 45° einzuführen, wie nachstehende Rechnung zeigt.

Bezeichnen wir mit:

F das kompensierte Feld,
H' das Ablenkungsfeld,
dH die Intensitätsänderung,
α_1, α_2 die Ablenkungswinkel,

so haben wir:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{H'}{F}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{H'}{F+dH},$$

$$d\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\frac{H'}{F} - \frac{H'}{F+dH}}{1 + \frac{H'}{F}\cdot\frac{H'}{F+dH}} = \frac{H'.dH}{F(F+dH)+H'^2}$$

$$= \frac{\frac{dH}{H'}}{\frac{F(F+dH)}{H'^2}+1}.$$

Setzt man als Annäherung:

$$F(F+dH) = F^2,$$

so erhält man:

$$d\alpha = \frac{dH}{F\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{ctg}^2\alpha+1)} = \frac{dH}{2F}\sin 2\alpha.$$

$d\alpha$ ist also ein Maximum für $\alpha = 45°$ und zwar gibt:

$\alpha = 1°$ . . . . . $d\alpha = 0{,}0349 \,.\, k\,dH$
$\alpha = 45°$ . . . . . $d\alpha = 1 \,.\, k\,dH$
$\alpha = 89°$ . . . . . $d\alpha = 0{,}0349 \,.\, k\,dH$

d. h. $d\alpha$ ist bei 45° etwa 30mal so groß als bei 1° oder 89° Ablenkung. Neben dieser vermehrten Empfindlichkeit wird durch das Gausssche Okular mit Doppelfaden auch eine erhöhte Genauigkeit der Einstellung erzielt.

Ein weiterer Vorzug des neuen Magnetometers ist der Umstand, daß die Kompensierung während einer Messung konstant bleibt; es kann dadurch außerordentlich stark kompensiert und damit sehr empfindlich gemacht werden. Beim Vierstabvariometer muß dagegen ein ziemlich großer Spielraum gelassen werden, damit das Kompensierungsfeld nicht während der Messung zu schwach wird. (Vgl. die Lokalvariation.)

Sodann setzt sich beim Vierstabvariometer die Messung aus zwei Beobachtungen zusammen; beim neuen Variometer kann dagegen mit einer Ablesung gemessen werden, bzw. es

wird bei einer Doppelmessung der Fehler wesentlich kleiner werden.

In vielen Fällen wird es auch von Vorteil sein, daß die Resultate in absolutem Maß gegeben sind. Für genauere Messungen muß sonst H bestimmt werden, denn die ausgeführte Lokalvariation zeigt, daß in Gebäuden die Horizontalintensität leicht um 10 Proz. verschieden sein kann und daher kein Näherungswert genommen werden darf.

Die für das Vierstabvariometer angegebene Genauigkeit von $^1/_{10\,000}\,H$ dürfte nicht immer erreicht werden, denn mögen die Fehler der Aufstellung etwa $^5/_{100\,000}\,H$ ausmachen, so wird bei einem Skalenwert von 0,00084 H noch dazu mit einem Ablesungsfehler von mehr als $^5/_{100\,000}\,H$ gerechnet werden müssen.

Die Genauigkeit des neuen Variometers wurde bestimmt, indem eine durch die Hilfsspule hervorgebrachte konstante Feldänderung wiederholt gemessen wurde.

Man erhielt:

Ables.	Verschiebung	Fehler	Quadr.
44,4 48,8	495,6	−0,7	0,49
42,6 44,8	497,8	+1,5	2,25
42,5 45,6	496,9	+0,6	0,36
37,8 42,6	495,2	−1,1	1,21
35,6 40,4	495,2	−1,1	1,21
28,2 30,9	497,3	+1,0	1,00
45,9 50,7	495,2	−1,1	1,21
51,9 56,0	495,9	−0,4	0,16
54,0 58,0	496,0	−0,3	0,09
52,0 54,0	498,0	+1,7	2,89
Mittel: 496,3 ± 1,7		Summe:	10,87

Mittlerer Fehler einer Ablesung:	Mittlerer Fehler aus zwei Ablesungen:
$= \pm \sqrt{\frac{10{,}87}{9}}$	$= \pm \sqrt{\frac{10{,}87}{2 \cdot 9}}$
$= \pm$ 1,01 Skt.	$= \pm$ 0,71 Skt.
$= \pm$ 0,0000089	$= \pm$ 0,0000028

Größte Abweichung vom Mittel:
= 1,7 Skt.
= 0,0000066.

Das neue Variometer leistet also für Intensitätsmessungen zwei- bis dreimal soviel als das Vierstabvariometer, insbesondere da vorstehende Bestimmung der Genauigkeit noch gestört ist durch die zeitlichen Änderungen während der Dauer zweier Ablesungen. Die Leistungen des Apparates dürften somit sowohl als Deklinationsvariometer wie als Intensitätsvariometer weitgehende Ansprüche befriedigen.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. Paschen, meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen für das mir stets erwiesene Wohlwollen und die freundliche Unterstützung bei der Ausführung dieser Arbeit. Auch Hrn. Privatdozent Dr. Gans fühle ich mich zu großem Dank verpflichtet für das fördernde Interesse, das er meiner Arbeit stets entgegengebracht hat.

(Eingegangen 11. Januar 1908.)

10. *Zur Theorie des Adhäsionsplattenversuches; von Theodor Lohnstein.*

Zu denjenigen Phänomenen auf dem Gebiete der Kapillarität, die am längsten bekannt und demgemäß auch vielfach experimentell und theoretisch behandelt worden sind, gehört die Erscheinung der Adhäsionsplatten (bzw. Adhäsionsringe). Man sollte daher glauben, daß das Problem längst in einwandfreier Weise erledigt sei. Das ist aber keineswegs der Fall, wie die vor mehreren Jahren veröffentlichte Arbeit des Hrn. W. Gallenkamp[1]) beweist. In dieser Arbeit wird auf der Basis einer fehlerhaften Theorie eine irrige Schlußfolgerung bezüglich des sogenannten *Randwinkels* gezogen, gegen die bisher nur Hr. G. Quincke[2]), leider auf unzutreffende Argumente gestützt[3]), Einspruch erhoben hat. Um daher künftigen falschen Darstellungen des Gegenstandes einen Riegel vorzuschieben[4]), möchten wir im folgenden das Problem einer nochmaligen Betrachtung unterziehen. Wir wollen uns dabei auf den der Analysis allein leichter zugänglichen Fall der kreisförmigen Platten beschränken und diese der Einfachheit halber obenein als scharfkantig voraussetzen.

Die älteste mathematische Behandlung des Themas rührt, soweit uns bekannt, von Poisson[5]) her. Um den konstanten Benetzungswinkel, unter dem der Theorie nach eine freie Flüssigkeitsoberfläche an die glatte Oberfläche eines festen Körpers herantritt, in die Entwickelung einführen zu können, faßt Poisson die scharfe Kante als Grenze einer gekrümmten Oberfläche auf, welche den Übergang zwischen der Grundfläche

1) W. Gallenkamp, Ann. d. Phys. **9**. p. 475. 1902.

2) G. Quincke, Ann. d. Phys. **10**. p. 453. 1903.

3) Vgl. die Fußnote am Schluß dieser Arbeit.

4) Daß dies nötig ist, geht aus dem soeben erschienenen dritten Bande der neuen Auflage von Müller-Pfaundlers Handbuch der Experimentalphysik hervor, in dem der Bearbeiter des einschlägigen Kapitels, Hr. Dr. K. Drucker, die Schlußfolgerung Gallenkamps bereits als tatsächliches Ergebnis vorträgt (p. 299).

5) G. Poisson, Nouvelle Théorie de l'Action capillaire, Paris 1831. p. 226 sq.

und der zylindrischen Seitenfläche der Adhäsionsplatte bildet. Für das Gewicht, das nötig ist, um die Adhäsionsplatte um die Höhe k über das allgemeine Niveau der Flüssigkeit zu heben, leitet er ganz richtig folgenden Ausdruck ab:

(1) $$p = \pi m k r^2 - \pi m r a^2 \cos(i + \omega).$$

Darin ist r der Halbmesser der Adhäsionsplatte, m das Gewicht eines Kubikzentimeters der Flüssigkeit, a die aus der Theorie der Kapillarität bekannte Konstante, ω das Supplement des Benetzungswinkels, i der Winkel, den die nach dem Innern der Platte auf der genannten Übergangsfläche in einem Punkte der Berührungslinie errichtete Normale mit dem zugehörigen Halbmesser der Platte einschließt. Natürlich stellt der vorstehende Ausdruck gleichzeitig auch das Gewicht der über das Niveau gehobenen Flüssigkeitsmenge dar.

Für die experimentelle Praxis interessiert nun in erster Linie die Frage: Welches Gewicht muß man auflegen, um die Platte zum Abreißen zu bringen? Die Anwort auf diese Frage ist ganz analog der Lösung des Abtropfproblems. So lange beim langsamen Austritt einer Flüssigkeit aus einer Öffnung sich eine den Gesetzen der Kapillarität entsprechende, die Flüssigkeit nach unten begrenzende Gleichgewichtsoberfläche bilden kann, so lange fällt kein Tropfen ab; erst wenn dies nicht mehr möglich ist oder, mathematisch gesprochen, das ausgetretene Volumen ein Maximum erreicht hat, reißt sich ein Teil der Flüssigkeit als Tropfen ab. Genau entsprechend verhält es sich im Falle der Adhäsionsplatten. So lange es der Adhäsionsplatte möglich ist, ein Flüssigkeitsvolumen in die Höhe zu heben, dessen der Luft zugewandte freie Oberfläche der bekannten Differentialgleichung genügt, so lange folgt die Flüssigkeit dem Zuge der Adhäsionsplatte; erst wenn das gehobene Flüssigkeitsvolumen ein Maximum erreicht hat, reißt die Platte ab. Die physikalische Erscheinung hat also in beiden Fällen ihr Korrelat in einem analytischen Faktum, ein Sachverhalt, der durch die landläufigen Darstellungen beider Probleme mehr oder weniger verschleiert worden ist.

Der Hauptsache nach ist dieser Umstand wohl auf die Art und Weise zurückzuführen, in der Poisson aus der Gleichung (1) das Problem weiter entwickelt, und die darauf beruht, daß es für das in der Formel vorkommende k keinen

Ausdruck gibt, der diese Größe für alle Werte von r und $i+\omega$ in einer für die physikalische Praxis brauchbaren Weise darstellt. Wenn man endliche Ausdrücke verlangt, so muß man sich daher notgedrungen auf die Grenzfälle beschränken, d. h. die Fälle, in denen r entweder sehr klein oder sehr groß ist. Diese Fälle behandelt nun Poisson in der Tat. Für kleine r findet er so:

$$k = r\left(\log \frac{2a\sqrt{2}}{r(1+\sin\varphi)} - c\right), \tag{2}$$

worin $i+\omega=\varphi$ gesetzt und $c=0{,}57721$, d. h. die Eulersche Konstante ist. Aus der Herleitung dieser Formel folgt, daß sie erst für viel kleinere Werte von r/a gilt, als für die experimentelle Praxis in Betracht kommen; es ist daher kein Wunder, daß die von Poisson zu ihrer Prüfung herangezogenen Versuchszahlen Gay-Lussacs ziemlich starke Abweichungen ergeben. Immerhin aber gibt Poissons Ausdruck für hinlänglich kleine r den analytischen Charakter der Funktion k ausreichend wieder.

Poisson legt sich des weiteren nun richtig die Frage nach dem Maximum des Ausdruckes (1) vor; um sich ihre Beantwortung zu erleichtern, bemerkt er, daß für kleine r das erste Glied der Formel gegenüber dem zweiten vernachlässigt werden kann, und daß daher das Maximum von p mit dem Maximum des Ausdruckes $-\pi m r a^2 \cos(i+\omega)$ zusammenfällt, d. h. für $i+\omega=\pi$ eintritt. Das ist aus dem Grunde fehlerhaft, weil ja auch der vernachlässigte Teil von $i+\omega$ abhängt. Wir wollen, um uns an die Bezeichnungsweise der neueren Autoren anzuschließen, $i+\omega=\pi/2+\vartheta$ setzen, weiter im folgenden anstatt m σ, anstatt k y, anstatt p G schreiben und außerdem in üblicher Weise neben a von der Kapillaritätskonstante $\alpha=\frac{1}{2}a^2\sigma$ Gebrauch machen; ϑ ist dann der Winkel, unter dem die Elemente der Flüssigkeitsoberfläche am Plattenrand gegen den Horizont geneigt sind, und der Ausdruck für das Gewicht erhält folgende Gestalt

$$G = 2r\pi\alpha\sin\vartheta + r^2\pi y\sigma. \tag{3}$$

Das Maximum dieses Ausdruckes bei konstantem r wird bestimmt durch die Gleichung:

$$0 = 2\alpha\cos\vartheta + \sigma r\frac{\partial y}{\partial\vartheta}. \tag{4}$$

Für sehr kleine r ist nach (2)

$$y = r\left(\log \frac{2a\sqrt{2}}{r(1+\cos\vartheta)} - c\right);$$

die Ableitung dieses Ausdruckes nach ϑ ist für das ganze Wertgebiet der ϑ von 0 bis π positiv, woraus sich ergibt, daß die in Betracht kommende Wurzel der Gleichung (4) etwas größer als $\pi/2$ ist. Ihre Abweichung von $\pi/2$ ist von der Ordnung r^2; für die kleinen Werte von r, für die Gleichung (2) überhaupt nur gilt, kann daher zur Berechnung des Abreißgewichtes ohne merklichen Fehler $\vartheta = \pi/2$ gesetzt werden, und G ist bis auf Größen, die in bezug auf r von der Ordnung $r^3 \log r \sin\vartheta$, gleich $2r\pi\alpha$, sein Wert wird also wesentlich durch den ersten Summanden bestimmt.

Gerade umgekehrt verhält es sich für große r. Da y für diese und die in Betracht kommenden Werte von ϑ von endlicher Größe ist, so überwiegt hier der zweite Teil des Ausdruckes für G. Poisson vernachlässigt daher ohne weiteres in diesem Falle $2r\pi\alpha\sin\vartheta$ gegenüber $r^2\pi y\sigma$ und folgert dann weiter, daß das Maximum von G mit dem Maximum von y zusammenfällt. Durch dieses unkorrekte Verfahren werden zwar bezüglich des Wertes von G keine erheblichen Fehler verursacht, wohl aber hinsichtlich des zugehörigen Wertes von ϑ. Wir müssen auf diesen Punkt mit Rücksicht auf das Folgende genauer eingehen.

Die Differentialgleichung, welche in dem hier betrachteten Falle die Gestalt der freien Flüssigkeitsoberfläche bestimmt, lautet bekanntlich:

$$\frac{a^2}{2}\left(\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} + \frac{y'}{x(1+y'^2)^{1/2}}\right) = y,$$

in der y die vertikale Ordinate und x die Entfernung eines Flächenpunktes von der Rotationsachse bedeutet. Wird nun, was für die Versuchspraxis ja unerläßlich ist, das Gefäß, in dem die Flüssigkeit sich befindet, als so weit vorausgesetzt, daß ihre Oberfläche horizontale Teile enthält, so lautet die analytische Aufgabe, durch die y als Funktion von ϑ und r definiert wird, folgendermaßen: Es sei für $x = r$ $y' = -\operatorname{tg}\vartheta$; welchen Wert muß man y für $x = r$ beilegen, damit die Funktion, auf der Achse der reellen x auf Grund der vorstehenden

Differentialgleichung fortgesetzt, erst im Unendlichen verschwinde? Poisson gibt für diese Aufgabe, die er allerdings nicht gerade ebenso formuliert, folgende Lösung:

$$y^2 = 2a^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} - \frac{2a^2\sqrt{2}}{3r}\left(1 - \cos^3\frac{\vartheta}{2}\right)\left(1 - \frac{a\sqrt{2}\cos\frac{\vartheta}{2}}{2r}\right),$$

wobei

$$\vartheta = i + \omega - \frac{\pi}{2}.$$

Poisson nimmt nun an, daß nach dieser Formel y von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$ stetig wächst und erst bei $\vartheta = \pi$ sein Maximum erreicht, und daß daher, wenn man einen endlichen Benetzungswinkel (in Poissons Bezeichnung $\pi - \omega$) annimmt, y den größten Wert, dessen es *physikalisch* fähig ist, bei $\vartheta = \omega$ erreicht; in dem speziellen Falle der vollständigen Benetzung also für $\vartheta = \pi$. In Wirklichkeit ergibt jedoch Poissons Formel, daß y schon bei einem Wert von ϑ den größten Wert hat, der kleiner als π ist, allerdings nur um Größen der zweiten Ordnung in bezug auf a/r von π abweicht, so daß also auch bei vollständiger Benetzung das Maximum von y schon vor $\vartheta = \pi$ fallen würde. Den Fall der Adhäsionsplatten für große r hat auch G. Kirchhoff[1]) behandelt, ohne jedoch auf die Bedingung des Abreißens einzugehen; für y entwickelt er eine Formel, die nur die erste Potenz von a/r berücksichtigt und soweit mit Poissons Ausdruck übereinstimmt; sie lautet

$$y = a\sqrt{2}\sin\frac{\vartheta}{2} - \frac{a^2}{3r\sin\frac{\vartheta}{2}}\left(1 - \cos^3\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Kirchhoffs Formel hat, wie man sieht, für $\vartheta = \pi$ ein Maximum.

In meiner Dissertation[2]) habe ich selbst die Entwickelung bis zur dritten Potenz von a/r geführt, gleichzeitig jedoch bewiesen, daß man es dabei nur mit dem Anfang einer divergenten Reihe zu tun hat, da es eine konvergente Potenzreihe für y nach Potenzen von a/r nicht gibt. Auch aus unserer Entwickelung folgt, daß y sein Maximum schon vor $\vartheta = \pi$

1) G. Kirchhoff, Mechanik, 2. Aufl. p. 160. 1877.

2) Th. Lohnstein, Inaug.-Diss. Berlin 1891. p. 17; Wied. Ann. **44**, p. 56. 1891.

erreicht. Diese Tatsache läßt sich aber auch ohne spezielle Ausführung der Integration beweisen. Setzt man nämlich $y = f(x, \vartheta)$, so kann man zunächst — in Übereinstimmung mit dem Resultat der physikalischen Beobachtung — aus den angeführten annähernden Formeln so viel entnehmen, daß für das in Frage kommende Intervall der Variabeln ϑ $\partial f/\partial x > 0$ ist. Nennt man nun ϱ den Krümmungshalbmesser der Meridiankurve der Flüssigkeitsoberfläche, so hat man der Differentialgleichung zufolge

$$\sin\vartheta = -\cos\vartheta\,\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial f}{\partial \vartheta}.$$

Für $\vartheta = \pi/2$ ergibt sich hieraus:

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \varrho, \quad \text{d. h.} \quad > 0;$$

für $\vartheta = \pi$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta} = -\varrho\,\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{d. h.} \quad < 0, \quad \text{da} \quad \frac{\partial f}{\partial x} > 0.$$

Zwischen $\vartheta = \pi/2$ und $\vartheta = \pi$ muß somit $\partial f/\partial\vartheta$ mindestens einmal verschwinden, d. h. y erreicht schon vor $\vartheta = \pi$ ein Maximum. Daraus folgt nun weiter, daß auch G zwischen $\vartheta = \pi/2$ und $\vartheta = \pi$ ein Maximum hat. Denn da

$$\frac{\partial G}{\partial \vartheta} = 2r\pi\alpha\cos\vartheta + r^2\pi\sigma\,\frac{\partial y}{\partial \vartheta},$$

so ist für $\vartheta = \pi/2$

$$\frac{\partial G}{\partial \vartheta} = r^2\pi\sigma\left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\right)_{\vartheta=\frac{\pi}{2}}, \quad \text{d. h.} \quad > 0,$$

für $\vartheta = \pi$ dagegen ist

$$\frac{\partial G}{\partial \vartheta} = -2r\pi\alpha + r^2\pi\sigma\left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\right)_{\vartheta=\pi}, \quad \text{d. h.} \quad < 0;$$

zwischen $\pi/2$ und π muß also $\partial G/\partial\vartheta$ mindestens einmal verschwinden. Da $2r\pi\alpha\cos\vartheta$ in diesem ganzen Intervall negativ ist, wird G bereits für einen kleineren Wert der Variabeln das Maximum erreichen als y. Und zwar stehen die zugehörigen Argumentenwerte in dem Verhältnis zueinander, daß, während der zu y gehörige von π um eine Größe der Ordnung $(a/r)^2$ abweicht, der zu G gehörige um eine Größe der Ordnung a/r kleiner als π ist.

Diese ganzen Betrachtungen hätten lediglich theoretisches Interesse, wenn nicht in der erwähnten Arbeit Hr. W. Gallenkamp den Versuch gemacht hätte, die Adhäsionsplatten zu einer — allerdings nur indirekten — Bestimmung des Benetzungswinkels zu verwenden. In seinen theoretischen Anschauungen bewegt sich der Autor dabei ganz auf dem Boden Poissons. Er legt der Berechnung die durch die spezielle Annahme $\vartheta = \pi$ erhaltene Poissonsche Formel für G zugrunde, und da er auf diese Weise für a^2 bei destilliertem Wasser einen Wert erhält, der mit den nach anderen Methoden erhaltenen Zahlen zuverlässiger Autoren befriedigend übereinstimmt, und da andererseits die physikalische Realisierbarkeit des Falles $\vartheta = \pi$ an die vollständige Benetzung der Adhäsionsplatte gebunden ist, so glaubte Hr. Gallenkamp, daß in seinen Versuchen der Benetzungswinkel den Wert Null gehabt hätte. Unsere obigen Darlegungen zeigen, daß diese Schlußweise unberechtigt war; denn selbst wenn der Benetzungswinkel zwischen der Flüssigkeit und der Substanz der Adhäsionsplatte gleich Null ist, muß das Abreißen der Platte schon bei dem Winkel $\vartheta_m = \pi - \varepsilon_m$ erfolgen, für den G zuerst ein Maximum erreicht und der nur von a und r abhängt. Daß aus der falschen Theorie dennoch ein brauchbarer Wert für a resultierte, folgt ungezwungen daraus, daß G selbst sich zwischen $\vartheta = \pi - \varepsilon_m$ und $\vartheta = \pi$, da es sich in der Nähe seines Maximums bewegt, nur um Größen ändert, die in bezug auf ε_m, also auch a/r, von der zweiten Ordnung sind.

Es ist nunmehr am Platze, das Auseinandergesetzte im einzelnen rechnerisch zu belegen. Für y habe ich in meiner Dissertation[1]) folgende Entwickelung gegeben[2]):

$$(5) \qquad y = a\left(\sqrt{2}\sin\frac{\vartheta}{2} + f_1\frac{a}{r} + f_2\left(\frac{a}{r}\right)^2 + f_3\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \cdots\right),$$

in der die $f_\varkappa$ lediglich von ϑ abhängen und durch die Rekursionsgleichung

$$\sum_{l+m=\varkappa} f_l \frac{d f_m}{d\vartheta} = -\frac{1}{2}\frac{d}{d\vartheta}(\sin\vartheta f_{\varkappa-1}) - (\varkappa-2)\frac{1}{2}\cos\vartheta f_{\varkappa-1} \quad (\varkappa \geqq 1)$$

1) Th. Lohnstein, l. c.

2) Abgesehen von der hier etwas vereinfachten Schreibweise.

und die Bedingung, daß sämtliche $f_\varkappa$ für $\vartheta = 0$ verschwinden, bestimmt sind. Die Entwickelung (5) ist zwar, wie erwähnt, divergent, ihre ersten Glieder geben jedoch eine gute Annäherung, wie sich mit den in meiner Dissertation angewandten Methoden dartun läßt. Man erkennt so, daß der Fehler, den man begeht, wenn man die Reihe bei $f_\varkappa$ abbricht, in bezug auf a/r von der $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Ich habe die $f_\varkappa$ bis einschließlich $\varkappa = 3$ berechnet und gefunden:

$$f_1 = -\frac{1}{3}\frac{1-\cos^3\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}, \quad f_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{f_1^2}{\sin\frac{\vartheta}{2}} - \frac{f_1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\vartheta}{2},$$

$$f_3 = -\frac{f_1 f_2}{\sqrt{2}\sin\frac{\vartheta}{2}} - \frac{f_2}{\sqrt{2}}\cos\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{36\sin\frac{\vartheta}{2}}$$
$$\left(1 - 2\cos\frac{\vartheta}{2} + 4\cos^2\frac{\vartheta}{2} - \cos^3\frac{\vartheta}{2} - 2\cos^5\frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{4}\right).$$

Um G als Funktion von r und ϑ darzustellen, hat man die Entwickelung (5) in den Ausdruck (3) einzusetzen. Es ist aber zweckmäßiger, anstatt G den Quotienten G/σ, das Volumen der gehobenen Flüssigkeitsmasse, einzuführen, weil dieses außer von r und ϑ nur von der einen Konstante a abhängt. Man erhält so:

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{G}{\sigma} = V(a, r, \vartheta) = r\pi a^2 \sin\vartheta \\ \qquad + r^2\pi a\left(\sqrt{2}\sin\dfrac{\vartheta}{2} + f_1\dfrac{a}{r} + f_2\left(\dfrac{a}{r}\right)^2 + \ldots\right). \end{cases}$$

In Gallenkamps Versuchen war a/r etwa gleich $^1/_{17}$. Berechnet man mit diesem Werte die Schwankungen, denen $V(a, r, \vartheta)$ unterliegt, wenn man ϑ von 160^0 bis 180^0 variiert, so findet man, daß der größte Wert von V in diesem Bezirk um noch nicht ganz $^1/_2$ Proz. größer ist als der kleinste; die Zahlen, die umgekehrt für die Kapillaritätskonstante aus einem derartigen Versuch resultieren, wobei also V als gegeben anzunehmen ist, fallen daher bei der entsprechenden großen Variation des Randwinkels um höchstens 1 Proz. voneinander verschieden aus, d. h. sie erreichen noch nicht einmal die bekannten experimentellen Schwankungen der Kapillaritäts-

konstante. Hr. Gallenkamp war somit nicht berechtigt, aus seinem Versuchsergebnis einen *bestimmten* Wert des Benetzungswinkels abzuleiten.

Sucht man mit Hilfe der Gleichung (6) denjenigen Wert von ϑ, $\vartheta_m = \pi - \varepsilon_m$, auf, für den V das Maximum erreicht, dessen Existenz oben allgemein nachgewiesen wurde, so ergibt sich bis auf Größen höherer Ordnung:

$$\varepsilon_m = 2\sqrt{2}\,\frac{a}{r} - \frac{1}{3}\left(\frac{a}{r}\right)^2; \tag{7}$$

und als Größe dieses Maximums selbst

$$\left\{\begin{aligned} V_m(a, r, \vartheta_m) &= r^2 \pi a \sqrt{2} \\ &\left(1 - \frac{a}{3\sqrt{2}\,r} + \frac{35}{36}\left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{83}{216\sqrt{2}}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right). \end{aligned}\right. \tag{8}$$

In den ersten beiden Gliedern stimmt, wie man sieht, der Ausdruck (8) mit Poissons Formel überein.

Wir wollen die Gleichungen (7) und (8) nunmehr zur Berechnung der Gallenkampschen Versuche anwenden. Mit einer Kupferplatte von 129,4 mm Durchmesser und destilliertem Wasser findet Gallenkamp bei der mittleren Temperatur von 19° ein mittleres Abreißgewicht von 70,38 g. Nach Anbringung der Korrekturen auf Luftverdrängung berechnet sich daraus nach (7) und (8):

$$a^2 = 14{,}706 \text{ mm}^2,$$

$$\varepsilon_m = 9^\circ\, 32{,}3',$$

also

$$\vartheta_m = 170^\circ\, 27{,}7'.$$

Die für a^2 erhaltene Zahl stimmt, wie man sieht, mit den nach anderen Methoden ermittelten Werten dieser Konstanten ebensogut überein, wie die von Hrn. Gallenkamp durch Benutzung von Poissons Formel berechnete Zahl, aber der zugehörige Randwinkel ϑ weicht fast um 10° von jenem ab, für den Hrn. Gallenkamp seine Versuche zu sprechen schienen.

Ist man denn aber überhaupt berechtigt, so wie wir es eben getan, ohne weiteres aus einem Versuche mit der Adhäsionsplatte auf Grund der Gleichung (8) einen Wert für die Kapillarkonstante abzuleiten? Kann man ferner aus einem solchen Versuch einen Schluß auf den Benetzungswinkel ziehen?

Diese beiden Fragen bedürfen noch einer kurzen Erörterung. Man sieht in der Tat leicht ein, daß uns nach (8) der Adhäsionsplattenversuch zunächst nur eine *untere Grenze* für a liefert. Bezeichnet man nämlich mit V_0 das als Ergebnis des Versuches gefundene Volumen der gehobenen Flüssigkeit, so darf man nach der Definition von $V_m(a, r, \vartheta_m)$ nur ansetzen:

$$V_0 \leqq V_m(a, r, \vartheta_m); \tag{9}$$

ist nun a_0 die in Betracht kommende positive reelle Wurzel der Gleichung $V_0 = V_m$, so folgt aus (9) $a \geqq a_0$.

Um jetzt zu entscheiden, ob eventuell in dieser Ungleichheit das untere Zeichen gilt, hat man nach (7) aus a_0 ε_m zu berechnen. Weiß man über den Benetzungswinkel zwischen der Flüssigkeit und der Plattensubstanz nichts oder nur, daß er $> \varepsilon_m$ ist, so bringt diese Berechnung keine Aufklärung. Weiß man aber aus anderweitigen Beobachtungen, daß der Benetzungswinkel $< \varepsilon_m$ ist, so gilt offenbar in $a \geqq a_0$ das Gleichheitszeichen, und die Methode der Adhäsionsplatte führt daher zu einer *wirklichen Bestimmung von a.* Kennt man ferner zwar nicht den Benetzungswinkel, aber einen annähernden Wert, speziell eine obere Grenze $\bar{a}$ für die Kapillaritätskonstante, so kann man aus dem Plattenversuch neben der unteren Grenze für a^2 eine *obere Grenze für den Benetzungswinkel* ableiten. Setzt man nämlich in (6) für a $\bar{a}$, wobei natürlich vorausgesetzt ist, daß $\bar{a}$ größer ist als a_0, löst die so entstehende Gleichung nach ϑ auf und nennt die zwischen $\pi/2$ und π liegende Wurzel $\bar{\vartheta}$, so ist offenbar $\pi - \bar{\vartheta}$ eine obere Grenze für den Benetzungswinkel. Wenden wir die letzten Überlegungen auf Gallenkamps Versuche an, wobei $\bar{a}$ entsprechend den besseren Beobachtungen gleich 3,9 mm genommen werde, so können wir schließen:

1. $a^2 > 14{,}706$;

2. Benetzungswinkel zwischen Kupfer und Wasser $< 30°$, da man $\bar{\vartheta}$ nahezu gleich $150°$ findet.

Tatsächlich dürfte, wie sich aus unserer Berechnung der an Metallplatten angestellten Tropfversuche Lord Rayleighs[1])

1) Lord Rayleigh, Philosophical Magazine 48. p. 321. 1899.

ergibt, der Benetzungswinkel von Kupfer und Wasser zwischen 6° und 11° liegen, so daß, da $\varepsilon_m = 9° 32{,}3'$ ebenfalls diesem Intervall angehört, im vorliegenden Falle der zunächst nur als untere Grenze von a^2 berechnete Wert als wirkliches Experimentalergebnis für diese Größe aufgefaßt werden kann.

Wir glauben damit in erschöpfender Weise die Unhaltbarkeit der Gallenkampschen Betrachtungsweise dargetan zu haben. Hr. Gallenkamp durfte aus seinen Versuchen nicht schließen, daß der Benetzungswinkel zwischen Kupfer und Wasser gleich Null ist, weil sich ein verschwindender Benetzungswinkel, selbst wenn er vorhanden ist, durch Abhäsionsplattenversuche niemals zur Darstellung bringen läßt, und noch weniger durfte er in kühner Verallgemeinerung aus seinen Versuchen folgern, daß „der Randwinkel *einer* netzenden Flüssigkeit gleich Null zu setzen ist" (l. c. p. 492).[1])

Zur Bestimmung von Benetzungswinkeln braucht man um so weniger auf den Adhäsionsplattenversuch zurückzugreifen, als in den Versuchen an Tropfplatten eine jedenfalls viel bequemere und, wie ich glaube, auch einwandfreie Methode zur Ermittelung dieser Konstanten steckt. Aus der in unserem Aufsatz „Zur Theorie des Abtropfens. Zweiter Nachtrag" gegebenen Formel[2]) folgt, daß schon kleine Werte des Benetzungswinkels auf das Gewicht des von einer ebenen Platte abfallenden Tropfens einen erheblichen Einfluß ausüben, so daß die der Wirklichkeit entsprechenden Tropfen gegenüber dem

1) Hr. G. Quincke hat in seiner Polemik gegen Gallenkamps Folgerung bezüglich des Benetzungswinkels (Ann. d. Phys. 10. p. 453. 1903) den Kern der Sache nicht richtig getroffen, indem er bemerkt, daß das Abreißgewicht vom Benetzungswinkel unabhängig ist, was nach dem Obigen nur der Fall ist, wenn dieser Winkel $< \varepsilon_m$ ist, wobei Hr. Quincke seine Behauptung irrigerweise auf die für den vorliegenden Fall gar nicht zuständige durch die Annahme $\vartheta = \pi/2$ gewonnene Formel für G stützt. Auch der von Hrn. Quincke erhobene weitere Einwand, Hr. Gallenkamp hätte auch die höheren Potenzen von a/r berücksichtigen müssen, ist praktisch unerheblich, da aus den im Text erwähnten Entwickelungen meiner Dissertation folgt, daß bei der Breite der von Gallenkamp benutzten Adhäsionsplatten die Berücksichtigung der höheren Potenzen von a/r keine wesentlichen Änderungen der aus den Versuchen berechneten Zahlen herbeigeführt hätte.

2) Th. Lohnstein, Ann. d. Phys. 21. p. 1037. 1906.

zum verschwindenden Benetzungswinkel gehörigen „Maximaltropfen" bedeutend verkleinert erscheinen. Kombiniert man nun einen solchen Tropfplattenversuch mit einer Bestimmung der Kapillaritätskonstante a^2 nach einer der bekannten Methoden, z. B. mit einem Versuch an einer Tropfröhre der üblichen Dimensionen, so kann man aus je einem solchen Versuchspaar sowohl a^2 als auch den Benetzungswinkel zwischen der Flüssigkeit und der Substanz der Tropfplatte mit ausreichender Genauigkeit ermitteln. Nach den wenigen bisher vorliegenden Versuchen dieser Art von Guthrie[1]) und Lord Rayleigh weist *destilliertes Wasser* sowohl gegen Glas als auch Metalle einen endlichen Benetzungswinkel auf.

Berlin, Februar 1908.

1) A. Guthrie, Proc. of Roy. Soc. of London 13. p. 444. 1865.

(Eingegangen 26. Februar 1908.)

11. *Eine Bemerkung zu der Arbeit von Hrn. F. A. Schulze: „Einige neue Methoden zur Bestimmung der Schwingungszahlen höchster hörbarer und unhörbarer Töne usw.“*[1]*;*

von P. Debye.

In der kürzlich erschienenen, oben zitierten Arbeit, teilt Hr. F. A. Schulze u. a. einige Beobachtungen mit über eigenartige Klangfiguren bei eingeklemmten kreisrunden Papierscheibchen und verweist auf die ganz analogen von A. Elsas.[2] Er spricht die Meinung aus, daß die Berechnung dieser Figuren große Schwierigkeiten bieten würde. Wir möchten nun im folgenden kurz zeigen, wie die Berechnung der *erzwungenen* Schwingungen einer solchen Platte dazu führt, die betreffenden Figuren durch Übereinanderlagerung *freier* Schwingungen entstanden zu denken. In dieser Weise erhält man qualitativ die beobachteten Knotenkurven; eine quantitative Erklärung würde erst möglich sein, wenn über die Art der Anregung ganz bestimmte Angaben vorliegen.

Die Differentialgleichung für die zur Ebene der Platte senkrechte Entfernung von der Gleichgewichtslage lautet[3] in den Bezeichnungen von Hrn. Schulze bei Anwesenheit äußerer Normalkräfte $N = N_0 e^{iqt}$:

$$(1) \qquad \Delta\Delta w + 12\frac{\varrho(1-\mu^2)}{E D^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 12\frac{1-\mu^2}{E D^3} N_0 e^{iqt}.$$

Für die Berechnung der Eigenschwingungen ist $N_0 = 0$ zu setzen. Die in doppelt unendlicher Anzahl vorhandenen

1) F. A. Schulze, Ann. d. Phys. 24. p. 785. 1907.

2) A. Elsas, Wied. Ann. 19. p. 474. 1883.

3) Vgl. A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität, Deutsch von Timpe, p. 560 u. 564.

Lösungen[1]) sind im vorliegenden Fall dargestellt durch die Formel:[2])

$$(2)\quad w = W_{n\nu} e^{i p_{n\nu} t} = \left\{ J_n(i\varkappa) J_n\left(\varkappa \frac{r}{R}\right) - J_n(\varkappa) J_n\left(i\varkappa \frac{r}{R}\right) \right\} \cos n\vartheta\, e^{i p_{n\nu} t},$$

wobei $\varkappa = \varkappa_{n\nu}$ irgend eine Wurzel der Gleichung (n ganzzahlig):

$$(3)\quad i J_n(\varkappa) J_n'(i\varkappa) - J_n'(\varkappa) J_n(i\varkappa) = 0.$$

Die Größen $\varkappa_{n\nu}$ und $p_{n\nu}$ hängen zusammen mittels der Formel:

$$(4)\quad p_{n\nu} = \varkappa_{n\nu}^2 \frac{D}{R^2} \sqrt{\frac{1}{12(1-\mu^2)} \frac{E}{\varrho}}.$$

Es liegt nun nahe für den Fall, daß N_0 von Null verschieden ist, die Lösung der Gleichung (1) als eine nach den „Eigenfunktionen" $W_{n\nu}$ fortschreitende Reihe anzusetzen. Entwickelt man in dieser Absicht zunächst die Funktion N_0 in der Form:

$$(5)\quad N_0 = \Sigma c_{n\nu} W_{n\nu},$$

wobei die Summation über alle Werte von n und ν zu erstrecken ist, so erhält man für die Koeffizienten $c_{n\nu}$ auf Grund der für die Eigenfunktionen geltenden Orthogonalitätsbedingung[3]):

$$(6)\quad c_{n\nu} = \frac{\int N_0 W_{n\nu}\, d\sigma}{\int W_{n\nu}^2\, d\sigma},$$

wobei die Integration über die ganze Platte zu erstrecken ist. Das Integral im Nenner kann nach dem Greenschen Satz durch einen Grenzübergang ohne weiteres ausgeführt werden und liefert

---

1) F. A. Schulze, l. c. Die dortige Gleichung (1) soll offenbar lauten:

$$w_n = \mathrm{P} \cos n\vartheta \left\{ J_n\left(\varkappa \frac{r}{R}\right) + \lambda J_n\left(i\varkappa \frac{r}{R}\right) \right\} \cos(pt - \varepsilon).$$

Das Resultat findet sich bei Lord Rayleigh, Theory of Sound, London 1. p. 366. 1894, wo aber nur die zwei ersten Wurzeln von (3) für den Fall $n = 0$ angegeben werden.

2) Statt $\cos n\vartheta$ kann natürlich in (2) auch $\sin n\vartheta$ gesetzt werden. Der Übersichtlichkeit halber wurde dieses im folgenden fortgelassen, obwohl bei ganz beliebiger Wahl von N_0 auch die Lösungen mit $\sin n\vartheta$ in Betracht zu ziehen wären.

3) Vgl. Lord Rayleigh, l. c. 1. p. 358.

$$(7)\quad \left\{ \int W_{n\nu}^2 \, d\sigma = \frac{\pi R^2}{4} \frac{R^3}{x^3} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} P \right) \frac{\partial^2 P}{\partial r \, \partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} P \right) \right]_{r=R} \right.,$$

unter P die geschweifte Klammer in (2) verstanden.

Setzt man nun auch für w eine Reihe nach Eigenfunktionen, aber mit unbestimmten Koeffizienten, so erhält man aus (1) als vollständige Lösung des Problems für den Fall, daß äußere Kräfte $N_0 e^{iqt}$ die Bewegung erzwingen:

$$(8)\quad w = 12(1-\mu^2) \frac{R^4}{E D^3} e^{iqt} \sum \frac{c_{n\nu}}{x_{n\nu}^4 \left(1 - \frac{q^2}{p_{n\nu}^2}\right)} W_{n\nu}.$$

Abgesehen von ganz speziellen Fällen der Anregung ersieht man aus (8), daß die Bewegung der Platte sich immer zusammensetzt aus allen möglichen Eigenschwingungen. Kommt die Schwingungszahl der einwirkenden Kraft in die Nähe einer Eigenschwingungszahl ($q \cong p_{n\nu}$), so überwiegt in bekannter Weise das betreffende Glied der Reihe und würde nach (8), wenn die Schwingungszahlen genau übereinstimmen, sogar unendlich groß werden. In letzterer Aussage steckt aber eine unberechtigte Extrapolation, da für große Ausbiegungen Gleichung (1) nur annähernde Gültigkeit beansprucht.

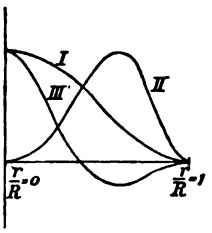


Fig. 1.

Im allgemeinen wird man eine gute Annäherung für w erhalten, indem man nur einige Glieder der Reihe (8) berücksichtigt. In der Tat wollen wir zeigen, daß sich sämtliche von Hrn. Schulze erhaltenen Figuren (p. 795) durch Übereinanderlagerung nur zweier Eigenschwingungen erhalten lassen. Zu diesem Zweck wurde in Fig. 1 zunächst die theoretische Form der ausgebogenen Platte gezeichnet längs des Halbstrahles $\vartheta = 0$ für den Fall, daß diese nur eine Eigenschwingung ausführt und zwar stellt Kurve I W_{00} (0 Knotendurchmesser, 0 Knotenkreise), Kurve II W_{20} (2 Knotendurchmesser, 0 Knotenkreise) und Kurve III W_{01} (0 Knotendurchmesser, 1 Knotenkreis)

dar.[1]) Von der unsymmetrischen Eigenschwingung W_{10} wurde abgesehen, obwohl die zugehörige Schwingungszahl in den untersuchten Bereich fällt, sie scheint sich in dem Fall von Hrn. Schulze nicht bemerkbar zu machen. Gehen wir nun aus von einer Schwingungszahl, die nahezu der zu W_{01} gehörigen gleich

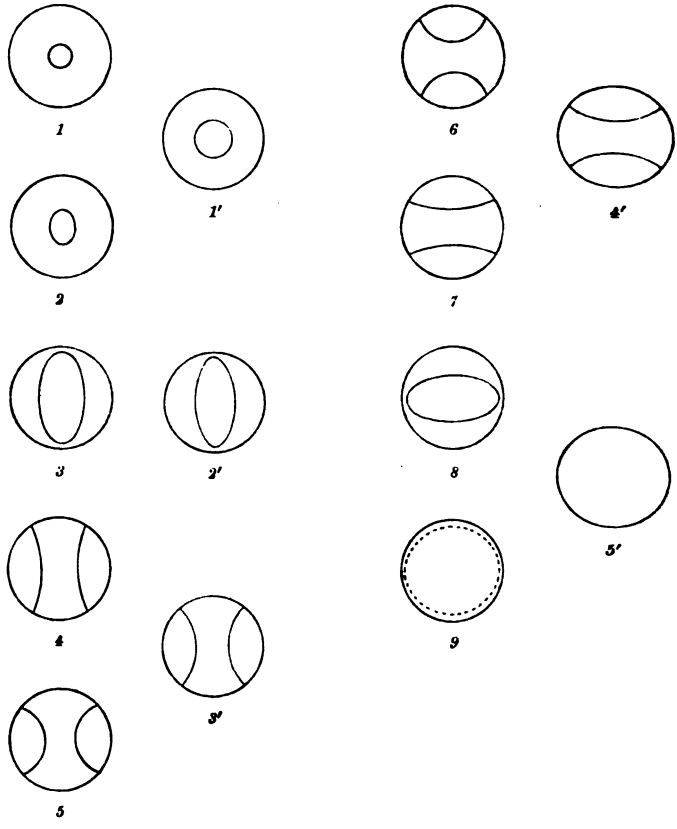


Fig. 2.

ist, so wird nach (8) das entsprechende Glied der Reihe stark überwiegen, die Knotenkurve ist also, wie Kurve III Fig. 1 zeigt, nahezu ein Kreis (Fig. 2, Nr. 1'). Nimmt jetzt die Schwingungszahl der einwirkenden Kraft allmählich ab, so wird der zu W_{10}

1) Die an sich willkürlichen Maximalamplituden sind durch Multiplikation mit geeigneten Konstanten auf den gleichen Wert gebracht.

gehörige Nenner der Reihe (8) fortwährend größer werden, die anderen Glieder der Reihe bekommen also Gelegenheit einen Einfluß auszuüben; insbesondere wird sich das Glied W_{20} (Kurve II, Fig. 1) bemerkbar machen, das wir deshalb allein berücksichtigen wollen. So entstand Fig. 2 Nr. 2′, indem wir zu W_{01} noch die Eigenschwingung W_{20} mit einer fünfmal kleineren Maximalamplitude hinzufügten, Fig. 2, Nr. 3′ entspricht dem Fall, daß die beiden Maximalamplituden gleich groß sind. Inzwischen ist die Schwingungszahl der erregenden Kraft in die Nähe der zu W_{20} gehörigen Eigenschwingungszahl gekommen; infolgedessen geht $(q/p_{20})^2$ bei weiterem Sinken dieser Frequenz von einem Werte >1 zu einem Werte <1 über, so daß der zu W_{20} gehörige Faktor der Reihe (8) sein Zeichen wechselt. Diesem Umstande entspricht das scheinbare Umklappen der Knotenfigur (Fig. 2, Nr. 4′). Sinkt nun q noch weiter, so tritt die Grundschwingung W_{00} (Kurve I, Fig. 1) allmählich in den Vordergrund und erzeugt schließlich eine Schwingung ohne Knotenkurven (Fig. 2, Nr. 5′). Neben diesen theoretischen Figg. 1′ . . . . 5′ wurden in Fig. 2 die experimentell gefundenen nochmals abgedruckt, die, wie man sieht, in allen Stücken mit ersteren übereinstimmen. Daß sich der stetige Übergang der Klangfiguren ineinander nur bei Papier zeigte, hat offenbar seinen Grund in dem sehr kleinen Elastizitätsmodul. Formel (8) zeigt ja, daß, wenn man die zu einem bestimmten Gliede gehörigen Amplituden für zwei Plättchen aus verschiedenen Substanzen 1 und 2 mit gleichen Dimensionen bei gleichen anregenden Kräften vergleicht, diese sich verhalten wie

$$\frac{1-\mu_1^2}{1-\mu_2^2}\,\frac{E_2}{E_1},$$

wenn der Quotient q/p in beiden Fällen derselbe ist. Für Papier und Glas wird dieses Verhältnis ungefähr 30.

Wenn die Plättchen sehr dünn sind, müssen sich nach (8), wegen des Faktors D^3 im Nenner, ähnliche Erscheinungen zeigen, wie bei Papier. Die Beobachtungen bei Glimmerplättchen, wo auch Abweichungen von den regelmäßigen Klangfiguren auftraten, könnten wohl in dieser Weise erklärt werden.

München, Math.-phys. Sammlung, 20. Januar 1908.

(Eingegangen 23. Januar 1908.)

12. *Berichtigung zur Arbeit: „Über den Einfluß von Unstetigkeiten bei der Bewegung von Elektronen“; von G. A. Schott.*

In die letzte Gleichung (31) (Ann. d. Phys. **25**. p. 79. 1908) und die entsprechende Gleichung (36) (p. 88), hat sich ein Fehler eingeschlichen. Obgleich derselbe auf den Gang der Untersuchung, und auch auf die behandelten Beispiele ohne jeden Einfluß ist, so möge er hier, um Mißverständnissen vorzubeugen, korrigiert werden. Die angegebenen Gleichungen müssen heißen:

$$(31)\quad \begin{cases} \operatorname{rot}\mathfrak{A} = \int\left[\frac{\dot{\mathfrak{v}}}{c^2}\cdot\boldsymbol{R}'\right]\frac{de'}{K'^2R'^2} \\ \qquad + \int\left[\frac{\mathfrak{v}'}{c}\cdot\boldsymbol{R}'\right]\left\{1-\frac{v'^2}{c^2}+\left(\frac{\dot{\mathfrak{v}}'}{c^2}\boldsymbol{R}'\right)\right\}\frac{de'}{K'^3R'^2}\cdot \end{cases}$$

$$(36)\quad \begin{cases} \boldsymbol{G} = \pm\int\left\{\frac{\dot{\mathfrak{v}}'}{c^2}-\frac{1}{R'}\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\left[\frac{\dot{\mathfrak{v}}'}{c^2}\cdot\boldsymbol{R}'\right]\right]\right\}\frac{de'}{K'^2R'} \\ \qquad \mp\int\left\{\frac{\boldsymbol{R}'}{R'}-\frac{\mathfrak{v}'}{c}+\frac{1}{R'}\left[\frac{\mathfrak{v}}{c}\left[\frac{\mathfrak{v}'}{c}\cdot\boldsymbol{R}'\right]\right]\right\} \\ \qquad\qquad \left\{1-\frac{v'^2}{c^2}+\left(\frac{\dot{\mathfrak{v}}'}{c^2}\cdot\boldsymbol{R}'\right)\right\}\frac{de'}{K'^3R'^2}\cdot \end{cases}$$

Bonn, den 4. März 1908.

(Eingegangen 6. März 1908).

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

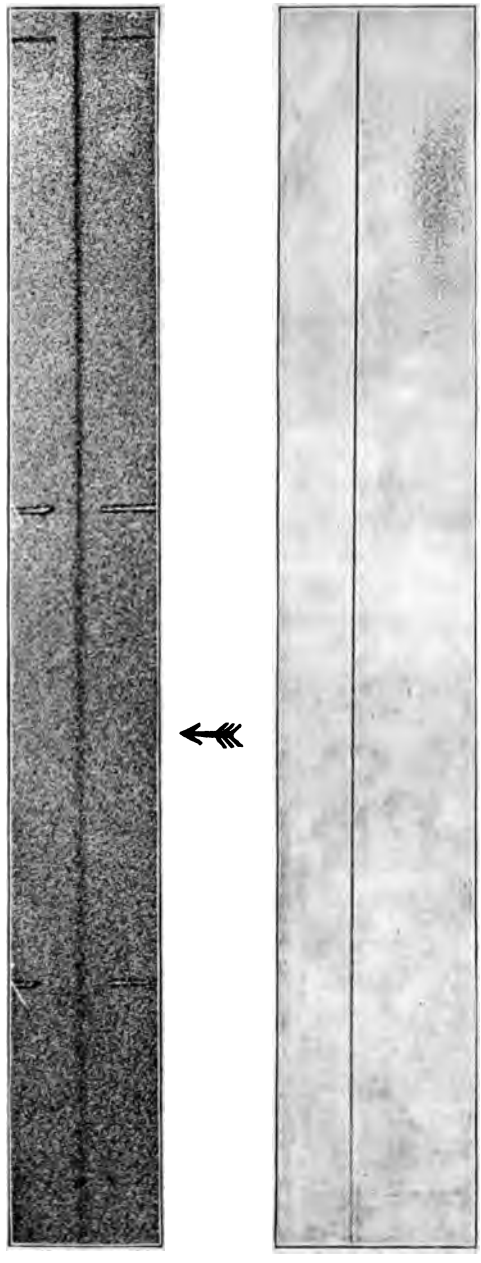


Fig. 1. Fig. 2.

B. Walter und R. Pohl.

1908. № 5.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 25.

1. *Die elastischen Konstanten der Metalle bei kleinen Deformationen.*

II. Torsionsmodul, Verhältnis von Querkontraktion zu Längsdilatation und kubische Kompressibilität;

von E. Grüneisen.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Inhalt: *Einleitung.* — *5. Torsionsmodul.* § 22. Schwingungsmethode. — *6. Querkontraktionsmessungen.* § 23. Allgemeiner Plan. § 24. Beschreibung des Apparates. § 25. Aufhängung des Apparates. § 26. Einfluß der Stabbiegungen. § 27. Elimination anderer Fehlerquellen. § 28. Versuchsergebnis für die harten Stäbe. § 29. Versuchsergebnis für die weichen Stäbe aus Kadmium, Zinn, Blei, Wismut. — *7. Besprechung des Zahlenmaterials.* § 30. Zusammenstellung der Beobachtungen. § 31. Das Verhältnis μ. § 32. Die kubische Kompressibilität. — *Zusammenfassung.*

Einleitung.

Früher[1]) hat sich ergeben, daß für einigermaßen homogenes und isotropes Material verschiedene Methoden, statische und dynamische, auf Dehnung und Biegung beruhende, zum gleichen Werte des Elastizitätsmoduls E führen. Die vorliegende Untersuchung[2]) gilt der zweiten das elastische Verhalten isotropen Materials bestimmenden Konstante, als welche in der Poissonschen Theorie eine Zahl μ auftritt, die dem Verhältnis von Querkontraktion zu Längsdilatation bei der Dehnung eines Stabes gleich ist. Sind E und μ bekannt, so würden, wenn das Material die Forderungen der Theorie erfüllte, der Tor-

1) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 22. p. 801. 1907.

2) Die Numerierung der einzelnen Abschnitte und Tabellen schließt sich an die der früheren Abhandlung an.

sionsmodul T und die Kompressibilität $\varkappa$ gegeben sein durch die Formeln:

$$T = \frac{E}{2(1+\mu)}, \tag{1}$$

$$\varkappa = \frac{3(1-2\mu)}{E}. \tag{2}$$

Da sowohl die Messung der Querkontraktion von Stäben, d. h. die unmittelbare Bestimmung von μ, als auch die der Kompressibilität auf erhebliche Schwierigkeiten stoßen, während der Torsionsmodul sich leicht bestimmen läßt, so wird zumeist Formel (1) als richtig angenommen und μ aus E und T berechnet; $\varkappa$ ergibt sich dann nach Formel (2). Dies Verfahren bedarf entschieden einer kritischen Nachprüfung.

Denn ein Beweis für die Gültigkeit von Formel (1) ist noch nie gegeben worden. Im Gegenteil ist Stromeyer[1]) bei seinen Querkontraktionsmessungen zu dem Schluß gelangt, daß die Zahl μ bei direkter Messung anders gefunden wird, als aus Formel (1). Wenn er auch die Möglichkeit ziemlich großer Beobachtungsfehler einräumen muß, so spricht doch andererseits für die Richtigkeit seines Resultates, daß in der vorhandenen Literatur die Werte von μ, welche auf Torsionsmessungen und also auf der Annahme von Formel (1) beruhen, für dasselbe Metall außerordentlich schwanken, während Methoden, bei denen μ direkt gemessen oder wenigstens aus einer mit Volumänderung verbundenen Deformation abgeleitet wird, besser übereinstimmende Zahlen liefern.

Im folgenden wird Formel (1) dadurch geprüft, daß für 13 Stäbe, deren Elastizitätsmodul E bekannt ist, sowohl T als μ beobachtet werden.

Für den Torsionsmodul ist hier nur die dynamische Methode gewählt worden. Sie dürfte genügen, da die direkte statische Methode sich nahezu der gleichen Deformation bedient, und der Unterschied zwischen $T_{\text{isoth.}}$ und $T_{\text{adiab.}}$ nur gering ist. Zur Ermittelung von μ sind Querkontraktionsmessungen mit einem Interferenzapparat ausgeführt worden, wie dies schon früher von Stromeyer[2]) und Benton[3]), allerdings unter An-

1) C. E. Stromeyer, Proc. Roy. Soc. 55. p. 373. 1894.

2) l. c.

3) J. R. Benton, Ann. d. Phys. 3. p. 471. 1900; Phys. Rev. 12. p. 36. 1901.

wendung stärkerer Deformationen, geschehen ist. Mit Spiegelapparaten ist die Querkontraktion von Bauschinger[1]) und Morrow[2]) gemessen worden. Alle die genannten Beobachter haben jedoch ihre Versuche nur auf wenige Metalle ausgedehnt (vgl. Tab. 16).

Zum Schluß ist noch für alle untersuchten Stäbe die kubische Kompressibilität berechnet worden.

5. Torsionsmodul.

§ 22. Schwingungsmethode.

Am einfachsten und zuverlässigsten erhält man den Torsionsmodul von Stäben nach der Schwingungsmethode.

Der Stab wird, in der Mitte von einem Drahtring umschlungen, in einen Schraubstock eingeklemmt. Ein Korkring, der an einer Stelle aufgeschlitzt sich leicht über den Stab schiebt und innen mit Kolophonium bestreut ist, erhält durch Fingerdruck so viel Reibung am Stabe, daß bei drehender Bewegung am Stabende der Torsionsgrundton entsteht.

Beim Al, Ir, Rh, Zn, Pb, Bi, Cd, Sn ließ sich der Ton nicht erzeugen oder verklang zu schnell. Bei den anderen untersuchten Stäben waren Schwebungen mit einem nahe gleich gestimmten *longitudinal* schwingenden Vergleichsstabe zu hören. An diesem ließ sich die Tonhöhe nach der Kundtschen Staubfigurenmethode leicht ermitteln, während dies für den schwächeren und rasch verklingenden Torsionston direkt nicht möglich war. Längere Stäbe können jedoch nach Schneebelis Methode[3]) auch zur direkten Erzeugung von Staubfiguren veranlaßt werden.

Als Vergleichsstäbe dienten vier Messingstangen. Ihre Longitudinaltöne wurden durch allmähliche Kürzung auf die Torsionstöne der zu untersuchenden Stäbe abgestimmt. Da sich das Messing als recht homogen erwies, so genügte es, für einige wenige Längen die absolute Tonhöhe zu ermitteln, im übrigen aber sie aus dem Kürzungsverhältnis der Messingstangen abzuleiten.

Bei dieser Gelegenheit wurden auch noch einige Longi-

1) J. Bauschinger, Der Zivilingenieur **25**. p. 81. 1879.
2) J. Morrow, Phil. Mag. (6) **6**. p. 417. 1903.
3) H. Schneebeli, Pogg. Ann. **140**. p. 608. 1870.

tudinaltöne mitbestimmt, so von Kupfer IV (= IVa), Gold II und den neu bezogenen Stäben Aluminium I und II [1]), Kupfer V und VI.[2]) Die Analyse der letztgenannten Stäbe, die ich Hrn. Groschuff verdanke, ergab folgendes:

Aluminium I:	1,1 % Si;	0,5 % Fe;	0,05% Cu	El.L.-V.[3]) = 35 (4,1‰)
Aluminium II:	1,6 % Si;	0,5 % Fe;	5,7 % Cu	$\times 10^{-4}$ 32 (3,8‰)
Kupfer V:	0,2 % As;	0,04% Fe;	1,0 % Cu	32 (2,2‰)
Kupfer VI:	0,15% As;	0,03% Fe;	Spur Ni	53 (3,5‰)

Tabelle 10.

	l cm	s	$n_{tors.}$ Schw./Sek.	$T_{18°}$ kg/mm²	$E_{18°}$ kg/mm²	$\mu_{tors.}$
Aluminium I	50,28	2,71	3120	2717	7120	0,310
Aluminium II	50,06	2,81	3090	2737	7320	0,337
Kupfer IVa	26,18	8,96	4306	4640	12580	0,356
Kupfer V	49,65	8,93	2291	4710	13110	0,391
Kupfer VI	50,21	8,93	2253	4660	13040	0,399
Silber	25,19	10,53	3285	2940	8050	0,369
Gold I	26,99	19,22	2135	2602	7780	0,495
Gold II	27,69	19,21	2168	2822	8100	0,435
Stahl	26,98	7,82	5975	8280	21820	0,287
Konstantan	26,96	8,92	4855	6230	16560	0,329
Manganin	26,94	8,44	4358	4740	12600	0,329
Palladium	26,98	11,96	3832	5210	11470	0,101
Platin II	27,04	21,39	3122	6220	17020	0,368
Rotguß	26,94	8,40	3751	3500	8240	0,177

Tab. 10 gibt das Resultat aller Versuche. Der Torsionsmodul T berechnet sich aus der Schwingungszahl/Sek. n, der Stablänge l und der Materialdichte s nach der Formel

$$T = \frac{4 n^2 l^2 s}{9810} \left[\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}\right].$$

Daneben ist der Modul E gesetzt, teils nach der früheren Tab. 8, teils nach den neuerdings bestimmten Longitudinaltönen. Wo $E_{long.}$ und $E_{stat.}$ zugleich bekannt sind, ist dem ersteren Werte hier der Vorzug gegeben, da sowohl bei den

1) Von Basse & Selve, Altena. Warm gewalzt und gezogen.

2) Aus Heddernheim.

3) Das el. Leitvermögen in [cm^{-1} Ohm^{-1}] bei 15° und sein Temperaturkoeffizient (in ‰) wurden im Schwachstromlaboratorium der Reichsanstalt bestimmt.

Torsions- wie bei den Longitudinalschwingungen vorwiegend die Elastizität der mittleren Stabteile zur Geltung kommt. Aus E und T berechnet sich schließlich $\mu_{tors.}$ nach Formel (1). Eine Besprechung des Zahlenmateriales erfolgt später in § 31.

Die geringen Ungleichmäßigkeiten im Durchmesser der Stäbe, welche zu der in § 6 abgeleiteten Korrektion bei den Longitudinaltönen Veranlassung gaben, sind in Tab. 10 unberücksichtigt geblieben. Zwar ergibt sich die entsprechende Korrektion für den Torsionsmodul T doppelt so groß, wie für $E_{long.}$ (vgl. die δ in Tab. 3), weil die Ausdrücke für die potentielle und kinetische Energie der Torsionsschwingung sich formell nur durch das Auftreten der zweiten Potenz des Querschnittes statt der ersten von den entsprechenden Werten für die Longitudinalschwingung (§ 6) unterscheiden, dennoch würde jene Korrektion hier bedeutungslos sein, da die später bewiesene Ungültigkeit von Formel (1) durch sie nicht aufgehoben wird.

Die neu bestimmten $E_{long.}$ für die oben genannten sechs Stäbe bedürfen wegen des sehr gleichmäßigen Durchmessers keiner Korrektion. Für Kupfer IV und Gold II stimmen die $E_{long.}$ (12580 bzw. 8100) wieder gut überein mit den $E_{stat.}$ (12500 bzw. 8120).

6. Querkontraktionsmessungen.

§ 23. Allgemeiner Plan.

Der Stab wurde ebenso wie für die Dehnungsmessungen (§ 11) aufgehängt und belastet, so daß die Deformationsverhältnisse sicherlich die gleichen waren wie früher. Da es sich bei den Querkontraktionsversuchen um die Messung einer etwa 30 mal kleineren Verschiebung handelte, als bei den Dehnungsversuchen unter gleichen Belastungsverhältnissen, im letzteren Falle aber die Verschiebung oft nur 3 Interferenzringe ($= 0{,}819\,\mu$) betragen hatte, so mußten entweder die Belastungen gesteigert oder die Interferenzmessungen durch Verbindung mit einer Übersetzungsvorrichtung empfindlicher gemacht werden. Ich entschied mich für den zweiten Weg, da ich es für zweckmäßiger hielt, im Bereich kleinster Deformationen zu bleiben, in dem allein es möglich war, auch die

weichsten Metalle zu untersuchen. Eine Steigerung der Belastung, wie sie nötig gewesen wäre, um die Übersetzungsvorrichtung zu vermeiden, hätte außerdem eine völlig neue Montierung des Stabes in der Belastungsvorrichtung erfordert.

Es muß jedoch ohne weiteres zugestanden werden, daß die Beschränkung auf kleine Belastungen unter etwa 30 kg auch Nachteile gehabt hat. Erstens reichte die Übersetzungsvorrichtung trotz einer Vergrößerung der Querkontraktion im Verhältnis 1 : 10 bzw. 1 : 12 nicht aus, um die außerordentlich wenig kompressibeln Metalle Rhodium und Iridium in den Bereich der Untersuchung zu ziehen. Zweitens brachte jene Vorrichtung eine erhebliche Komplizierung des Apparates und eine entsprechende Vermehrung der Fehlerquellen mit sich.

Eine ausführliche Beschreibung des Apparates ist an anderer Stelle[1]) gegeben. Zur Beurteilung der Messungsergebnisse wird jedoch ein Hinweis auf die wichtigsten Konstruktionsteile und eine Besprechung der Fehlerquellen notwendig sein.

§ 24. Beschreibung des Apparates.

Aus der schematischen Skizze Fig. 1 a geht hervor, wie die Wirksamkeit des Apparates im Idealfalle gedacht war. Wir betrachten zunächst den eigentlichen Querkontraktionsapparat

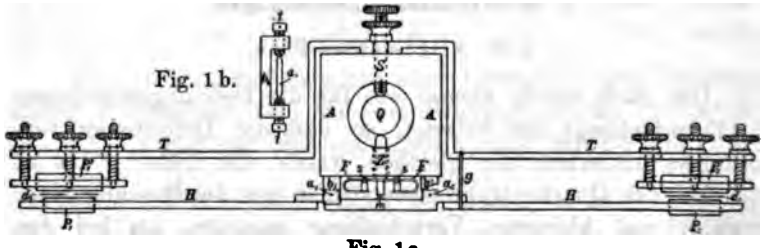


Fig. 1 a.

und sehen davon ab, wie er in seiner richtigen Lage an dem senkrecht zur Zeichnungsebene gedachten Stabe gehalten wird.

Q bezeichnet den Querschnitt, in welchem die beiden Meßkuppen den Stab berühren. Die eine Kuppe bildet das Ende einer Schraube *S*, die in dem über den Stab geschobenen

1) E. Grüneisen, Zeitschr. f. Instrumentenk. 28. p. 89. 1908.

Aluminiumwürfel A einen festen Halt besitzt. Die andere Kuppe bildet das Ende eines Stahlzylinders Z, der von der Feder F gehalten durch eine zylindrische Bohrung des Würfels A frei hindurchgeht. Da die Enden der Feder an den im Würfel A eingeschraubten Säulchen $s\,s$ feste Stützpunkte besitzen, so werden die Kuppen mit einer der Durchbiegung von F entsprechenden Kraft gegen den Stab gepreßt und folgen demnach den Veränderungen des Durchmessers. Damit ihre gegenseitige Verschiebung gleich der Änderung des Durchmessers sei, darf sich die Federkraft, mit der die Meßkuppen in die Oberfläche des Stabes eingedrückt werden, während der Querkontraktion nur so wenig ändern, daß die dadurch bedingte Änderung der Eindrückung klein ist gegen die Änderung des Durchmessers. Deshalb ist für die weichen Stäbe eine schwächere Feder F in Anwendung gekommen als für die harten.

Vorausgesetzt, daß die Bewegung des Zylinders Z lediglich eine Verschiebung in Richtung seiner Achse ist, so bleibt nur noch diese Verschiebung relativ zum Würfel A zu messen. Dies geschieht durch Umsetzung der translatorischen Bewegung in die Drehung des Hebelarmes H um eine der beiden Achsen a_1 oder a_2.

Diese Achsen werden durch beiderseits zugespitzte Stahlzylinder gebildet, deren Lagerung in den Böcken b_1 oder b_2 man aus der Skizze 1 b erkennt. Die Stahlspitzen drehen sich in ringförmigen Achatsteinen, die in die Enden der Schrauben $t\,t$ eingelassen sind. Diese Lagerung hat sich als praktisch reibungslos erwiesen. Jede Reibung hätte sich bei der Messung als toter Gang bemerklich machen müssen.

Mitten zwischen den Achsen und in ihrer Ebene liegt die Stahlspitze m, die durch die leichte Federkraft eines Gummibändchens g gegen die gut polierte Endfläche des Stahlzylinders Z gedrückt wird. Da in Wirklichkeit die Feder F senkrecht zur Zeichnungsebene orientiert war, so konnte der Abstand der Achsen a_1 und a_2 auf 2 cm herabgesetzt werden, der kurze Hebelarm also auf 1 cm.

In rund 11 cm Abstand von der Mittelspitze m beobachtete man die Verschiebung des Hebelarmes gegen die mit dem Würfel A fest verbundenen Arme T mittels Haidingerscher

Interferenzringe. Die Ringe entstehen (§ 9) zwischen den im Hebelarm befestigten planen Glasplatten $P_1 P_2$ einerseits und den im Träger T verstellbar eingesetzten Platten $P_1' P_2'$ andererseits. Die einander zugekehrten Flächen sind durchsichtig versilbert. Für die Schärfe der Ringe ist Parallelismus der gegenüberstehenden Spiegelflächen erforderlich. In unserem Falle drehten sich zwar die Flächen gegeneinander, jedoch in so geringem Betrage, daß das Ringbild während des Belastens die notwendige Schärfe behielt.

Als Ort der gemessenen Ringverschiebung galten die Mittelpunkte der mit dem Hebelarm fest verbundenen Blenden d_1 und d_2 von 5 mm Durchmesser. Die Blenden sind in der Ebene der Achsen $a_1 a_2$ orientiert. Der Abstand der Spitze m von den Blendenmitten beträgt nahezu 11 cm, daher ist das Übersetzungsverhältnis je nach dem benutzten Plattenpaar und je nach der gewählten Achse 10 bzw. 12, z. B. bei Anwendung der Achse a_1 in Bock b_1 am Plattenpaar 1

$$\mathfrak{h}_1 = d_1 a_1 : a_1 m = 10,$$

am Plattenpaar 2

$$\mathfrak{h}_2 = d_2 a_1 : a_1 m = 12.$$

Die genauen Verhältniszahlen wurden auf der Teilmaschine ausgemessen.

Die Schraube S wird je nach dem Durchmesser des zu prüfenden Stabes so weit eingeschraubt, daß der Hebelarm senkrecht zur Richtung des Stabdurchmessers bzw. der Zylinderachse (Z) steht.

Hinsichtlich der Parallelstellung der Platten sei auf die ausführliche Beschreibung verwiesen. Über die Beobachtung der Ringe gilt das bei den Dehnungsversuchen (§ 12) Gesagte. Es wurde auch jetzt die Belastung so gewählt, daß eine *ganze* Zahl von Ringen am Doppelfaden vorüberwanderte. Entsprechend dem verschiedenen Übersetzungsverhältnis waren also an beiden Plattenpaaren verschiedene Belastungen nötig, um eine bestimmte Ringzahl vorüberwandern zu lassen. Die bei dem eingeschlagenen Verfahren erreichbare Schnelligkeit der Beobachtung war wichtig, weil sie die Störung durch äußere Temperaturänderungen ausschloß. So genügte wieder ein über

den Apparat geschobener Holzkasten mit Glasfenstern als Temperaturschutz gegen außen.

Da die Querkontraktion stets an beiden Plattenpaaren beobachtet werden sollte, war die Einrichtung getroffen, daß Quecksilberlampe und Beobachtungsfernrohr auf fahrbarer Unterlage bequem von einem Plattenpaar zum anderen verschoben werden konnten.

§ 25. Aufhängung des Apparates.

Wir kommen nun zu demjenigen Punkte, der die größten Schwierigkeiten bereitet hat. Der im vorigen beschriebene Apparat muß den mit der Längenänderung des Stabes verbundenen Auf- und Abwärtsbewegungen des untersuchten Querschnittes ohne Widerstand folgen. Dies läßt sich am einfachsten erreichen, wenn die Meßkuppen die einzigen Berührungsstellen zwischen Apparat und Stab bilden. Da ihre Reibung am Stabe aber nicht ausreicht, um das Apparatgewicht zu tragen, so mußte noch eine besondere Entlastung der Kuppen vorgesehen werden, deren Einrichtung hier wieder nur im Prinzip angedeutet werden möge.

Der Apparat ist mit vier zu den oberen Ecken des Würfels *A* führenden, in ihrer Länge verstellbaren Kettchen am kurzen Arm einer ungleicharmigen Wage aufgehängt und durch ein am langen Arm sitzendes Gegengewicht im indifferenten Gleichgewicht gehalten, indem die Angriffspunkte des Apparatgewichtes und Gegengewichtes mit der Drehachse des Wagebalkens in eine Ebene gebracht sind. So werden die Meßkuppen einerseits entlastet, andererseits genügt ihre Reibung am Stabe, um den Apparat bei einer Auf- und Abwärtsbewegung des untersuchten Querschnittes mitzuführen. Die durch Spitzenlager gebildete Drehachse des Wagebalkens ist mit dem oberen Teile des Stabes starr verbunden, wodurch dessen erschütterungsfreie Aufhängung auch dem Apparate selbst zugute kommt.

Der Apparat hat infolge der Aufhängung Bewegungsfreiheit in vertikaler Richtung. Die Verstellbarkeit der Kettchen dient dazu, den Würfel *A* so am Stabe zu justieren, daß die gemeinsame Achse der Schraube *S* und des Zylinders *Z* senkrecht zum Stabe zu liegen kommt. Die richtige Einstellung

wird durch eine besondere Vorrichtung, auf die ich hier nicht eingehen will, gewährleistet.

§ 26. Einfluß der Stabbiegungen.

Die beschriebene Aufhängevorrichtung erfüllt ihren Zweck insofern gut, als der Apparat einem Heben und Senken des Querschnittes ohne Widerstand folgt. Nun treten aber, wie sich bei den Dehnungsmessungen herausstellte, erhebliche Biegungen des Stabes auf, infolge deren der untersuchte Querschnitt sich gegen den oberen Teil des Stabes dreht, und damit auch gegen den daran hängenden Querkontraktionsapparat selbst. Dadurch wird das Zylinderchen Z zwangsweise in vertikaler Ebene gedreht, denn seine Führung läßt eine kleine Drehung verhältnismäßig leicht zu, obwohl bei der endgültigen Apparatform der Zylinder von *zwei* an seinen Enden sitzenden Federn gehalten wird.[1]) Die Drehung des Zylinders hat aber zur Folge, daß die auf seiner Endfläche aufliegende Spitze m je nach der Auflagerstelle und je nach dem Drehungssinn des Zylinders sich dem Stabe nähert oder von ihm entfernt. Dadurch wird die Querkontraktion zu klein oder zu groß gefunden werden.

Zur Elimination dieses Fehlers gibt es zwei Mittel. Einmal wird er unmerklich klein, wenn die Spitze m und der Berührungspunkt zwischen Zylinder und Stab auf dem gleichen Radius des Querschnittes Q liegen. Sofern man dies aber nicht gewährleisten kann, muß man zum zweiten Mittel greifen und durch eine halbe Umdrehung des Stabes um seine Achse innerhalb des Apparates die Stabbiegung, die Zylinderdrehung und damit auch den Fehler umgekehrt wirken lassen.

So wurde z. B. beim Silberstabe für irgend einen Durchmesser die Verkürzung im Mittel zu $2{,}056 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{2}\,\lambda/\mathrm{kg}$ gefunden. Als die Spitze m um 0,37 mm gesenkt war, ergab sich 2,170. Nachdem der Stab innerhalb des Apparates um 180° gedreht war, fand sich in der ersten Höhe der Spitze m 1,890, nach der Senkung 1,782. Der Effekt hatte sich also in der Tat umgekehrt. Mittelt man die zusammengehörigen Beobachtungen, so folgt für die Durchmesseränderung

1) Vgl. die Beschreibung in der Zeitschr. f. Instrumentenkunde.

vor der Senkung von m	*nach* der Senkung von m
2,056	2,170
1,890	1,782
$1{,}973 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{2}\lambda/\mathrm{kg}$	$1{,}976 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{2}\lambda/\mathrm{kg}$.

Der Einfluß der Zylinderdrehung fällt also heraus, wenn für jeden Durchmesser zwei Beobachtungen mit entgegengesetzter Ansatzrichtung des Apparates kombiniert werden. Die Ausführung dieser Doppelbeobachtungen neben sorgfältiger Justierung der Spitze m in der Achse des Zylinders Z wird meiner Meinung nach den besprochenen Fehler bei den folgenden Messungen hinreichend eliminiert haben.

§ 27. Elimination anderer Fehlerquellen.

Ein ebenso unerwarteter Fehler, wie der soeben besprochene, offenbarte sich darin, daß die Beobachtungen an beiden Plattenpaaren nach Umrechnung mit den bekannten Übersetzungsverhältnissen $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ nicht zum gleichen Werte der Querkontraktion führten. Es zeigte sich, daß bei Belastung des Stabes eine Bewegung der Plattenarme TT gegen die benutzten Achsenlager der Böcke b_1 und b_2 eintrat, obwohl zwischen ihnen eine starre Verbindung beabsichtigt war. Da jene Bewegung im wesentlichen aus einer Parallelverschiebung ($= \nu'$ Ringe) bestand, so erschienen die einer Belastung π entsprechenden beiderseitigen Ringverschiebungen ν_1 und ν_2 um $+\nu'$ und $-\nu'$ gefälscht. Aus

$$\nu_1 + \nu' = \mathfrak{h}_1 \Delta d,$$
$$\nu_2 - \nu' = \mathfrak{h}_2 \Delta d$$

ergibt sich die wahre Durchmesseränderung für 1 kg Belastung

$$\frac{\Delta d}{\pi} = \frac{1}{\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2}\left[\left(\frac{\nu}{\pi}\right)_1 + \left(\frac{\nu}{\pi}\right)_2\right]. \tag{3}$$

Das auffallendste Beispiel für den Einfluß und die Elimination von ν' gibt der *Stahlstab*. Die Zahlen von Tab. 11 (Zeile 1 und 2) geben die scheinbaren, durch ν' gefälschten Durchmesseränderungen. Die nach Formel (3) berechneten Zahlen der dritten Zeile, die sich auch in Tab. 12 finden, geben die wahren Werte und stimmen gut überein, obwohl sie für verschiedene, durch die Pfeile im Tabellenkopf angedeutete Ansatzrichtungen des Apparates gelten. Außerdem beziehen sich die Spalten 1—4 und 5—8 auf verschiedene Querschnitte.

Tabelle 11.

Durchmesseränderung des Stahlstabes in $10^{-5}\,\frac{1}{2}\,\lambda/\mathrm{kg}$.

	Querschnitt 1				Querschnitt 2			
	1 →	2 ←	3 ▲	4 ▼	5 →	6 ←	7 ▲	8 ▼
Plattenpaar 1, $\frac{1}{b_1}\left(\frac{\nu}{\pi}\right)_1 =$	386	427	385	425	377	448	393	427
„ 2, $\frac{1}{b_2}\left(\frac{\nu}{\pi}\right)_2 =$	406	360	405	358	409	341	402	365
$\frac{1}{b_1+b_2}\left[\left(\frac{\nu}{\pi}\right)_1+\left(\frac{\nu}{\pi}\right)_2\right] =$	395	396	395	395	392	393	397	399

Schließlich ist noch eine dritte Fehlerquelle zu erwähnen. Bei allen Versuchen wurde mit Achslager 2 im Mittel eine größere Kontraktion des Durchmessers erhalten, als mit Achslager 1 (Tab. 12). Der Unterschied betrug in der Regel etwa 1,3 Proz., beim Nickel und Eisen I stieg er auf 2—3 Proz.

Die völlige Regelmäßigkeit der Erscheinung bei allen vier Kombinationen der Achsen und Achslager deutet darauf hin, daß die soeben besprochene Verschiebung des Plattenträgers TT gegen die Achslagerebene keine reine Parallelverschiebung ist, sondern von einer Drehung begleitet wird. Wenn diese Drehung beim Belasten stets im gleichen Sinne erfolgt, so wird sie mit der Hebelarmdrehung gleichsinnig oder ungleichsinnig sein, je nachdem das eine oder andere Achslager gebraucht wird, sie kann daher durch Beobachtungen an beiden Achslagern eliminiert werden.

Alle Versuche mit beiden Achsen zu machen, hätte kaum den Aufwand an Mühe und Zeit gelohnt, da die Korrektion, deren die Beobachtung an *einer* Achse bedarf, die Hälfte der oben genannten Beträge ausmacht, also von der Größenordnung der Beobachtungsfehler ist. Ich habe mich deshalb mit einer mittleren Korrektion begnügt, welche für die an Lager 1 bzw. 2 gemessenen Verschiebungen + bzw. − 0,6 Proz. beträgt. Nur bei Eisen I und Nickel wurde sie auf $\pm$ 1,2 Proz. erhöht.

Die Winkeldrehung, die hier eliminiert werden muß, ist von der Ordnung 3.10^{-8} absolut, oder 0,006″.

§ 28. Versuchsergebnis für die harten Stäbe.

Tab. 12, Spalte 1—5 enthält das Ergebnis der Querkontraktionsmessungen für alle Stäbe, die gegenüber der angewandten Deformation als vollkommen elastisch gelten können. Für sie kann die Querkontraktion proportional der Belastung gesetzt werden. Es genügt daher, als Zahlen der Tabelle die Durchmesseränderung in $10^{-5}\,\frac{1}{2}\,\lambda/\mathrm{kg}$ ($\frac{1}{2}\,\lambda = 0{,}273\,\mu$) anzugeben. Bei Stahl, Eisen, Nickel, Konstantan, Manganin, und Platin konnte übrigens nur *ein* Ring beobachtet werden.

Die Pfeile im Tabellenkopf deuten die Richtung an, in der der Apparat an den Stab angesetzt war. Spalte 1 gibt Material, Querschnitt (Qu.) und Achslager an, auf die sich die Zahlen rechts beziehen. Querschnitt 1 und 2 liegen, wo nichts besonderes bemerkt ist, auf $^1/_3$ und $^2/_3$ der Stablänge (27 cm). Beim Platin sind die in Klammern gesetzten Zahlen die Entfernungen des Querschnittes von einem Stabende. Ferner sind in Spalte 1 noch Winkel verzeichnet, um welche die Pfeilrichtungen des Tabellenkopfes für jede Zeile gedreht zu denken sind gegen die für die erste Zeile bei jedem Stabe geltenden Richtungen.

Die Zahlen von Spalte 2—5 geben die aus den Beobachtungen an beiden Plattenpaaren nach Formel (3) berechneten $\Delta d/\pi$. Sie gelten für Zimmertemperatur (17°). Spalte 2 und 3 beziehen sich auf denselben Durchmesser, 4 und 5 auf den dazu senkrechten. Um den Einfluß der Stabbiegung nach § 26 zu eliminieren, sind in Spalte 6 und 7 die Mittel aus Spalte 2 und 3 einerseits, 4 und 5 andererseits gebildet. Spalte 8 ist wieder aus 6 und 7 gemittelt und in Spalte 9 mit der Achslagerkorrektion (§ 27) versehen.

Die Mittelbildung aus Spalte 6 und 7 bedarf für einige Stäbe. wie Gold I, Platin, Rotguß, Eisen I, der Rechtfertigung, weil hier Unterschiede (bis über 10 Proz.) in der Kontraktion aufeinander senkrechter Durchmesser auftreten (vgl. Spalte 6 und 7), die ich nur auf *Anisotropie* zurückzuführen weiß. *Die Größe der Querkontraktion wechselt mit der Richtung des Durchmessers*, und es ist von vornherein nicht zu sagen, welche Form der kreisförmige Querschnitt bei der Deformation annimmt. Es fragt sich also, wie die *mittlere* Querkontraktion zu berechnen ist.

Tabelle 12.

Durchmesseränderung in $10^{-5}\,\frac{1}{2}\lambda/\mathrm{kg}$ ($\frac{1}{2}\lambda = 0{,}273\,\mu$).

1	2 →	3 ←	4 ↑	5 ↓	6 ↔	7 ↕	8 ✛	9 $\left(\frac{\Delta d}{\pi}\right)_{\text{korr.}}$	10 $\left(\frac{\Delta d}{\pi}\right)_{\text{Mittel}}$
Al, Qu. 1, Achsl. 1	1864	1799	1866	1797	1832	1881	1832	1843	1844
∢ ?, „ 2, „ 1	1885	1828	1866	1807	1832	1886	1834	1845	
Al I, Qu. 1, Achsl. 2	1545	1850	1697	1748	1697	1722	1710	1700	1707
∢ 0, „ 2, „ 2	1655	1791	1721	1732	1723	1726	1725	1715	
„ 1			1725	1708		1716			
Al II, Qu. 1, Achsl. 1	1685	1602	1628	1643	1643	1636	1640	1650	1636
∢ ?, „ 2, „ 2	1554	1676	1698	1602	1615	1650	1632	1622	
Cu IVa, Qu. 1, Achsl. 2	1089	1097	1088	1088	1093	1085	1089	1088	1085
∢ ?, „ 2, „ 2	1092	1082	1085	1119	1087	1102	1095	1088	
Cu VI, Qu. 1, Achsl. 2	981	896	926	941	938	933	936	930	927
∢ 0, „ 2, „ 1	915	926	903	929	921	916	918	924	
Ag, Qu. 1, Achsl. 2	2047	1940	1996	1975	1993	1985	1989	1977	1981
∢ 0, „ 1, „ 1	2056	1890	1976	1941	1978	1958	1965		
∢ 0, „ 2, „ 2	2009	1996	1997	1984	2002	1990	1996	1985	
∢ 0, „ 2, „ 1	1994	1970	1987	1943	1982	1965	1978		
Au I, Qu. 1, Achsl. 2	2175	2107			2141				
∢ 0, „ 1, „ 1	2144	2110			2127				
∢ 0, „ 1, „ 1	2133	2107	2087	2093	2120	2090	2105	2104	2100
∢ 32°, „ 1, „ 1	2066	1992	2184	2122	2029	2128	2079		
∢ 45°, „ 1, „ 1	2021	1985			2008				
∢ 0, „ 3, „ 1	2088	1992	2127	2150	2013	2188	2076	2088	

Au II, Qu. 1,	Achsl. 2	2094	2092	2107	2076	2093	2091	2092	2080		
∢ 0, „ 1,	„ 1			2079	2043		2061			2089	
∢ 45°, „ 2,	„ 1	2049	2084	2062	2147	2066	2104	2085	2097		
Ni, Qu. 1,	Achsl. 1	441	433	426	434	437	430	433	438	437	
∢ 0, „ 2,	„ 1	435	438	426	431	434	429	431	436		
	„ 2			440	439		439				
Fe I, Qu. 1,	Achsl. 1	454	454	458	448	454	453	454	459		
	„ 2			467	468		467			464	
∢ ?, „ 2,	„ 2			490	497		493				
	„ 1	445	441	481	487	443	484	463	468		
Stahl, Qu. 1,	Achsl. 2	396	395	395	395	395	395	395	393	394	
∢ 45°, „ 2,	„ 2	392	399	397	399	396	398	397	395		
	„ 1			392	397		394				
Konst., Qu. 1,	Achsl. 1	452	452	454	454	452	454	453	456	457	
∢ 0, „ 2,	„ 1	455	459	452	458	457	455	456	459		
	„ 2			463	456		460				
Mang., Qu. 1,	Achsl. 2	669	670	675	680	670	677	674	670	672	
∢ 0, „ 2,	„ 2	680	675	681	677	678	679	678	674		
	„ 1			671	670		671				
Pt, Qu. 1 (7,5 cm),	Achsl. 1	668	682	693	710	675	701	688	692		
∢ 0, „ 2 (9 cm),	„ 1	674	656	695	707	665	701	683	687		
„ „ 3 (10,2 cm),	„ 1	649	649	699	714	649	707	678	682	655	
„ „ 4 (17 cm),	„ 1	628	625	654	666	626	660	648	647	(14,7 cm)	
„ „ 5 (18 cm),	„ 2	629	625	655	641	627	648	638	634		
	„ 1			654	637		645				
Pd, Qu. 1,	Achsl. 1	975	968	987	993	971	990	981	987		
	„ 2			999	1004		1002			994	
∢ 0, „ 2,	„ 2	986	1008	1014	1023	997	1019	1008	1002		
Rotgυβ, Qu. 1,	Achsl. 1	1462	1452	1291	1259	1457	1275	1366	1374	1374	
∢ 45°, „ 2,	„ 1	1355	1327	1397	1385	1341	1391	1366	1374		
	„ 2			1391	1398		1395				

Soweit der betrachtete Deformationsbereich als ***klein*** gelten darf, d. h. solange die Verrückungen lineare Funktionen der Koordinaten mit konstanten Deformationskoeffizienten sind („homogene" Deformation), ist die Volumdilatation des Bereichs durch die Divergenz der Verrückungen

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)$$

gegeben. Die Wahl des Koordinatensystems ist dabei gleichgültig. Nun stellt die Dehnung eines homogenen, isotropen Stabes in vollem Umfang eine homogene Deformation dar, man erhält deshalb die Volumdilatation als Summe der Längsdilatation (etwa $\partial \xi/\partial x$) und der doppelten Querkontraktion

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 2\frac{\partial \eta}{\partial y} = 2\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right).$$

In erster Annäherung wollen wir nun auch für die anisotropen Stäbe, wenigstens für kurze Stabelemente, die Deformation als homogen annehmen, dann ist die Volumdilatation des Stabelementes wiederum durch die Divergenz

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

gegeben, und wenn die x-Achse wieder mit der Stabachse zusammenfällt, so stellt $\partial \xi/\partial x$ die Längsdilatation, $\partial \eta/\partial y + \partial \zeta/\partial z$ die Querschnittskontraktion dar. Da die Wahl der y- und z-Achse beliebig ist, so berechnet sich also die mittlere Querkontraktion als arithmetisches Mittel der Kontraktionen irgend zweier aufeinander senkrechter Durchmesser.

Tatsächlich ergibt sich bei beliebig gewähltem Durchmesserkreuz das in Spalte 8 bzw. 9 gebildete Mittel aus den Durchmesserkontraktionen auch bei Gold I, Rotguß und Eisen I als praktisch konstant. Andererseits zeigt das Beispiel von Gold I, daß unsere Annahme homogener Deformation nur für kurze Stabelemente gültig sein kann. Denn in den nur 2 mm entfernten Querschnitten 1 und 3 haben sich die Richtungen maximaler und minimaler Kontraktion sicherlich stark gegeneinander gedreht. Also kann man die beiden Querschnitte auch nicht in einem gemeinsamen Bereich homogener Deformation liegend annehmen.

Starke Inhomogenität des Materiales zeigt bei den Querkontraktionsmessungen nur der Platinstab, dessen Querkontraktion sich längs des Stabes gleichmäßig um fast 10 Proz. ändert. Während deshalb im allgemeinen als mittlere Durchmesseränderung eines Stabes in Spalte 10 von Tab. 12 das Mittel aus den untersuchten Querschnitten genommen ist, bezieht sich die für Platin angegebene Zahl auf die Mitte der für die Dehnungsmessungen geltenden Meßlänge.

Die Zahlen von Spalte 10 der Tab. 12 ergeben nach Multiplikation mit der Lichthalbwelle ($273 \cdot 10^{-7}$ cm) und Division mit dem Stabdurchmesser d die Querkontraktionen ζ in [1/kg]. Der 10^6 fache Betrag von ζ ist in Spalte 3 von Tab. 13 angeführt, daneben in Spalte 4 die Längsdilatation ε, in Spalte 5 das Verhältnis

$$\mu_{\text{stat.}} = \frac{\zeta}{\varepsilon} = \frac{\text{Querkontraktion}}{\text{Längsdilatation}}.$$

ε ist den statischen Messungen (l. c. Tab. 7) entnommen. Nur für Aluminium I, II und Kupfer VI fehlt diese Messung und es ist ε aus $E_{\text{long.}}$ (Tab. 10) berechnet.

Tabelle 13.

	d cm	$\zeta \cdot 10^6$ 1/kg	$\varepsilon \cdot 10^6$ 1/kg	$\mu_{\text{stat.}}$
Aluminium . . .	1,207	0,417	1,216	0,343
Aluminium I . .	1,299	0,359	1,059	0,339
Aluminium II . .	1,300	0,344	1,029	0,334
Kupfer IVa . . .	1,196	0,248	0,712	0,348
Kupfer VI . . .	1,300	0,195	0,578	0,337
Silber	1,109	0,488	1,286	0,379
Gold I	1,208	0,475	1,121	0,423
Gold II	1,154	0,494	1,176	0,420
Nickel	1,605	0,0743	0,2407	0,309
Eisen I	1,801	0,0974	0,347	0,280
Stahl	1,595	0,0674	0,2347	0,287
Konstantan . . .	1,997	0,0625	0,1924	0,325
Manganin . . .	1,806	0,1016	0,309	0,329
Palladium . . .	1,610	0,1685	0,428	0,393
Platin II	1,617	0,1116	0,286	0,387
Rotguß	1,468	0,256	0,714	0,358

§ 29. Versuchsergebnis für die weichen Stäbe aus Kadmium, Zinn, Blei, Wismut.

Für die weichen Stäbe konnte derselbe Apparat benutzt werden. Nur wurde eine schwächere Feder F eingesetzt, um eine merkliche Eindrückung der Kuppen in den Stab zu vermeiden. Bei der Beobachtung der Interferenzringe entstanden wieder wie früher (§ 15) Schwierigkeiten aus den Erscheinungen der dauernden Deformation und elastischen Nachwirkung. Ich möchte bemerken, daß ich den Unterschied beider damals nicht genügend hervorgehoben habe. Um den Einfluß der dauernden Deformation zu eliminieren, wurde nicht nur wie früher die gleiche Belastung mehrmals hintereinander wiederholt, wie das überhaupt stets geschah, sondern auch die Verschiebung lediglich bei Entlastung beobachtet.

Das Resultat der Querkontraktionsmessungen ist in Tab. 14 vereinigt. Unter π steht die Belastungsstufe, gerechnet von der Ausgangsbelastung an, unter $\Delta d/\pi$ die zugehörige Durchmesseränderung, wie sie aus den vier für einen Querschnitt nötigen Beobachtungsreihen graphisch gemittelt ist. Die Anisotropie ist hier also bereits eliminiert (§ 28). Sie zeigt sich bei allen vier Stäben, beträgt im Maximum bei Zinn etwa 11 Proz., während sie in Querschnitt 2 des Bleistabes für die gewählten Richtungen unmerklich ist. Man erkennt, daß überall die $\Delta d/\pi$ mit zunehmender Belastung ansteigen, ebenso wie es bei den Dehnungsmessungen für die damals mit δ bezeichneten Größen $\Delta L/\pi$ gefunden wurde. In § 15 ließ ich es ungewiß, ob diese Abweichungen von der Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung als reell anzusehen seien. Inzwischen haben aber Hr. Heuse und ich Dehnungsversuche an weichen Drähten angestellt, die es uns wahrscheinlich machen, daß weiches Material, gleichgültig von welcher Deformation man ausgeht, gegen kleine elastische Deformationen sich viel weniger nachgiebig zeigt, als gegen größere, ein Verhalten, welches dem des Gußeisens nach den Beobachtungen von Berliner[1]) ähnlich zu sein scheint. Diese Auffassung wird auch dadurch bestätigt, daß sich für die vier weichen Stäbe aus der Transversalschwingungsmethode durchweg ein etwas größeres E ergab, als aus der statischen (vgl. Tab. 8).

1) S. Berliner, Ann. d. Phys. 20. p. 527. 1906.

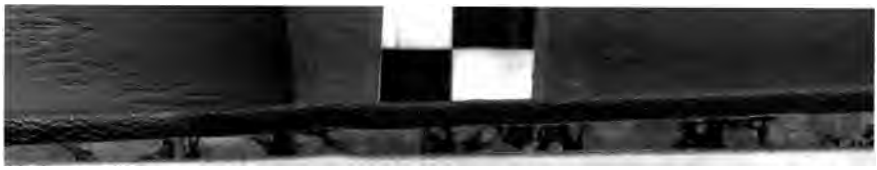


Tabelle 14.

Kadmium.

$d = 1{,}798$ cm; $L = 16{,}30$ cm.

π kg	$\Delta d/\pi$ $\frac{1}{2}\lambda$/kg	$\Delta L/\pi$ $\frac{1}{2}\lambda$/kg	μ
5	0,0149	0,462	0,293
10	153	467	297
15	155	—	—

Zinn.

$d = 1{,}802$ cm; $L = 16{,}30$ cm.

π kg	$\Delta d/\pi$ $\frac{1}{2}\lambda$/kg	$\Delta L/\pi$ $\frac{1}{2}\lambda$/kg	μ
6	0,0158	0,426	0,335
12	159	429	335

Blei.

$d = 1{,}802$ cm; $L = 16{,}30$ cm.

π kg	$\Delta d/\pi$ $\frac{1}{2}\lambda$/kg		$\Delta L/\pi$ $\frac{1}{2}\lambda$/kg	μ
	Qu. 1	Qu. 2		
1,5	0,0662	0,0727	1,409	$0{,}44_6$
3,0	675	736	1,421	$0{,}44_9$
4,5	682	743	—	—

Wismut.

$d = 1{,}796$ cm; $L = 16{,}33$ cm.

π kg	$\Delta d/\pi$ $\frac{1}{2}\lambda$/kg	$\Delta L/\pi$ $\frac{1}{2}\lambda$/kg	μ
4	0,0261	0,724	$0{,}32_3$
8	264	728	32_9
12	266	732	33_0
16	268	—	—

Ich nehme also den beobachteten Gang der Zahlen $\Delta d/\pi$ und $\Delta L/\pi$ als reell an und teile deshalb die früher nur für Blei (Tabb. 5a und 6a) gegebenen Zahlen $\Delta L/\pi$ nachträglich auch für die anderen Stäbe mit. Sie sind in Spalte 3 auf die Belastungsstufen π reduziert. Die Ausgangsbelastung, die wie gesagt bei weichem Material für das Anwachsen der Deformation mit der Spannung von geringer Bedeutung zu sein scheint, betrug bei der Dehnung 5 kg; bei der Querkontraktion für Blei und Kadmium 5 kg, für Wismut und Zinn 2 kg. In der letzten Spalte ist das Verhältnis

$$\mu = \frac{\Delta d}{d} : \frac{\Delta L}{L}$$

gebildet. Es bleibt eine vielleicht nur scheinbare Tendenz des μ, mit der Belastung zu wachsen. Hinsichtlich der absoluten Werte μ ist zu sagen, daß sie mit größerer Unsicherheit behaftet sein werden, als bei den festen Stäben. Beim Blei deutet der große Unterschied in beiden Querschnitten auf Inhomogenität des Materials. In Anbetracht der geringen Zahl untersuchter Querschnitte können die gefundenen μ nur als Näherungswerte gelten.

7. Besprechung des Zahlenmateriales.

§ 30. Zusammenstellung der Beobachtungen.

In Tab. 15 sind nochmals die wichtigsten Beobachtungsergebnisse vereinigt, um daraus noch einige interessante Folgerungen zu ziehen. Insbesondere ist die Berechnung des *Kompressionsmoduls* H und seines reziproken Wertes, der *kubischen Kompressibilität* $\varkappa$ gegeben. Die Tabelle enthält also den Elastizitätsmodul $E_{\text{stat.}}$ [kg/mm²], nur für Aluminium I, II, Kupfer V, VI den Modul $E_{\text{long.}}$; ferner die Zahl $\mu_{\text{stat.}}$ aus Tabb. 13 und 14, die Zahl $\mu_{\text{tors.}}$ aus Tab. 10, den aus statischen Dehnungs- und Querkontraktionsmessungen berechneten Schub- oder Scheerungsmodul $K = \frac{E_{\text{stat.}}}{2(1+\mu_{\text{stat.}})}$ und den Torsionsmodul T aus Tab. 10, welcher für homogenes, isotropes Material mit K identisch sein müßte; endlich den Kompressionsmodul H [kg/mm²] und die kubische Kompressibilität $\varkappa$ in [cm²/kg], also nahezu im technisch üblichen Maße [1/Atm]. Im absoluten [C.G.S.] Maße erhält man $\varkappa$ durch Division mit $0{,}98 \cdot 10^6$.

Tabelle 15.

1	2	3	4	5	6	7	8
Gezogene Stäbe	E kg/mm²	$\mu_{stat.}$	$\mu_{tors.} = \frac{E}{2T} - 1$	K kg/mm²	T kg/mm²	H kg/mm²	$\varkappa \cdot 10^6$ cm²/kg
Aluminium	7190	0,343		2680		7600	1,31
Aluminium I	7120	339	0,310	2660	2717	7400	1,36
Aluminium II	7320	334	337	2740	2737	7400	1,36
Kupfer IVa	12500	348	356	4640	4640	13700	0,78
Kupfer V	13110		391		4710		
Kupfer VI	13040	337	399	4880	4660	13400	0,75
Silber	8050	379	369	2920	2940	11100	0,90
Gold I	7780	423	495	2780	2602	16800	0,59
Gold II	8120	420	435	2860	2822	16900	0,59
Nickel	20540	309		7850		17900	0,56
Eisen I	21680	280		8470		16400	0,61
Stahl	21320	287	287	8280	8280	16700	0,60
Konstantan	16590	325	329	6260	6230	15800	0,63
Manganin	12640	329	329	4760	4740	12300	0,81
Gegossene Stäbe							
Kadmium	5090	0,30		1960		4200	2,4
Zinn	5540	33		2080		5400	1,9
Blei	1656	44s		573		5100	2,0
Wismut	3250	33		1220		3200	3,1
Palladium	11480	393	0,101	4120	5210	17900	0,56
Platin II	17080	387	368	6160	6220	25200	0,40
Rotguß (Bronze)	8240	358	177	3030	3500	9700	1,03

§ 31. Das Verhältnis μ.

Wir wenden uns zunächst zu einem Vergleich der Spalten 3 und 4. Beide sollten identische Zahlen ergeben und sie tun dies in der Tat für einige Stäbe hinreichend genau: Aluminium II, Stahl, Konstantan, Manganin. Auch bei Kupfer IV, Silber, Gold II ist der Unterschied nicht groß. Bei den übrigen Stäben kann aber von einer Übereinstimmung innerhalb der Versuchsfehlergrenze nicht mehr die Rede sein. Die

Torsionsmethode liefert Zahlen für μ, welche schon an und für sich höchst unwahrscheinlich sind, so für Gold I $\mu = 0{,}495$, für Palladium 0,101, für Rotguß 0,177. Hält man dies Ergebnis zusammen mit der für Gold I und Rotguß sicher nachgewiesenen Anisotropie innerhalb eines Stabquerschnittes, so kann man kaum zweifeln, daß die Anisotropie des Materiales die Hauptursache für die schlechte Übereinstimmung zwischen $\mu_{stat.}$ und $\mu_{tors.}$ bildet. Dann aber wird man auch $\mu_{stat.}$ für den viel zuverlässigeren Wert halten müssen, da die Berechnung von $\mu_{tors.}$ gegen Änderungen in E und T, die durch Anisotropie usw. hervorgerufen sein könnten, sehr empfindlich ist. Es erklären sich daraus viele widersprechende Resultate anderer Beobachter, die μ aus E und T bestimmt haben.

Dagegen lehrt Spalte 3, daß die Querkontraktionsmessung wahrscheinlich viel konstantere Zahlen μ für verschiedene Proben gleichen Materiales liefert, als man bisher anzunehmen geneigt war. Man vergleiche die drei Aluminiumstäbe, die beiden Kupferstäbe, die beiden Goldstäbe, jeder vom anderen sich nur durch geringe Mengen fremder Stoffe unterscheidend (vgl. Tab. 8 und p. 828), schließlich auch Eisen und Stahl. So ist auch die Übereinstimmung verschiedener Beobachter nicht

Tabelle 16.

	μ für Stäbe					Drähte	
	Ba.[1])	A.[2])	Str.[3])	M.[4])	Gr.	Be.[5])	Ca.[6]
Aluminium					0,34		0,36
Kupfer		0,33	0,33	0,31—0,34	0,34—0,35	0,34	0,37
Nickel					0,31	0,27—0,37	
Eisen (Schmiede-)	0,26—0,31		0,28—0,30	0,27—0,29	0,28	0,28—0,29	0,32
Stahl	0,29	0,27	0,27—0,30	0,27—0,28	0,29	0,28	
Blei		0,43			0,45		

1) J. Bauschinger, Der Zivilingenieur 25. p. 81. 1879.
2) E. H. Amagat, C. R. 107. p. 618. 1888; 108. p. 1199. 1889; Ann. chim. et phys. 22. p. 119. 1891.
3) C. E. Stromeyer (u. Kennedy), l. c.
4) J. Morrow, l. c.
5) J. R. Benton, l. c.
6) P. Cardani, Phys. Zeitschr. 4. p. 449. 1903.

ungünstig, wenn man sich auf die durch Querkontraktions- oder ähnliche Messungen gefundenen Zahlen beschränkt. In Tab. 16 habe ich alles mir bekannte Material zusammengestellt.

Danach ist man berechtigt, die durch Querkontraktionsmessung festgestellten μ soweit als Materialkonstanten zu betrachten, als dies bei elastischen Größen überhaupt zulässig ist, und an die gefundene Reihenfolge der Zahlen einige Schlüsse anzuknüpfen.

Amagat glaubte annehmen zu können, daß μ für die festen Metalle zwischen den Grenzen 0,5 und 0,25 liege und zwar um so größer sei, je näher das Metall dem flüssigen Zustande stehe. Danach wäre also ein Zusammenhang mit der Härte und vielleicht auch mit dem Schmelzpunkt zu erwarten. Davon ist jedoch nichts zu bemerken, höchstens wird man vielleicht sagen dürfen, daß die größte Härte stets mit kleinem μ verbunden ist. Ob ferner $\mu = \frac{1}{4}$ wirklich eine untere Grenze für die reinen Metalle darstellt, müssen weitere Versuche lehren. Zweifellos gibt es ja „feste" Gebilde, wie Kork, deren μ unter $\frac{1}{4}$ liegt, und nach Versuchen von Bauschinger, Stromeyer, Morrow scheint auch Gußeisen dazu zu gehören. Aber Gußeisen kann wegen des eingesprengten Graphits kaum als kontinuierlicher fester Körper angesehen werden. Ebensowenig, wie Härte und Schmelzpunkt, zeigen andere auf den Kohäsionskräften der Atome beruhende physikalische Eigenschaften einen Zusammenhang mit μ. Dagegen erhält man nahezu die gleiche Reihenfolge der Metalle, wenn man sie einmal nach der Größe von μ, das andere Mal nach der Größe des Ausdrucks $\alpha E/c_p s$ ordnet, welcher der Temperaturänderung bei adiabatischer Dilatation des Stabes proportional ist und in Tab. 9 berechnet wurde. Die Reihenfolge ist in beiden Fällen die folgende:

	Pb	Au	Pd	Pt	Ag	Cu	Al	Sn	Ni	Cd	Fe		
$\mu =$	0,45	42	40	39	38	35	34	33	31	30	28		
	Pb	**Au**	**Pd**	**Pt**	**Cu**	**Ag**	**Al**	**Ni**	**Fe**	**Sn**	**Cd**	**Rh**	**Ir**
$\frac{\alpha E}{c_p s} =$	0,30	44	46	58	57	60	62	68	66	72	72	77	1,14

In diesen Reihen ist Wismut fortgelassen, da es eine vollkommene Ausnahmestellung einnimmt. Ferner stehen die drei

Metalle mit kleinstem Atomvolumen Cu, Ni, Fe in der μ-Reihe weiter nach rechts verschoben, als man nach den Werten $\alpha E/c_p s$ erwarten würde. Im übrigen ist aber die Beziehung so deutlich, daß ich glaube, für die nicht untersuchten, härtesten Metalle Rh und Ir ein kleines μ voraussagen zu können.

§ 82. Die kubische Kompressibilität.

In der letzten Spalte von Tab. 15 sind die nach der Formel

$$\varkappa = \frac{3(1-2\mu)}{E}$$

berechneten Kompressibilitäten angeführt. Die Art der Berechnung zeigt, daß ein ziemlich großer prozentischer Fehler zugelassen werden muß, besonders wenn μ, wie bei den weichen Metallen Sn, Cd, Pb, Bi ungenau bestimmt ist oder auch nur sehr große Werte besitzt, wie bei Pb und Au. Bei Pb z. B. bringt 1 Proz. Änderung in μ 8 Proz. Änderung in $\varkappa$ hervor. Sehr viel günstiger liegen die Verhältnisse beim Fe, wo die Fehler in $\varkappa$ nicht viel größer als die in μ sind.

Tabelle 17.

Kub. Kompressibilität $\varkappa \times 10^{12}$ [C.G.S.] bei 18°.

	Amagat	Buchanan	Richards	Grüneisen
Aluminium		1,70	1,30 (1,50)	1,36
Kupfer	0,88	0,88	0,54 (0,74)	0,74
Silber			0,84 (1,04)	0,92
Gold		0,80	0,47 (0,67)	0,60
Nickel			0,27 (0,47)	0,57
Eisen u. Stahl	0,69		0,40 (0,60)	0,62
Palladium			0,38 (0,58)	0,57
Platin		0,56	0,21 (0,41)	0,40
Kadmium			1,9 (2,1)	2,4
Zinn			1,7 (1,9)	1,9
Blei	2,8		2,2 (2,4)	2,6
Wismut			2,8 (3,0)	3,2

Dies ist zu beachten, wenn man die hier erhaltenen Zahlen mit denen anderer Beobachter vergleicht, welche die Kompressibilität auf direkterem Wege gemessen haben. Man findet das Zahlenmaterial in Tab. 17 vereinigt, alle Zahlen sind im [C.G.S.]-

System ausgedrückt. Amagat[1]) bestimmte die Volumänderung einer Röhre bei einseitigem Zuge, Buchanan[2]) die Längenänderung eines Drahtes bei allseitigem Druck, Richards[3]) die *Differenz* der Kompressibilität zwischen Metall und Quecksilber; auf absolute Werte führte er seine Zahlen zurück durch zwei Kompressibilitätsmessungen an Eisen und Kupfer. Gegen diese letzterwähnten absoluten Messungen von Richards sind jedoch Bedenken zu erheben. Es soll die Längenänderung bei allseitigem Druck gemessen werden. Dazu wird das zu untersuchende Material in Stangenform auf den Boden eines vertikalen Stahlrohres gelagert und hohem Druck ausgesetzt. Es wird nun lediglich die gegenseitige Verschiebung der oberen Enden von Stange und Rohr gemessen und als lineare Verkürzung der Stange in Rechnung gesetzt. Die von der Theorie geforderte nicht unbeträchtliche *Verkürzung* des Stahlrohres durch den Innendruck[4]) bleibt unberücksichtigt. Dadurch hat Richards meines Erachtens zu kleine Kompressibilitätswerte erhalten, und *alle* seine Zahlen bedürfen der gleichen additiven Korrektion. Nach dem Vergleich mit den von mir bestimmten Kompressibilitätswerten würde ich eine Korrektion von etwa + 0,20 an den Richardsschen Zahlen für notwendig halten.[5]) Bringt man diese an, so erhält man die geklammerten Zahlen, welche mit den meinigen in Anbetracht der schwierigen Messungen befriedigend übereinstimmen. Für die im Vergleich mit den meinigen auffallend hohen Kompressibilitätswerte bei Amagat und Buchanan weiß ich keine Erklärung zu geben.

Es sei mir hier noch gestattet, die Elastizitätstheorie und ihre Anwendung bei Berechnung der Kompressibilität gegenüber der ungünstigen Kritik des Hrn. Richards[6]) in Schutz

---

1) E. H. Amagat, l. c.

2) J. Y. Buchanan, Proc. Roy. Soc. London. 73. p. 296. 1904.

3) Th. W. Richards, Zeitschr. f. physik. Chem. 61. p. 77. 171. 183. 1907.

4) Vgl. Sacerdote, Journ. de phys. (3) 8. p. 209. 1899.

5) Die erwähnte Fehlerquelle rechtfertigt nach meiner Berechnung nur eine Korrektion von + 0,10, doch ist wohl zweifelhaft, ob die Deformation des Stahlrohres der Theorie völlig entsprochen hat. Sehr erwünscht wäre eine Wiederholung der absoluten Messungen seitens des Hrn. Richards.

6) l. c. p. 179.

zu nehmen. Diese ist meiner Meinung nach nur dann berechtigt, wenn sie die Benutzung des Torsionsmoduls zur Kompressibilitätsbestimmung verwirft. Und auch hier trifft der Vorwurf nicht die Theorie, sondern die Beschaffenheit des Materiales. Wenn man die Kompressibilität aus Versuchen berechnet, bei denen wirklich eine *Volumänderung* erzeugt und gemessen ist, so wird, wie ich glaube, die Theorie nicht versagen.

Übrigens unterliegt auch die Kompressibilitätsmessung von Richards und Buchanan der theoretischen Annahme, daß die Längsdilatation bei allseitigem Druck $^1/_3$ der Volumdilatation sei, was streng genommen auch nur für *isotropes* Material vorausgesetzt werden kann, wie Hr. Richards selbst hervorhebt.

Von den Beziehungen der Kompressibilität zu anderen physikalischen Konstanten soll in einem folgenden Aufsatz die Rede sein. Hier möchte ich nur noch darauf hinweisen, daß der Einfluß von Fremdkörpern auf die Kompressibilität des reinen Metalls sehr gering ist, soweit wenigstens die vorliegenden Versuche in Betracht kommen. Stahl und Eisen zeigen gleiche Kompressibilität. Für die Nickel–Kupferlegierung „Konstantan" und die Mangan–Nickel–Kupferlegierung „Manganin" scheint die Kompressibilität der Mischungsregel zu entsprechen.[1]) Das von Angenheister[2]) für Silber–Kupferlegierungen aufgefundene Minimum der Kompressibilität zeigt sich bei jenen Legierungen also nicht, oder wenigstens nicht in so ausgeprägter Weise. Vgl. auch § 20.

Zusammenfassung.

Für 20 Metallstäbe ist die Querkontraktion bei schwachen Dehnungen mit einem Interferenzapparat gemessen worden, der noch Längenänderungen von 2×10^{-5} mm auf etwa ± 1 Proz. zu beobachten gestattet.

Das Verhältnis μ der Querkontraktion zur früher gemessenen Längsdilatation schwankt für die untersuchten Metalle zwischen $^1/_4$ und $^1/_2$.

---

1) Vgl. auch A. Lessing, Inaug.-Diss. Berlin 1900.
2) G. Angenheister, Ann. d. Phys. 11. p. 188. 1903.

Mittels der Querkontraktionsmessung wurde bei einigen Stäben starke Anisotropie, zum Teil auch Inhomogenität festgestellt, und zwar sowohl bei gezogenen, wie bei nicht gezogenen Stäben.

Im Falle anisotropen Materials führt die Berechnung von μ aus Elastizitäts- und Torsionsmodul zu unzuverlässigen Zahlen.

Die direkt gemessene Zahl μ kann mit der Beschränkung, die für alle elastischen Eigenschaften gilt, als Materialkonstante betrachtet werden.

Ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen μ und den auf Kohäsionskräften beruhenden Eigenschaften, z. B. Härte oder Schmelzpunkt, besteht nicht. Dagegen zeigt sich μ in der Regel um so größer, je kleiner die bei einseitiger adiabatischer Dehnung eintretende Temperaturänderung des Materiales ist.

Aus Dehnung und Querkontraktion der Stäbe wurde die Volumänderung und damit die kubische Kompressibilität berechnet. Sie ist von kleinen Mengen fremder Stoffe im reinen Metall wenig abhängig. Für Legierungen von Kupfer mit Nickel und Mangan berechnet sich die Kompressibilität annähernd nach der Mischungsregel.

(Eingegangen 2. März 1908.)

2. *Zur Geschichte der flüssigen Kristalle;* *von O. Lehmann.*

In einer soeben erschienenen Schrift[1]), welche durch ihren reichen Inhalt an neuem Beobachtungsmaterial einen äußerst wertvollen Zuwachs der Literatur über flüssige Kristalle nach *chemischer* Richtung hin bildet, ist von der Entstehung dieses Begriffes ein so wenig zutreffendes Bild entworfen, daß ich mich genötigt sehe, um nicht in den Verdacht zu kommen, ich hätte lediglich (wie auch mehrfach in anderen Schriften behauptet wird[2]) einer von Hrn. Friedr. Reinitzer, Prof. am botanischen Institut der techn. Hochschule in Graz, im Jahre 1888 entdeckten Erscheinung einen anderen Namen gegeben, etwas ausführlicher als bisher darzulegen, wie sich die Kenntnis der Existenz kristallinischer Flüssigkeiten entwickelt hat.

Stoffe, welche in einer fließend-kristallinischen Modifikation auftreten, waren schon lange bekannt, ehe ich mich durch langjährige Studien über Kristallbildung, zusammengestellt in meinem Buche Molekularphysik (1888—89), zu dem Schlusse gedrängt sah[3]), ein Kristall müsse nicht notwendig fest sein, wie man bis in die neueste Zeit annahm, es könne vielmehr auch flüssige Kristalle geben.[4]) Einer dieser Stoffe, die *Schmierseife*, war sogar im Haushalt im täglichen Gebrauch; dennoch kam niemand auf den Gedanken, er möchte ein Aggregat fließend weicher Kristalle sein! Dazu konnte eben einzig eine lange Reihe von Erfahrungen leiten, die sich nur gewinnen lassen mittels des *Kristallisationsmikroskops*, dessen einfachste Form

1) D. Vorländer, Kristallinisch-flüssige Substanzen. Stuttgart, Enke 1908.

2) Vgl. die Zusammenstellung in O. Lehmann, Flüssige Kristalle. Leipzig, W. Engelmann 1904, p. 1 Anm. 6 und p. 25 Anm. 1.

3) Es handelt sich keineswegs, wie Hr. Vorländer annimmt, um einen plötzlichen Einfall.

4) Beispiele sind: Verbindungen der Ölsäure, des Cholesterins, Lecithin, Jodsilber, vielleicht auch teigige Farbstoffe, vgl. v. Seherr Thoss, Wied. Ann. 6. p. 270. 1879.

ich im Jahre 1872 konstruierte.[1]) Der durch mehr als zwanzig Jahre fortgesetzten Arbeit mit diesem Instrument ist die Aufdeckung der Existenz der flüssigen Kristalle zu verdanken, nicht einer gelegentlichen Beobachtung des Hrn. Reinitzer über Farbenerscheinungen und Aggregatpolarisation bei trüben Schmelzen.

Entgegen der allgemein verbreiteten Vorstellung, ein Kristall sei notwendig ein spröder Körper, welcher sich nicht biegen oder sonst dauernd deformieren lasse, weil hierdurch das Raumgitter der Moleküle, in welchem sein Wesen beruht, zerstört würde, beobachtete ich zunächst in Menge Kristalle, welche sich dauernd verbiegen lassen *ohne Beeinträchtigung ihrer Durchsichtigkeit* (z. B. Ammoniumnitrat[2]), oder welche sich beim Wachstum selbst biegen.[3]) Von diesen *weichen bildsamen* zu den *fließenden* Kristallen war nur ein kleiner Schritt. Den Anlaß zu deren Auffindung gab die Entdeckung der *Umwandlungstemperaturen* des Ammoniumnitrats[4]), welche so große Ähnlichkeit mit dem Schmelzpunkt zeigten, daß ich zur Vermutung kam, auch dieser sei nichts anderes als eine solche Umwandlungstemperatur, es sei nur die eine der beiden enantiotropen Modifikationen flüssig statt fest. Demgemäß suchte ich festzustellen, ob nicht auch eine flüssige Modifikation bei bestimmter Umwandlungstemperatur in eine andere flüssige übergehen könne. Ein (nicht ganz klarer) Fall dieser Art, die Umwandlung des leichtflüssigen in den zähflüssigen Schwefel war schon lange bekannt[5]), ein anderer schien von Rodwell[6])

1) Vgl. O. Lehmann, Zeitschr. f. Kristallogr. 1. Taf. V, Fig. 1. 1877; Molekularphysik 1. p. 119. 1888; Wied. Ann. 18. p. 507. 1881; Zeitschr. f. Instrumentenk. 4. p. 369. 1884; 6. p. 325. 1886; 10. p. 202. 1890; Kristallanalyse, Leipzig 1891, p. 4; Flüssige Kristalle, Leipzig 1904, p. 27; Die scheinbar lebenden Kristalle, Esslingen 1907 (Inserate der Firmen Voigt u. Hochgesang in Göttingen und Carl Zeiss in Jena).

2) O. Lehmann, Zeitschr. f. Kristallogr. 1. p. 110. 1877.

3) l. c. p. 479 u. ff.

4) O. Lehmann, Zeitschr. f. Kristallogr. 1. p. 97. 1877; Ann. d. Phys. 21. p. 181. 1906.

5) Vgl. L. Frankenheim, Journ. f. prakt. Chem. 16. p. 7. 1839; Ch. Deville, l. c.; M. Berthelot, Pogg. Ann. 100. p. 630. 1857; Compt. rend. 80. p. 515. 1875; K. Schaum, Lieb. Ann. 308. p. 18. 1899; Fr. Hoffmann u. R. Rothe, Zeitschr. physik. Chem. 55. p. 113. 1906.

6) Rodwell, Chem. News 30. p. 288; 31. p. 4. 1874.

gefunden zu sein, welcher berichtete, daß geschmolzenes Jodsilber unter ca. 450° in eine *zähflüssige amorphe* Modifikation[1]) übergehe, die erst bei 116° *kristallinisch* erstarre. Anfänglich glaubte ich dies bestätigen zu können, doch stellte sich bald heraus (bei geeigneter Verbesserung des Kristallisationsmikroskops), daß die zähflüssige Modifikation keineswegs amorph, sondern kristallinisch war.[2]) Durch Zusatz von Chlorsilber oder Jodzink als Lösungsmittel gelang mir, die einzelnen Kristallindividuen zu isolieren[3]) und beim Durchleiten eines elektrischen Stromes glaubte ich sogar solche beobachtet zu haben, *die fließen können wie zähes Öl*, was sich freilich später als eine durch Ionenwanderung bedingte Täuschung ergab.[4]) Hätte ich mich dem allgemeinen Gebrauche angeschlossen, daß ein Körper als flüssig zu bezeichnen ist, wenn er unter dem Einfluß seines eigenen Gewichtes fließt[5]), so hätte ich notwendig die neu entdeckten Kristalle als „*flüssige*" bezeichnen müssen. Mit Rücksicht auf die herkömmliche Vorstellung, daß ein Kristall notwendig fest sein müsse, daß die *selbständige polyedrische Form* unverträglich sei mit dem Flüssigkeitszustand (nach dessen Definition), tat ich es nicht.

Zu Unrecht sagt aber Vorländer (l. c. p. 2): „Lehmann war damals noch weit entfernt von der Annahme eines *kristallinisch-flüssigen* Zustandes; hierzu wurde er später durch eine Entdeckung von F. Reinitzer geführt. F. Reinitzer fand im Jahre 1888 am Benzoylcholesterin einen merkwürdigen *doppelten Schmelzpunkt*[6])."

1) Er nennt sie „plastic, tenacious amorphous substance possessing a reddish colour and transparent to light".

2) O. Lehmann, Zeitschr. f. Kristallogr. 1. p. 120. 1877 und l. c. p. 492 Anm. Überhitzung der festen Modifikation über die Umwandlungstemperatur (116°) ist wie bei einem wirklichen Schmelzpunkt unmöglich.

3) O. Lehmann, Wied. Ann. 24. Taf. I, Fig. 27. 1885; 38. p. 400. Anm. 2. 1889.

4) O. Lehmann, Wied. Ann. 24. p. 27. 1885. Taf. I, Figg. 68 u. 69; 38. Taf. IV, Figg. 7 u. 8. 1889; Flüssige Kristalle p. 173 u. p. 260. Vgl. dagegen J. Koenigsberger, Jahrb. der Radioakt. u. Elektr. 4. p. 192. 1908, welcher als ungewiß betrachtet, ob die Leitung elektrolytisch sei.

5) Vgl. G. Tammann, Wied. Ann. 62. p. 284. 1897.

6) Einer freundlichen Mitteilung des Hrn. Fr. Reinitzer vom 6. März 1908 entnehme ich, daß anscheinend (was ihm früher entgangen war) die Erscheinung zuerst beobachtet wurde an *Tristearin* von Heintz

Daß sich beim Schmelzen und Erstarren von Cholesterinverbindungen merkwürdige Erscheinungen, insbesondere auffällige Farben, zeigen, war schon früher bekannt.[1]) Man dachte sie wohl verursacht durch Verunreinigungen. Reinitzer[2]), den die pflanzenphysiologische Funktion des Cholesterins interessierte, bemühte sich, dasselbe rein darzustellen und die genaue chemische Zusammensetzung zu ermitteln. Es gelang ihm, klar durchsichtige Kristalle des Benzoats und Acetats zu erhalten, welche auf seine Veranlassung von dem Mineralogen v. Zepharovich[3]) gemessen wurden, und festzustellen, daß die trübe Schmelze bei einem bestimmten Temperaturpunkt klar flüssig wird und zwischen gekreuzten Nicols Aggregatpolarisation zeigt, ähnlich wie ein Brei aus kleinen Kriställchen und Flüssigkeit. Solche Aggregatpolarisation war damals keines-

---

(Jahresber. üb. d. Fortschr. d. Chem. p. 342. 1849 und p. 447. 1854 und von Duffy, l. c. p. 507. 1852, nach einer Notiz in Kreis und Hafner in der Zeitschr. f. Unters. d. Nahrungs- u. Genußmittel 7. p 641. 1904, welche auch noch andere ältere und neuere Beobachtungen erwähnt und das Tristearin als identisch mit Palmitodistearin betrachtet). Angeblich haben alle gemischten Fettsäureglykoside doppelten Schmelzpunkt. Mir waren diese Schmelzpunktsanomalien (vgl. auch W. Heintz, Pogg. Ann. 93. p. 448. 1854; H. Kopp, Lieb. Ann. 93. p. 193. 1855; Wüllner, Lehrb. d. Experimentalphysik, 5. Aufl. 2. p. 652. 1896) im Jahre 1888 wohl bekannt (vgl. O. Lehmann, Molekularphysik 1. p. 196, 750. 1888), sie haben mich aber ebensowenig wie die Reinitzerschen Beobachtungen zur Auffindung der flüssigen Kristalle geführt. „Doppelten Schmelzpunkt" zeigen übrigens alle Stoffe mit monotropen Modifikationen, auch einige enantiotrope wie Schwefel. Diese Ausdrucksweise ist deshalb irreführend; auch ist sie unpassend, weil eine Schmelze nicht schmelzen kann. Allgemein gebräuchlich ist „Klärungspunkt", doch trifft auch diese Bezeichnung nicht zu für Jodsilber, dessen fließend-kristallinische Modifikation, weil regulär (isotrop), klar durchsichtig ist.

1) Vgl. M. Berthelot, Ann. chim. phys. (3) 56. p. 54. 1859; Planer, Lieb. Ann. 118. p. 25. 1861; Löbisch, Ber. d. d. chem. Ges. 5. p. 518. 1872; Raymann, Bull. soc. min. 47. p. 898. 1887. Wenn diese die Erscheinungen nur unvollkommen beobachteten, so lag der Grund anscheinend daran, daß ihre Präparate nicht hinreichend rein waren, während Reinitzer besonders reines Cholesterin von der chemischen Fabrik H. Trommsdorff in Erfurt erhalten hatte.

2) Fr. Reinitzer, Wiener Sitzungsber. 97. (1) p. 167. 1888.

3) Mit diesem stand ich aus anderem Anlaß in Beziehung, vgl. Molekularphysik 1. p. 865. 1888.

wegs etwas Neues, man kannte sie z. B. bei Fetten, Seifen und ähnlichen ganz oder halb kristallinischen Massen.[1])

Nimmt man an, Reinitzers Kristalle seien wirklich chemisch rein, nicht etwa Mischkristalle gewesen, so folgt doch nicht ohne weiteres, daß die trübe Schmelze *eine Phase* war, wie Vorländer berichtet, sie konnte z. B. ähnlich wie Schmierseife ein Gemisch verschiedener physikalisch isomerer Modifikationen oder von Molekülverbindungen sein, die sich auf chemischem Wege nicht erkennen lassen. Tatsächlich hielten sowohl Reinitzer wie ich die trübe Schmelze anfänglich für ein *Gemisch mehrerer Phasen.*[2]) Reinitzer schreibt (l. c. p. 176), er sei auf die Vermutung gekommen, hier liege physikalische Isomerie vor, weshalb er die Präparate an mich zur näheren Untersuchung gesandt habe; von mir sei auch tatsächlich Trimorphismus konstatiert worden, doch fehle noch die Erklärung für das Auftreten der Farbenerscheinung[3]): „Nur soviel steht fest, daß dieselbe mit der Ausscheidung und dem Wiederauflösen einer bis jetzt noch völlig rätselhaften Substanz in innigem Zusammenhang steht. Ob diese Substanz durch eine physikalische oder chemische Veränderung entsteht oder verschwindet, war bisher unmöglich zu entscheiden." Seinen eigenen Wahrnehmungen zufolge, wird die Trübung der erkaltenden Schmelze verursacht durch Sphärokristalle, welche „vom Umfang her abschmelzen (während der Abkühlung!) und als *feste Körper* in einer Flüssigkeit schwimmen".

Ähnlich lautete der von mir veröffentlichte Bericht[4]), in welchem z. B. steht (l. c. p. 589): „Bei Beobachtung im

1) Vgl. A. Kundt, Pogg. Ann. 128. p. 410. 1864. Bei Aggregaten anisotroper *Moleküle* tritt aber, wie meine Ansicht über Homöotropie bei Gallerten (Doppelbrechung durch Druck) voraussetzt, keine Depolarisation ein. Entgegengesetzter Ansicht ist V. v. Ebner, Wiener Sitzungsber. 98. (II a) p. 1283. 1889. Die Farbenerscheinungen bei Cholesterylbenzoat usw. (vgl. Physik. Zeitschr. 7. p. 578. 1906) glaube ich jetzt auf Störung der Homöotropie durch Beimischung der Moleküle der zweiten flüssig-kristallinischen Modifikation zurückführen zu können.

2) Eine Flüssigkeit muß nicht notwendig eine Phase (vgl. W. Gibbs, thermodynamische Studien p. 115) sein. Milch, flüssige Tusche, kolloidale Goldlösung, Eiweiß usw. sind Beispiele zweiphasischer Flüssigkeiten.

3) Vgl. O. Lehmann, Molekularphysik 2. p. 591. 1888 u. Physik. Zeitschr. 7. p. 578. 1906.

4) O. Lehmann, Molekularphysik 2. p. 592. 1888.

Schlierenapparat erhält man den Eindruck, als ob es sich um eine breiige Masse handle, deren feste Teilchen zusammengeschoben werden können und mit Flüssigkeit erfüllte Kanäle zwischen sich lassen. Man könnte sich dann die Polarisation dieser Kanäle dadurch erklären, daß in der Flüssigkeit noch vereinzelte Kristalllamellen oder -nadeln schwimmen, die sich allenthalben in die Strömungsrichtung, also parallel den Seitenrändern der Kanälchen anordnen."

Wenn Vorländer (l. c. p. 3) schreibt: „Reinitzer sandte seine Präparate an Lehmann und letzterer erkannte *sogleich* die nahen Beziehungen zwischen den neuen Erscheinungen und seinen älteren Beobachtungen am Jodsilber", so entspricht dies, wie man sieht, keineswegs den Tatsachen. Zu dieser Erkenntnis konnte ich naturgemäß erst gelangen, nachdem mir gelungen war, durch Anwendung eines geeigneten Lösungsmittels[1]) *die Kristallindividuen zu isolieren*, wobei ich fand, daß bei Verminderung der Menge desselben die Zwischenräume zwischen den Kristallen immer kleiner werden und schließlich restlos verschwinden. Damit war erkannt: die trübe Schmelze ist *eine Phase.*

Reinitzer hatte mir seine Präparate im März 1888 gesandt, die Publikation der Resultate erfolgte am 3. Mai 1888, meine erste Mitteilung, daß die trübe Schmelze *physikalisch einheitlich* sei, nämlich ein Aggregat *fließender* (nicht flüssiger) Kristalle wie bei Jodsilber ging aber erst am 30. August 1889 bei der Redaktion der Zeitschr. f. physik. Chemie ein, die Publikation erfolgte also *fast* $1^1/_2$ *Jahre später.* In dieser langen Zeit konnte *jedermann* die Versuche wiederholen.[2])

Ich selbst habe sie mehrfach in Aachen, Dresden und Karlsruhe demonstriert, indes kam niemand auf den Gedanken, daß hier fließende Kristalle vorlägen. Wie schwierig die hierzu durchaus notwendige Isolierung der einzelnen Kristallindividuen

1) Am besten eignet sich scheinbar Olivenöl, vgl. aber O. Lehmann, Zeitschr. f. phys. Chem. 56. p. 768. 1906.

2) Reinitzer hatte, wie er angibt, das Cholesterin bezogen aus der chemischen Fabrik von H. Trommsdorff in Erfurt und erhielt das Benzoat nach der Methode von Schulze (Journ. f. prakt. Chem. (2) 7. p. 170) einfach durch $1^1/_2$ stündiges Erhitzen mit käuflichem Benzoesäureanhydrid im offenen Kölbchen. Der Stoff war also leicht erhältlich.

für den Ungeübten ist, kann man daraus erkennen, daß mir noch am 8. Februar 1906 Hr. F. M. Jaeger in Zaandam, ein in subtilen Arbeiten sehr gewandter Beobachter, welchem auch ein Kristallisationsmikroskop neuester Konstruktion zur Verfügung stand, bei Untersuchung ganz ähnlich sich verhaltender Cholesterinverbindungen keinen Erfolg hatte und schließlich mir die Präparate zur Untersuchung zusandte, höchst interessante Stoffe, bei welchen mir der Nachweis gelang, daß sie sogar in *zwei* flüssig-kristallinischen Modifikationen auftreten.[1])

Quincke, ein erfahrener Optiker und auf dem Gebiete feiner Arbeiten ausgezeichneter Experimentator, welcher Reinitzers Präparate ebenfalls untersuchte[2]), stellte mein Ergebnis als irrig hin und erklärte die doppeltbrechende Flüssigkeit für einen Brei aus festen Kristallen und Flüssigkeit; Tammann[3]), ebenfalls ein hervorragender Experimentator, erklärte sie für eine Emulsion und noch in neuester Zeit sprechen Nernst[4]) und Bose[5]) mehr oder weniger zugunsten dieser (zuerst von Reinitzer und mir aufgestellten) Emulsionstheorie.

Zu der Erkenntnis, daß nicht nur *fließende*, sondern wirklich *flüssige* Kristalle[6]) existieren, kam ich durch die Untersuchung der Reinitzerschen Präparate überhaupt nicht, sondern erst *zwei volle Jahre später* durch Beobachtungen an anderen Präparaten, welche mir von Hrn. Prof. Gattermann

---

1) O. Lehmann, Zeitschr. f. physik. Chem. 56. p. 750. 1906.

2) G. Quincke, Wied. Ann. 53. p. 632. 1894.

3) G. Tammann, Ann. d. Phys. 4. p. 524. 1901; 5. p. 286. 1901; 8. p. 106 u. 908. 1902; ferner Zeitschr. f. Elektrochem. 1905. p. 955.

4) W. Nernst, Diskussion, Zeitschr. f. Elektrochem. 12. p. 431. 1906 (vgl. O. L., Physik. Zeitschr. 8. p. 45. 1906); Theoret. Chem. 5. Aufl. 1907. p. 688 (vgl. O. L., Vierteljahrsber. d. Wiener Ver. z. Förd. d. phys. u. chem. Unterr. 12. p. 250. 1907).

5) E. Bose, Physik. Zeitschr. 8. p. 847. 1907; 9. p. 169. 1908.

6) D. h. solche, welche freischwebend vollkommene Kugelform annehmen. Noch gelegentlich meines von Demonstrationen begleiteten Vortrages in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft in Berlin (16. März 1906) wurde mir von sehr hervorragender Seite der Einwand gemacht, meine Bestimmung der Kugelform der Kristalltropfen des Paraazoxyanisols sei vielleicht doch nicht genau genug, um zu beweisen, daß dem Stoff jede Spur vollkommener Elastizität fehle, daß derselbe doch noch zu den festen zu rechnen sei.

(am chemischen Institut in Freiburg i. B.) zugesandt wurden aus Anlaß meiner (späteren) an die Beobachtungen bei *Jodsilber* anknüpfenden Publikation über fließende Kristalle.[1]) Erst 16 Jahre später fand ich den Unterschied zwischen *Gestaltungskraft* und *Elastizität*[2]), wodurch dann möglich wurde, auch Reinitzers trübe Schmelze mit Aggregatpolarisation als „*kristallinische Flüssigkeit*" zu bezeichnen.

Tatsächlich hat auch Reinitzer selbst bis in die neueste Zeit keine Abhandlung veröffentlicht, in welcher von flüssigen Kristallen die Rede wäre, und schon dieser eine Umstand scheint geeignet, Vorländers Auffassung zu widerlegen, welcher sagt (l. c. p. 3): „Es läßt sich schwer entscheiden, wem das größere Verdienst an dieser Erkenntnis gebührt, Lehmann oder Reinitzer. Deshalb scheint es mir recht und billig zu sein, wenn Lehmann *und* Reinitzer als Entdecker der fließenden Kristalle angeführt werden" . . . „Einen Unterschied zwischen „fließenden" und „flüssigen" Kristallen gibt es nicht."

Selbstverständlich liegt es mir durchaus fern, die wirklichen Verdienste der schönen Arbeiten Reinitzers, insbesondere die Entdeckung der Klärungstemperatur und der Aggregatpolarisation der trüben Schmelze irgendwie anzutasten, ich halte nur im Interesse der geschichtlichen Wahrheit für notwendig, darauf hinzuweisen, daß der Begriff der *flüssigen Kristalle* einen durchaus anderen Ursprung gehabt hat, wenn wir auch *heute* berechtigt sind, die wohl bereits von Berthelot beobachtete, aber von Reinitzer zuerst beschriebene trübe Schmelze als Aggregat flüssiger Kristalle zu betrachten.

Ich bin nicht einmal der Meinung, daß die Reinitzerschen Beobachtungen (oder die meinigen an dessen Präparaten) die Entstehung des neuen Begriffes wesentlich gefördert haben. Die Stoffe waren wegen der Kleinheit der Kristallindividuen dazu so wenig wie möglich geeignet. Ihre Untersuchung erforderte einen ganz enormen unnötigen Zeitaufwand und schließlich ergab sich doch nicht mehr als das, was bereits bei Jodsilber gefunden war, mit Ausnahme dessen, daß fließende

1) O. Lehmann, Wied. Ann. 40. p. 401; 41. p. 325. 1890; Zeitschr. f. physik. Chem. 5. p. 427. 1890.

2) O. Lehmann, Verh. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 8. p. 143. 1906; Physik. Zeitschr. 7. p. 722. 1906.

Kristalle nicht notwendig dem regulären System angehören müssen, sondern auch doppelbrechend sein können, und daß ihre Fluidität die des Jodsilbers erheblich übersteigen kann. Von Bedeutung wurden diese Beobachtungen erst durch Auffindung der Gestaltungskraft (1906), da nun ebenso wie aus dem Verhalten der Gattermannschen Stoffe (1890) geschlossen werden konnte, daß *starke Doppelbrechung unabhängig von Elastizität und äußerem Zwang bestehen kann.* Wer meine Molekularphysik kennt (insbesondere Bd. II. p. 482 u. ff.), weiß, daß das Ziel meiner Bestrebungen die Aufklärung der Wachstumserscheinungen bei Organismen ist. Diese bestehen aus sehr weichen Stoffen und zeigen manche Analogien zu wachsenden Kristallen.[1]) Das Studium des Verhaltens sehr weicher Kristalle lag deshalb stets in meiner Absicht und falls nicht zufällig die Zusendung der Reinitzerschen Präparate erfolgt wäre, hätte ich sehr weiche doppelbrechende fließende Kristalle ähnlich denjenigen des Cholesterylbenzoats wahrscheinlich zuerst bei Ammoniumoleat oder anderen Oleaten aufgefunden, bei welchen ich die Erscheinungen des Zusammenfließens usw. tatsächlich auch zuerst beobachtete. Jedenfalls waren für die Entstehung und weitere Ausbildung des Begriffes der flüssigen Kristalle das Ammoniumnitrat, das Jodsilber, das Ammoniumoleat und die Stoffe der Herren Gattermann, Vorländer und Jaeger von wesentlich größerem Einfluß als die Reinitzerschen. Vermutlich bin ich selbst der eigentliche Urheber der falschen Auffassung des Hrn. Vorländer, da ich nicht nur zu Anfang, sondern bis in die neueste Zeit immer wieder darauf hingewiesen habe, daß ich Hrn. Reinitzer die Präparate verdanke und daß er mich auf deren Eigentümlichkeiten (doppelter Schmelzpunkt, Farbenerscheinung und Aggregatpolarisation) aufmerksam gemacht hat.

Karlsruhe, den 28. März 1908.

---

1) M. Verworn, Allg. Physiologie, 2. Aufl., Jena 1897. p. 121, sagt: „Man hat ... mit Vorliebe den Fehler begangen, den Organismus einem *Kristall* gegenüberzustellen, *statt* ihn mit einer Substanz zu vergleichen, die ähnliche Konsistenz, überhaupt ähnliche physikalische Verhältnisse bietet wie die lebendige Substanz, also etwa mit einer *dickflüssigen Masse*". Vgl. O. Lehmann, Die scheinbar lebend. Kristalle, Esslingen 1907.

(Eingegangen 29. März 1908.)

3. *Anodenstrahlen. I;*
von E. Gehrcke und O. Reichenheim.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

(Vgl. Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 8. p. 559 bis 566. 1906; 9. p. 76—88, 200—204, 873—885. 1907.)

§ 1. Während die Kathode Geisslerscher Röhren bekanntlich bei geeigneter Verdünnung des Gases zum Ursprungsort einer besonderen Strahlenart, der Kathodenstrahlen, wird, verhält sich die Anode völlig anders; ihre Gestalt und Lage im Entladungsraum ist im allgemeinen von äußerst geringem, wenn nicht verschwindendem Einfluß auf die Erscheinungen des Stromdurchganges durch das Rohr. Nichtsdestoweniger besteht eine Parallelität zwischen der Anode und der Kathode; es möge hier nur an das anodische Glimmlicht und an den Potentialsprung, den man kurz als Anodenfall bezeichnet, erinnert werden. Besonders die letztere Tatsache des Anodenfalles läßt die Vermutung nicht von der Hand weisen, daß unter geeigneten Umständen auch die Anode befähigt sein dürfte, der Sitz einer Strahlung zu werden und positiv geladene Ionen zu emittieren. Wir haben uns die Aufgabe gestellt, Versuchsbedingungen ausfindig zu machen, unter denen dies der Fall ist.

Die von Goldstein entdeckten Kanalstrahlen, welche nach W. Wien positiv geladen sind, stellen bekanntlich eine Strahlung dar, die ihren Ursprungsort in der Nähe der Kathode bzw. an der Kathodenoberfläche selbst hat. Die früher vielfach geäußerte Ansicht[1]), die Kanalstrahlen kämen von der Anode her, ist unzutreffend.

1) Vgl. z. B. A. Battelli u. L. Magri, Physik. Zeitschr. 1. p. 18 bis 20. 1899.

§ 2. Den Ausgangspunkt unserer Beobachtungen bildete das oben erwähnte *anodische Glimmlicht*, welches der eine von uns[1]) bereits früher einer Untersuchung unterzogen hatte. Es gelang uns jetzt, mit geeignet gestalteten Entladungsröhren bedeutende Größen des anodischen Glimmlichtes zu erzielen.

Wir studierten das Verhalten des anodischen Glimmlichtes in verschiedenen Gasen, bei verschiedenen Drucken und an Anoden aus verschiedenem Material; so wurden beispielsweise Anoden aus Messing, Aluminium, Eisenglanz, Antimonglanz angewendet. Als Stromquelle diente ein Induktorium. Alle diese Versuche ergaben jedoch keine Strahlen von der Anode; die beobachteten Erscheinungen waren sämtlich bedingt durch das zu einer leuchtenden Wolke (im hohen Vakuum) deformierte anodische Glimmlicht und lassen sich vollständig durch die Hypothese einer vor der Anode sekundär ausgebildeten gasförmigen Kathode[2]) erklären.

In Fig. 1 ist eine der benutzten Röhren dargestellt; Fig. 2 zeigt das Verhalten des anodischen Glimmlichtes in Luft bei

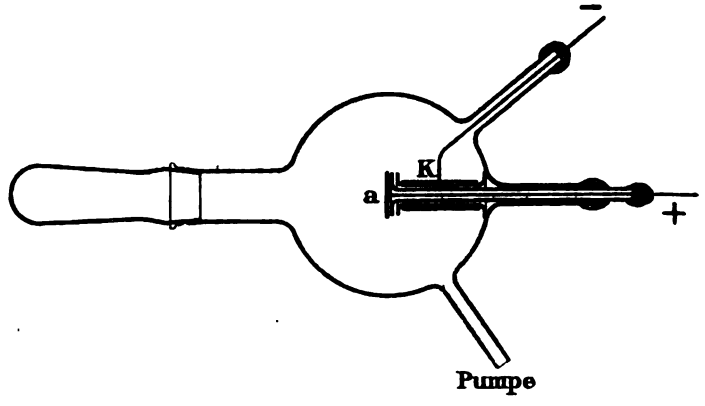


Fig. 1.

zunehmendem Vakuum: das bei einer gewissen Verdünnung zu einer rötlichweißen kleinen Kugel deformierte anodische Glimmlicht α entwickelt sich mit fortschreitender Verdünnung

1) E. Gehrcke, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 7. p. 63—70. 1905.
2) E. Gehrcke, Ann. d. Phys. 15. p. 528. 1904.

zu einem halbkugelförmigen Gebilde mit einem helleren Kern (vgl. Fig. 2a—d), sodann hebt sich dieses, durch eine allmählich näher kommende, „positive Schicht" γ (vgl. Fig. 2e) seitlich eingedrückte Gebilde α allmählich von der Anode ab, hierbei an Helligkeit abnehmend und einen Kern β von blauer Färbung erhaltend (Fig. 2e—g). Schließlich geht ein geradliniger Strahl δ von schwacher Intensität nach vorn und der Strahl β erzeugt an der Auftreffstelle auf der Anode (bei $a\,a$, Fig. 2g) einen Fluoreszenzfleck. Unzweifelhaft ist der Strahl β ein Kathodenstrahl, während der Strahl δ vermutlich aus positiven Ionen gebildet wird. Man kann sich diesen Vorgang so denken, daß eine vor der Anode liegende, negativ geladene Gaswolke, also eine „Gaskathode", deren negatives Glimmlicht α darstellt, negative Teilchen in Form des Strahles β auf die Anode hin entsendet und positive Teilchen in Form des Strahles δ in entgegengesetzter Richtung treibt. — Die Röhre der Fig. 1, an welcher diese Beobachtungen angestellt wurden, zeigt bei a die Anode (Aluminiumscheibe), bei K die Kathode (Aluminiumzylinder, durch zwischenliegende Glasröhren von der Anode getrennt). Diese Anordnung verhindert, daß direkte Kathodenstrahlen von der Kathode auf die Anode bzw. auf die anodischen

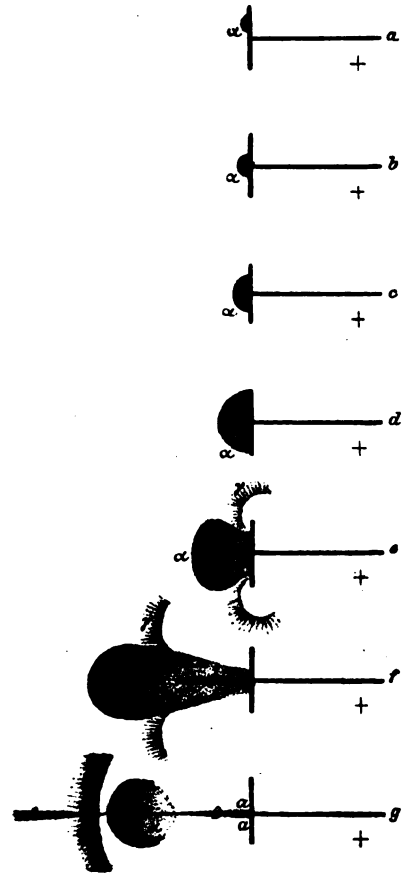


Fig. 2 (ca. 1/8 natürl. Größe).

Lichtgebilde fallen.[1]) Der Durchmesser der Glaskugel betrug 21 cm.

§ 3. Da die Versuche des vorigen Paragraphen keine Erscheinungen ergeben hatten, welche das Vorhandensein von direkten Anodenstrahlen deutlich erkennen ließen, stellten wir zunächst einige Beobachtungen an mit Röhren, die nach Wehnelt[2]) mit Erdalkalioxyd überzogene Kathoden besaßen. Mit einer derartigen Röhre, in der sich als Anode ein ca. 3 cm langer, 0,3 mm dicker Platindraht befand, beobachteten wir zu unserer Überraschung sogleich nach Anlegen der Spannung (110 Volt) *scharfe, gelblich gefärbte Strahlen, deren Ansatzstelle auf der Anode ein kleiner heller Punkt* war. Die Strahlen waren anfangs recht intensiv, verblaßten aber rasch und verschwanden nach wenigen Sekunden. Die Erscheinung kehrte zunächst nicht wieder, auch nicht, als die Stromstärke soweit gesteigert wurde, daß sich die ganze Anode zu heller Gelbglut und zum Schmelzen erhitzte.

Im weiteren Verlauf der Untersuchung dieser Erscheinung stellte sich heraus, daß das wirksame Agens, welches die beobachteten gelblichen Strahlen ergeben hatte, in Spuren von Verunreinigungen zu suchen war, die sich auf der Platinanode befanden. Eine sehr gut gereinigte Platinanode ließ in keinem Falle die Erscheinung wiederkehren, als aber etwas Salz, wie Borax oder Kochsalz, mit der Anode in Berührung gebracht wurde, kehrten die gelblichen Strahlen wieder und zwar mit bedeutender Intensität. Immerhin zählte auch hier die Dauer des Phänomens noch nach Sekunden; nach Ablauf von etwa 30 Sek. bot die Röhre den gewöhnlichen Anblick dar, ohne daß die Anode irgendwie ausgezeichnet gewesen wäre.

§ 4. Wir gingen nun dazu über, *Anoden, welche größere Mengen geschmolzener Salze enthielten*, herzustellen. Diese Anoden hatten folgende Gestalt (vgl. Fig. 3a): Ein rechteckiges Stück Platinblech von 0,01 mm Dicke wurde in der Mitte parallel zu den langen Kanten längs einer Linie AB gekniffen und sodann an dem zusammengefalteten Blech in der Mitte

1) Solche direkten Kathodenstrahlen zerstören die Ausbildung des anodischen Glimmlichtes; vgl. E. Gehrcke, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 7. p. 67. 1905.

2) A. Wehnelt, Ann. d. Phys. 14. p. 425—468. 1904.

durch Überdrücken über ein kleines Metallröhrchen von etwa 2 mm Dicke eine zylindrische Aufbauchung CD des Bleches hergestellt, derart, daß das zusammengelegte und (vgl. Fig. 3b) an den Enden $A'A''$ und $B'B''$ an dicke Kupferzuleitungen hart angelötete Blech eine elektrisch heizbare kleine Röhre $C'D'$ von 2 mm Weite in der Mitte trug, die oben bei C' offen, unten bei D' geschlossen war. Das Blech war noch, wie aus Fig. 3b ersichtlich ist, mit Fältelungen parallel zu $C'D'$ versehen; die Fläche $A'B'B''A''$ betrug rund $2 \times 0{,}4$ cm. — Diese mit Salzen füllbare Elektrode diente sodann als Anode; der Heizstrom für die Anode wurde durch eine Akkumulatorenbatterie geliefert, welche von der zur Erhitzung der Wehneltkathode dienenden Batterie isoliert war.

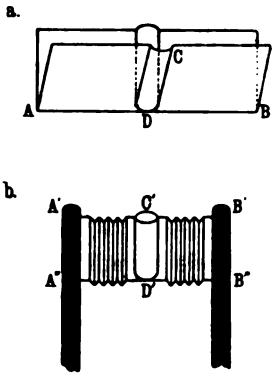


Fig. 3.

Wurde eine solche Anode, deren zylindrische Röhre $C'D'$ mit Natriumkarbonat gefüllt war, zu dunkler Rotglut erhitzt, so ging von der Öffnung C' eine intensiv leuchtende gelbe Fackel von zuweilen kugelförmiger, zuweilen länglicher Gestalt aus, die sich bis zu den Wänden des (kugelförmigen) Entladungsgefäßes erstreckte. Die Kathode blieb hierbei von blauem Licht umhüllt und es erschien somit jede Elektrode als Ausgangs- und Mittelpunkt einer strahlartig sich ausbreitenden, glänzenden Lichterscheinung. Das Spektrum der anodischen Lichterscheinung enthielt intensive D-Linien. Nach Ablauf einiger Minuten wurde das Anodenphänomen blasser und verschwand schließlich ganz; man hatte dann den gewohnten Anblick der Röhre und es waren hauptsächlich die von der Kathode ausgehenden blauen Strahlen, welche sich dem Beschauer auffällig darboten, während an der Anode nur ein bläulich-weiß gefärbtes, meist hin- und herspringendes Glimmlicht sichtbar war.

Nahezu das gleiche Phänomen wie mit Natriumkarbonat als Anodenmaterial trat auch mit NaCl auf, doch pflegten im letzteren Falle die Natriumlinien auch im Spektrum der von

der Kathode kommenden blauen Strahlen vorhanden zu sein. — Thalliumchlorid ergab eine prächtige grüne Anodenfackel; im Spektrum derselben wurde nur die sehr helle grüne Thalliumlinie beobachtet. — Ferner untersucht wurden noch LiCl, Li_2CO_3, KCl, K_2CO_3, RbCl, CsCl, $CuCl_2$, $BaCl_2$, $SrCl_2$, $InCl_3$. Alle diese Salze ergaben intensive, charakteristisch gefärbte Anodenfackeln; die Linien ihrer Spektra sind sehr scharf, scheinen aber im übrigen mit den in Bunsenflammen erhaltenen übereinzustimmen.

Unwirksam waren die Oxyde der Erdalkalien, welche nach Wehnelt (l. c.) die Emission negativer Elektronen aus der Kathode vermitteln. Auch andere Oxyde, wie Al_2O_3 und CuO, als Anode benutzt, zeigten die obigen Erscheinungen nicht, wenigstens nicht bei den von uns angewandten Anodentemperaturen. Es hat sonach den Anschein, als ob hauptsächlich die stark dissoziierten oder verdampfenden Salze hierzu befähigt sind.

Bei Anwendung genügend starker Ströme konnte der die Anode heizende Hilfsstrom ausgeschaltet werden. Die Erhitzung der Anode wurde dann durch die Wärme des durch die Röhre fließenden Stromes selbst besorgt.

§ 5. Einer nach Fig. 3 konstruierten Anode, welche Natriumkarbonat enthielt, wurde in 2 cm Abstand ein sogen. Faradayscher Zylinder gegenübergestellt. Der äußere Mantel desselben war direkt zur Erde abgeleitet, die innere Hülle über ein Galvanometer (Empfindlichkeit 10^{-8} Amp.) mit der Erde verbunden. Die Heizströme für Kathode und Anode wurden hierbei von zwei voneinander isolierten Batterien geliefert.

Ging Strom durch die Röhre, so erhielt man im Galvanometer einen starken *positiven Ausschlag* von 100 Skt. und mehr, solange von der Anode eine gelbe Lichtfackel ausging. Mit dem Verblassen der letzteren nahm auch der Galvanometerausschlag ab, kam auf Null und wurde sogar negativ; dieser letztere Effekt ist wohl durch Kathodenstrahlen zu erklären, die von der Kathode her in das Innere des Faradayschen Zylinders gelangten.

Der Strom, welcher durch die Röhre floß, fiel bei dem letzten Versuch von etwa 0,35 auf 0,2 Amp.

Das gleiche Resultat wie oben wurde auch mit $TlCl_3$ und $CdCl_2$ als Anodenfüllung erhalten; die Galvanometerausschläge waren hier kleiner, aber auch länger andauernd.

Der Faradaysche Zylinder, welcher an einer federnden Stange befestigt war, konnte sowohl der Anode wie der Kathode gegenübergestellt werden. Im ersten Falle erhielt man, wie gesagt, positive Ausschläge. Wurde aber der Zylinder mehr und mehr der Kathode zugewandt, so nahmen die Ausschläge ab, gingen durch Null und wurden schließlich stark negativ, wenn der Zylinder der Kathode gegenüberstand.

Die Versuche wurden mit verschiedenen Röhren und unter Variation des Abstandes des Faradayschen Zylinders von den Elektroden mit qualitativ gleichem Erfolge wiederholt. Sie führen zu dem Schluß, daß unter den angewandten Versuchsbedingungen *positiv geladene Teilchen von der Anode* emittiert werden.

§ 6. Im Zusammenhang mit den im vorigen Paragraphen beschriebenen Beobachtungen bemerkten wir, daß auch von einer *Wehneltkathode*, auf der sich etwas Chloridsalz befindet, besonders bei sehr hoher Temperatur derselben, *zuweilen* ebenfalls eine positive Strömung, wie von den im § 5 genannten Anoden, erzeugt werden kann. Denn wir erhielten mitunter im ersten Moment des Stromdurchganges *von* einem *der Kathode* gegenübergestellten Faradayschen Zylinder *positive Ladungen*. In diesem Falle wies auch das negative Glimmlicht Metallinien im Spektrum auf. Ferner steht hiermit wohl die Tatsache im Zusammenhang, daß wir gelegentlich ein Verlöschen der Wehneltröhre bei Steigerung der Temperatur der Kathode beobachteten; man kann dies vielleicht dadurch erklären, daß die bei der hohen Temperatur von der Kathode ausgehenden *positiven* Ionen eine Gashülle von hohem Widerstand, ähnlich dem Crookesschen Dunkelraum, erzeugen. — Eine Erscheinung, welche auf eine Emission negativer Teilchen von der Anode her schließen ließe, haben wir nicht beobachtet.

§ 7. Der weitere Fortschritt dieser Untersuchungen schien davon abzuhängen, ob es gelingen würde, Phänomene von größerer Dauer und Stabilität zu erzeugen, und ferner, den Potentialsprung an der Anode durch irgendwelche Mittel zu erhöhen. Das Gewünschte ließ sich zuerst mit folgender An-

ordnung erzielen (vgl. Fig. 4): Die Anode *a* ist eine kleine, etwa 15 mm lange, 6 mm dicke Salzstange, die in der Achse zentrisch durchbohrt ist; die Weite des Loches beträgt etwa 0,3 mm. Die Zuleitung bildet ein Platindraht *P*, der bis zur Mitte der Salzstange reicht und dort frei endigt. Der Draht ist fast auf seiner ganzen Länge mit Einschmelzglas umschmolzen und zugleich mit dem unteren Ende der Salzanode von einem Glasrohr rings umschlossen; das Ganze ist dann noch von einem zweiten, oben etwas eingefallenen Glasrohr umgeben, so daß nur die Vorderfläche der Salzanode von Glas frei bleibt. — Die Kathode *K* ist ein Aluminiumring, der seitlich gehalten wird. *F* ist ein Glimmerblatt von kreisrunder Form; der Abstand *a F* (nahezu der Radius der das ganze einschließenden Glashülle) beträgt etwa 5 cm. — Als Stromquelle diente ein Induktorium von 25 cm Funkenlänge bzw. eine 30 plattige Influenzmaschine.

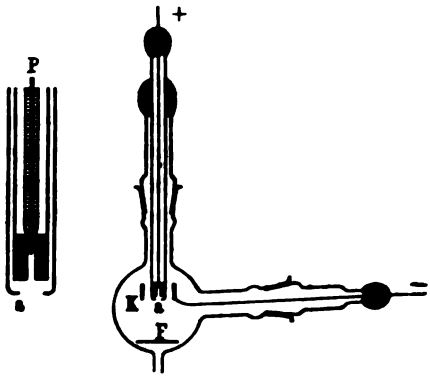


Fig. 4.

Evakuiert man die Röhre mit Hilfe einer Gadeschen Quecksilberluftpumpe und zugleich mit Kokosnußkohle in flüssiger Luft zu einem hohen Vakuum, derart, daß das Glas überall hellgrün fluoresziert und kein leuchtendes Gas mehr im Innern der Röhre sichtbar ist, so geht von der Anode *a* eine fackelartige Lichterscheinung aus, ähnlich wie wir sie in § 4 beschrieben haben. Die Färbung dieser Fackel ist diejenige des Metallions, welches die Salzanode enthält. *Außerdem leuchtet der Glimmerschirm F mit einer Fluoreszenzfarbe, die ebenfalls von einem Metallion herrührt.* Befindet sich z. B. Li_2CO_3 auf dem Glimmerschirm, so leuchtet er mit rötlichem Licht, welches im Spektroskop (neben der fast immer sichtbaren *D*-Linie) die rote und orangefarbene Lithiumlinie zeigt. Mit hellem *D*-Licht leuchtet der Glimmerschirm, wenn sich Natriumsalz auf ihm befindet.

Wenn der Glimmerschirm *F* gar kein Salz enthält, so pflegt er anfangs nur äußerst schwach erregt zu werden. Mit der Dauer der Entladung nimmt indessen die Fluoreszenzhelligkeit bedeutend zu, und es stellt sich z. B. ein immer heller werdendes gelbes Leuchten (*D*-Licht) ein, wenn die Salzanode *a* aus Natriumsalzen (z. B. Soda) besteht. Enthält die Salzanode *a* andere Stoffe, wie z. B. Lithium (als Karbonat oder Chlorid), so erstrahlt der Schirm *F* mit der Zeit mehr und mehr in Lithiumlicht.

Es wird also offenkundig Substanz von der Anode nach dem Schirm F hingeschafft.

Bei den höchsten von uns erreichten Verdünnungen in der Röhre war gar kein Leuchten von Gasen, wie Luft, Wasserstoff u. dgl., beobachtbar, und auch die grüne Fluoreszenz der Kathodenstrahlen auf dem Glase war nur schwach. Dagegen leuchtete die Glimmerplatte *F* und die Glaswände in ihrer Nähe mit der Farbe des betreffenden Metallions. Die Bahn der Anodenstrahlen selbst markierte sich nur durch die Fackel dicht an der Anode in der gleichen Farbe, im übrigen war die Bahn dunkel. Man hatte hier offenbar den Fall einer Gasentladung vor sich, wo fast nur positiv geladene Teilchen von der Anode ausgingen und hauptsächlich als Träger des Stromes wirkten. Allem Anschein nach stellte dieses Phänomen die Umkehrung des bekannten Vorganges dar, der sich z. B. in einer Röntgenröhre abspielt; dort wird fast die gesamte Leitung durch negative Teilchen von der Kathode her bewirkt.

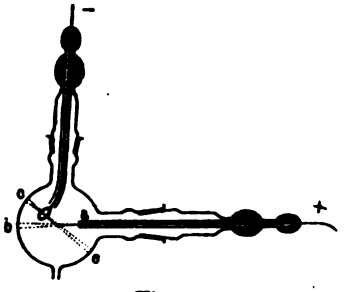


Fig. 5.

§ 8. Vollkommener als durch die in § 7 beschriebenen Vorrichtungen kann man schöne und demonstrativ wirksame, strahlartige Erscheinungen an der Anode folgendermaßen erzeugen (Fig. 5):

Als Kathode dient ein Aluminiumring, der, wie aus Fig. 5 ersichtlich, in einen Schliff eingesiegelt ist, so daß er an verschiedene Stellen der Röhre hingedreht werden kann; Anode ist eine, ebenfalls in einen Schliff eingesetzte Salzstange *a*, die

rings von Glas umkleidet ist und deren Zuleitung ein innen eingeführter Kupferdraht bildet.

Man stellt diese Salzanode passend so her, daß man ein Glasrohr (von etwa 0,2—0,5 cm lichter Weite) in geschmolzenes Salz eintaucht und durch leichtes Ansaugen am offenen Ende des vorher angewärmten Glasrohres dafür Sorge trägt, daß das Salz bis zu einer Höhe von etwa 3 cm in dem Rohre in die Höhe steigt. Nach dem Erkalten des Ganzen wird dann der Zuleitungsdraht in das Innere geschoben und ein zweites, das erste eng umhüllendes Glasrohr darüber geschoben; eine Durchbohrung, wie die in § 7 beschriebenen, hatten die hier benutzten Anoden nicht.

Als Anodenmaterial sehr geeignet ist ein Gemisch von LiBr, LiJ, NaJ, das in einem Mörser pulverisiert und mit etwas Graphitpulver durchmischt wird. Beim Schmelzen dieses Gemisches (in einem Porzellantiegelchen) erhitzt man so weit, daß Joddampf aus dem Tiegel aufsteigt, andererseits ist darauf zu achten, daß nicht zu hoch erhitzt wird, da sich dann das ganze Salz zersetzt oder verdampft. Am besten stellt man aus der erhaltenen, grünlichschwarzen, blasigen Flüssigkeit gleich mehrere Anoden her. Es ist zweckmäßig, diese bald nach der Herstellung zu benutzen oder in einem Exsikkator aufzubewahren, da sie sehr hygroskopisch sind.

Man erhält in einer derartigen, mit Wasserstoff oder Leuchtgas gefüllten und sodann mit einer Gaedeschen Pumpe evakuierten Röhre, sei es mit Induktor, sei es mit Influenzmaschine als Stromquelle, einen *hellroten, nadelartigen Strahl von der Anode a*, der im Spektrum die Lithium- und Natriumlinien zeigt und an der Auftreffstelle *b* auf der Glaswand rotgelbe Fluoreszenz erregt. Die Helligkeit dieses Strahles ist bei passender Verdünnung so groß, daß er auch bei Tageslicht zu sehen ist. Bei der in Fig. 5 gezeichneten Stellung der Kathode kreuzt sich mit diesem Strahl ein blauer Kathodenstrahl *c c*, der an der Auftreffstelle auf der Glaswand die bekannte grüne Fluoreszenz hervorbringt. Dreht man die Kathode, so bleibt der *Anodenstrahl*, wie wir ihn kurz nennen wollen, still stehen, während der Kathodenstrahl mitgeht. Ein mit der Hand genäherter Magnet lenkt wohl den Kathodenstrahl *c* ab, läßt aber den Anodenstrahl *a b* unverändert.

Man beobachtet zuweilen eine spontane Zwei- oder Dreiteilung des Anodenstrahles in mehrere, scharf abgegrenzte Strahlen. In Fig. 6 ist dieses Verhalten skizziert.

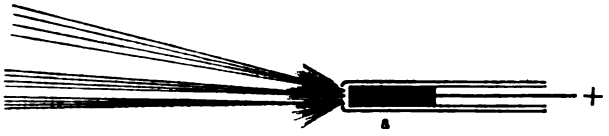


Fig. 6.

Die Länge des Anodenstrahles *a b* (Fig. 5) ist um so größer, je höher das Vakuum. Im höchsten Vakuum ist er selbst kaum sichtbar, dagegen ist dann die Fluoreszenzhelligkeit bei *b* größer. *Die längsten bisher* von uns *beobachteten Strahlen legten einen Weg von 25 cm zurück.*

Wir konnten derartige Röhren, wie die in Fig. 2 dargestellten, tagelang in Benutzung nehmen. Mit der Zeit aber ließ die Aktivität der Anode nach, augenscheinlich, weil sie zu viel Salz hergegeben hatte.

Ähnliche Wirkungen wie mit Lithium zeigten auch Natrium- und Thalliumsalze als Anoden. Immer aber erwies es sich als zweckmäßig, dem Salz noch einen fremden Stoff beizumengen, um brillante Erscheinungen zu erhalten. Als solcher die Aktivität der Anode günstig beeinflussender Stoff kann z. B. gepulverter Graphit dienen (vg. oben). Aber auch Zinkpulver, an Stelle des Graphits, bewirkte als Zusatz zur Salzanode das Auftreten prächtiger, scharfer Anodenstrahlen. Wir beobachteten solche Anodenstrahlen schon bei geringem Vakuum (bei etwa 0,5 cm Dicke des Crookesschen Dunkelraumes an der Kathode). Dann ging ein dicker, kurzer und sehr heller Strahl von der Anode aus, der ziemlich plötzlich in geringer Entfernung von der Anode aufhörte. Dieses Phänomen ließ uns an die Eigentümlichkeit der α-Strahlen radioaktiver Stoffe denken, die bekanntlich durch eine bestimmte Reichweite[1]) ausgezeichnet sind.

§ 9. Aus den in §§ 7 und 8 beschriebenen Versuchen hatte sich ergeben, daß Anodenstrahlen von der Anode aus-

1) W. H. Bragg u. R. Kleeman, Phil. Mag. (6) 8. p. 726 bis 738. 1904.

gehen, welche imstande sind, Fluoreszenz zu erregen und größere Strecken im Gase zurückzulegen. Das Aussehen der nach obigen Angaben (vgl. § 8) erzeugten Anodenstrahlen stimmte völlig überein mit den nur sehr kurze Zeit sichtbaren Strahlen, welche in § 3 beschrieben wurden.

Es ist nicht nur möglich, sondern wahrscheinlich, daß ein Teil des in §§ 8 und 9 beschriebenen Fluoreszenzlichtes von „Resonanzstrahlung“ durch das Licht der Lichtfackel herrührt.[1]) Daß dieser nicht durch Anodenstrahlen erregte Anteil des Leuchtens aber in unseren Versuchen nur klein war, folgt unter anderem daraus, daß nur im hohen Vakuum, wo die Anodenstrahlen augenscheinlich genügend durchdringend waren, die Fluoreszenzschirme hell leuchteten; bei geringem Vakuum, wo die an der Anode ansetzende Lichtfackel heller war als im hohen Vakuum, leuchteten die Fluoreszenzschirme nicht oder nur äußerst schwach.

Die Farbe der durch Anodenstrahlen erregten Fluoreszenz war in allen untersuchten Fällen identisch mit der durch Kanalstrahlen erregten. Auch die in § 4 beschriebenen Lichtfackeln sandten in allen untersuchten Fällen diejenige Lichtart aus, welche bei Bestrahlung von festen Salzen mit Kanalstrahlen erhalten wird.

Die gute Wirksamkeit der Gemische aus Lithium- und Natriumsalzen (vgl. § 8) erklärt sich vielleicht durch den niedrigen Schmelzpunkt dieser Körper. Die beim Durchgang der Entladungen erzeugte Wärme genügt hier bereits, die Anode so weit zu erhitzen, daß eine besondere elektrische Heizung, wie wir sie früher anwandten (vgl. § 4), nicht nötig ist. Am durchdringendsten waren in unseren Versuchen die Lithiumstrahlen.

Von einer kalten Anode, auch von einer solchen aus der oben genannten, sehr wirksamen Mischung haben wir bisher niemals Anodenstrahlen erhalten. Man muß bei den in § 7 und § 8 beschriebenen Fällen stets nach dem Einschalten des elektrischen Stromes etwas warten, bis die Anodenstrahlen erscheinen. Die dabei meist frei werdenden Gase, wie Wasser-

1) R. W. Wood, Physik. Zeitschr. 6. p. 903. 1905; 7. p. 873. 1906.

stoff usw., sind unter Anwendung wirksamer Evakuation zu entfernen.

§ 10. Bei gewissen Verdünnungen, wenn die gesamte Geisslersche Röhre von blauem Glimmlicht erfüllt ist und bereits eine Zeitlang Entladungen durch die Röhre gegangen waren, zeigten die Glaswände auf der inneren Fläche allenthalben eine gelbliche Fluoreszenz, vorausgesetzt, daß die Anode aus Natriumsalz bestand. Im Falle einer Thalliumsalzanode war unter den gleichen Bedingungen die Fluoreszenz des Glases grün, und im Spektroskop sah man dann die grüne Tl-Linie. Die Fluoreszenz der Glaswand wurde besonders stark, wenn man ihr einen Körper von außen näherte, wie z. B. den Finger oder dergleichen. Auch in diesen, übrigens wohl schon oft zur Beobachtung gelangten Fällen dürfte eine Fluoreszenz unter der Einwirkung *positiver* Teilchen vorliegen. Der Ursprungsort derselben war unmittelbar keine der Elektroden; möglicherweise lag er im Gase selbst.

Auch die Farbe der sogenannten „ersten Schicht" des Kathodenlichtes war in den eine Salzanode enthaltenden Geisslerschen Röhren stets diejenige des Linienspektrums des Salzes, aus dem die Anode bestand. Es ist ja auch verständlich, daß von der Anode herkommende positive Ionen, sofern sie dem elektrischen Kraftfelde folgen, nach der Kathode hineilen werden und, falls sie schnell genug sind, hier Fluoreszenz erregen. Aber die Strömung der positiven Teilchen in Geisslerschen Röhren ist sicherlich durch das Kraftfeld *allein* nicht bedingt; dies beweisen unter anderem die von Goldstein[1]) beobachteten, von der Kathode nach der Seite der Anode hineilenden K_1-Strahlen, die die Eigenschaften der Kanalstrahlen besitzen und sich dem elektrischen Kraftfelde *entgegen* bewegen[2]); ferner sprechen hierfür die von uns in § 6 beobachteten Tatsachen. Man wird sonach einem stromdurchflossenen Gase sowohl wie einer Kathode, welche negative

1) E. Goldstein, Berl. Ber. 89. p. 698. 1886; Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 3. p. 207. 1901; 4. p. 229. 1902.

2) P. Villard hat die magnetische und elektrische Ablenkbarkeit dieser Strahlen untersucht und gefunden, daß sie von derselben Größenordnung ist wie die der Kanalstrahlen; vgl. P. Villard, Compt. rend. 143. p. 674. 1906.

und positive Strahlen zugleich aussendet, die Eigenschaft der Radioaktivität zusprechen dürfen, eine Eigenschaft, die man zum Unterschiede von der bekannten, natürlichen Radioaktivität des Radiums, Tellurs usw. als „künstliche" Radioaktivität bezeichnen kann.

§ 11. Die in § 8 beschriebenen *Anodenstrahlen werfen an festen Körpern*, die ihnen in den Weg gestellt werden, *scharfe Schatten*. Setzt man z. B. in 1,5 bis 2 cm Abstand vor eine strahlende Anode ein Aluminium- oder Glimmerdiaphragma, das mit parallelen Schlitzen versehen ist, so blendet man mehrere rote (im Falle von Lithium) Anodenstrahlen aus dem ursprünglich spitzkegelförmigen Anodenstrahl aus und erhält auf diese Weise scharfe, für die Untersuchung sehr geeignete Strahlen.

Für Demonstrationszwecke empfiehlt es sich, eine Röhre mit mehreren Anoden anzuwenden, die man einzeln nacheinander benutzen kann. Wir bedienen uns vielfach einer Anodenform, welche aus fünf Anoden von der in § 8 beschriebenen Form besteht, die zu einem Bündel zusammengelegt sind. Man kann dann nach Belieben jede einzelne mit dem positiven Pol der Elektrizitätsquelle verbinden und so zur Anode machen.

§ 12. Die in § 8 beschriebenen *Anodenstrahlen stehen senkrecht zu der Fläche, von welcher sie ausgegangen sind.* Dies zeigt in eklatanter Weise folgender Versuch: Ein mit wirksamer Anodenmasse gefülltes Glasröhrchen wurde am Ende schief abgeschliffen, so daß, wie aus Fig. 7 ersichtlich ist, die freie Anodenfläche unter 45° gegen die Achse des Anodenröhrchens geneigt ist. Man erhält dann den Strahl ab, der senkrecht zur Anodenfläche steht.

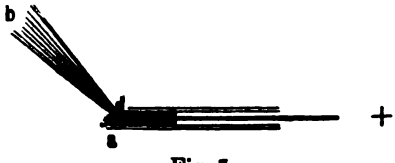


Fig. 7.

§ 13. In folgender Anordnung (vgl. Fig. 8) wurde die *elektrische Ablenkbarkeit der Anodenstrahlen* untersucht: In etwa 3 cm Entfernung von der Anode stand ein kleiner Kondensator kk. Die auf der Rückseite durch Glimmer gut isolierten Platten desselben hatten eine Größe von 1,5 × 2,5 cm und

einen Abstand von 0,5 cm. Der Kondensator wurde mit einer kleinen Wimshurstmaschine aufgeladen, die von der 30plattigen Influenzmaschine, welche den Strom vermittelst der Anode *A* und Kathode *K* durch die Röhre schickte, isoliert war. Vor dem Kondensator war bei *G* ein Diaphragma aus Glimmer

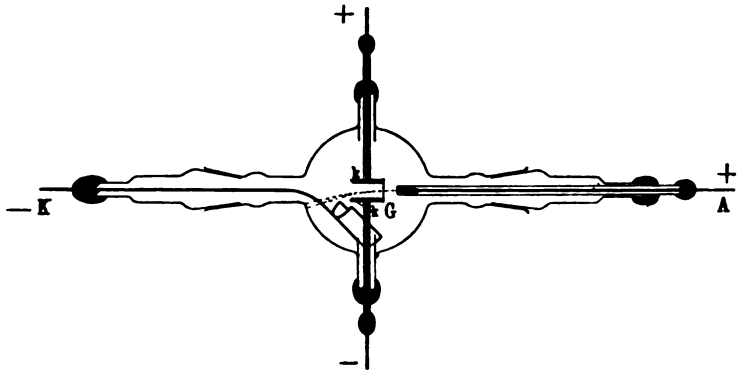


Fig. 8.

angebracht, das einen schmalen Schlitz von etwa 1 × 10 mm Breite trug, so daß der von der Anode kommende Anodenstrahl den Kondensator nur in Form eines schmalen, von dem Schlitz ausgehenden, scharf begrenzten Bandes durchsetzte.

Mit dieser Anordnung beobachteten wir nach Anlegen der Spannung an den Kondensator, daß der rote Anodenstrahl eine Ablenkung erfuhr, und zwar in dem Sinne, daß der Strahl zur negativ geladenen Platte des Kondensators hingebogen wurde (vgl. Fig. 2). Die Ablenkung konnte so groß gemacht werden, daß der Strahl auf die Kondensatorplatte auftraf; er erregte dann an der Auftreffstelle gelbes Fluoreszenzlicht (*D*-Licht). Die Anordnung war indes nicht empfindlich genug, um mit Sicherheit erkennen zu lassen, ob der (von konstantem Potential der Anode erzeugte) Strahl homogen war oder in ein Spektrum ausgebreitet wurde.

§ 14. Die *magnetische Ablenkbarkeit der Anodenstrahlen* wurde folgendermaßen (vgl. Fig. 9) untersucht: Eine mit einer Diaphragmenplatte mit Schlitzen versehene Lithiumanode *a* befand sich in einer Kugelröhre von 15 cm Durchmesser. Ein

Elektromagnet, dessen Pole *N* und *S* die in der Fig. 3 angedeutete Lage hatten, erzeugte ein (wenig homogenes) Kraftfeld, dessen Kraftlinien nahezu senkrecht zum Anodenstrahl standen.

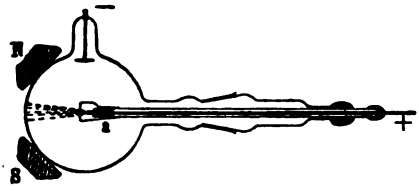


Fig. 9.

Man beobachtete mit dieser Anordnung, daß der Anodenstrahl beim Erregen des Elektromagneten abgelenkt wurde, und zwar in einem Sinne, der entgegengesetzt war der Ablenkung von Kathodenstrahlen; allgemein kann man sagen, daß die Ablenkung im Sinne positiver, von der Anode ausgesandter Teilchen erfolgte. Ferner ist offenbar die Anodenstrahlung nicht homogen, da die Strahlenbüschel durch die Ablenkung verbreitert werden, und zwar auch dann, wenn die Röhre mit dem Gleichstrom einer 30 plattigen Influenzmaschine betrieben wurde.

Erwähnt mag bei dieser Gelegenheit noch werden, daß beim Umpolen der Influenzmaschine, wenn also von der Salzelektrode, die vorher *Anode* war, die *kathodische* Entladung ausging und im Magnetfelde beobachtet wurde, außer den jetzt auftretenden Kathodenstrahlen noch die bekannten, von Goldstein als K_1-Strahlen bezeichneten Strahlen auftraten; die letzteren waren aber weniger stark magnetisch ablenkbar als die Anodenstrahlen.

§ 15. Die bisher beschriebenen Anodenstrahlen waren sämtlich erzeugt an Anoden, welche als wesentlichen Bestandteil ein *Salz* enthielten. Wir stellten uns die Frage, ob auch andere Körper die Fähigkeit besitzen, Anodenstrahlen auszusenden.

Ein Stückchen metallisches Natrium wurde auf einen Kupferdraht gespießt und in der gleichen Weise wie vordem die Salzstangen als Anode benutzt. Man erhielt in der Tat einen gelben Anodenstrahl von geringer Intensität. Hierbei ist allerdings zu beachten, daß das Natrium nicht sehr rein war und besonders etwas Petroleum enthielt.

Ein Stück Eisen, Zink, Wismut, Tellur oder Kohle als Anode ergab unter den von uns angewandten Versuchsbedin-

gungen keine Anodenstrahlen, wenigstens nicht in merklichem Betrage.

Schwefeljodid (von Kahlbaum, Berlin) als Anode ergab intensive Anodenstrahlen, hierbei mußte allerdings wegen des hohen Dampfdruckes des Jods ein Rohransatz mit flüssiger Luft gekühlt werden. Die so erhaltenen Anodenstrahlen hatten eine hellgelbe Farbe.

Ein Gemisch aus Schwefeljodid, Tellur und Kohlepulver ergab prächtige blauviolette Anodenstrahlen, die Kathodenstrahlen sehr ähnlich sahen, aber mit einem mit der Hand genäherten Magneten, der die Kathodenstrahlen stark zur Seite bog, nicht merklich abgelenkt wurden.

§ 16. Es konnte nach den obigen Ergebnissen noch zweifelhaft sein, ob die Anodenstrahlen selbst aus leuchtenden Teilchen bestehen, oder ob sie an sich nicht leuchten, vielmehr durch Zusammenstoß mit den in der Röhre enthaltenen Salzteilchen Licht erregen. Wenn die erste dieser beiden Möglichkeiten die zutreffende ist, so sollten die Anodenstrahlen in der gleichen Weise eine Verschiebung ihrer Spektrallinien aufweisen, wie dies bei den Kanalstrahlen der Fall ist.[1])

In der Tat beobachteten wir sowohl an Lithium- wie an Natriumstrahlen (vgl. § 8) diesen *Dopplereffekt* mit Hilfe eines Vierprismenapparates; der Strahl bewegte sich hierbei auf den Spalt des Apparates zu. Die Art der Erscheinung stimmt völlig überein mit der von Stark bei den Kanalstrahlen entdeckten: man beobachtet eine „ruhende Intensität" von großer Schärfe, dann folgt (nach der Seite der kürzeren Wellenlängen) ein breiterer leerer Zwischenraum, und hieran schließt sich die „bewegte Intensität" an, welche aus einer stark verbreiterten, am äußeren Rande scharfen, am inneren Rande verwaschenen Helligkeitsverteilung besteht. In ein und derselben Röhre, welche nebeneinander Natrium- und Lithiumanoden enthielt, zeigten die Lithiumlinien eine stärkere Verschiebung als die Natriumlinien.

Es gewährt einen eigenartigen Anblick, neben den allbekannten *D*-Linien ein System aus zwei verschobenen *D*-Linien zu sehen. Die Verschiebung ist für beide *D*-Linien die gleiche.

---

1) J. Stark, Physik. Zeitschr. 6. p. 892—897. 1905.

Gemessen haben wir die Verschiebung bisher nur an der Linie D_2 des Natriums, da auf der Photographie der Erscheinung (erhalten mit $^3/_4$ stündiger Exposition auf Viridinplatte) nur diese Linie lichtstark genug herausgekommen war, um eine einigermaßen genaue Messung zu erlauben.

Es fand sich für den äußeren Rand der verschobenen Linie die Größe der Verschiebung $\delta\lambda/\lambda = 0{,}455 \cdot 10^{-3}$, für die Mitte der verschobenen Linie etwa $\delta\lambda/\lambda = 0{,}33 \cdot 10^{-3}$. Hieraus berechnen sich die Geschwindigkeiten:

$v = 1{,}4 \cdot 10^7$ cm/sec für die schnellsten Strahlen und

$v = 1 \cdot 10^7$ cm/sec für die Strahlen von mittlerer Geschwindigkeit.

Gleichzeitig wurde der Anodenfall gegen eine aus einem Kupferdraht bestehende, in etwa 2 cm Entfernung von der Anode angebrachte Sonde bestimmt. Derselbe schwankte zwischen 2100 und 2300 Volt. Wenn wir annehmen, daß die Anodenstrahlen, gerade wie man dies für die Kathodenstrahlen voraussetzt, ihre Geschwindigkeit dem Potentialfall an der Elektrode verdanken, so ergibt sich aus obigen Zahlen für die schnellsten Strahlen das Verhältnis ε/μ. Man findet (für einen mittleren Wert des Anodenfalles von 2200 Volt):

$$\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)_{Na} = 0{,}45 \cdot 10^3 \text{ abs.}$$

Da, wie bekannt, für ein elektrolytisches Wasserstoffion

$$\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)_{H} = 9{,}5 \cdot 10^3,$$

so folgt:

$$\frac{\mu_{Na}}{\mu_H} = 21,$$

mithin nahezu das *Atomgewicht des Natriums.*

§ 17. Die früher gefundene (vgl. § 14) magnetische Ablenkung der Anodenstrahlen haben wir des näheren quantitativ untersucht. Wir bedienten uns dazu einer Anordnung, welche der in § 14 durch Fig. 9 dargestellten nachgebildet war, doch mit dem Unterschiede, daß die Kathode eine geeignetere Lage besaß, so daß die Polschuhe N und S näher an die Bahn der Strahlen herangerückt werden konnten. Der benutzte Magnet

war die große Type des Du Boisschen, von Hartmann und Braun fabrizierten Elektromagneten; die Polschuhe hatten eine Distanz von 9 cm, so daß der etwa 4 cm lange Anodenstrahl auf seinem ganzen Wege in konstantem Felde verlief; die Glaskugel der Röhre hatte einen Durchmesser von etwa 8,8 cm. Als Diaphragma diente ein dünnes Kupferblech, das einen Schlitz von $0{,}5 \times 6$ mm trug und ungefähr in der Mitte des gesamten Weges stand, welchen die Strahlen zurücklegten. Der Anodenfall konnte mit Hilfe einer Sonde bestimmt werden.

Das Ergebnis dieser Messungen an einer Reihe von Anoden, welche aus Gemischen von Kohlepulver mit bzw. Natriumjodid, Lithiumjodid, Strontiumjodid (gemischt mit Strontiumbromid) bestanden, ist in folgenden Tabellen zusammengestellt. Hier bedeuten:

V den Anodenfall,
H die magnetische Feldstärke,
$2x$ die doppelte magnetische Ablenkung der Strahlen,
a bzw. b die Entfernungen des Diaphragmas bzw. des Endpunktes der Bahn der Strahlen von der Anodenoberfläche.

Die der Rechnung zugrunde liegenden Formeln sind die bekannten:

$$v = \frac{2V}{rH}, \quad \frac{e}{\mu} = \frac{2V}{r^2H^2};$$

hier ist r (der Krümmungsradius der Bahn) gleich $\frac{b(b-a)}{2x}$.

I. Natrium.

V (Volt)	H (Gauss)	$2x$ (mm)	a (cm)	b (cm)	v (cm/sec)	$\frac{e}{\mu}$ (abs.)	$\frac{\mu_{Na}}{\mu_H}$
3800	910	1,7	2,1	4,0	$1{,}87 \cdot 10^7$	$0{,}46 \cdot 10^8$	21
3800	910	1,6	2,1	4,0	$1{,}76 \cdot 10^7$	$0{,}41 \cdot 10^8$	23

Beide Messungen ergaben sonach wieder, im Einklang mit dem aus dem Dopplereffekt erhaltenen Ergebnis (vgl. § 21) für die Masse des Teilchens innerhalb der Beobachtungsfehler das *Atomgewicht des Natriums*. Die Zahlen für die Geschwindigkeit v sind hier etwas größer, entsprechend dem größeren Potential. Zu bemerken ist noch, daß die Ablenkungen $2x$ sich auf die am wenigsten ablenkbaren Strahlen beziehen; die

Ablenkungen der in dem beobachteten (vgl. § 14) magnetischen Spektrum enthaltenden Strahlen haben wir nicht angegeben, da sie vermutlich von Strahlen herrühren, die eine kleinere Geschwindigkeit besitzen, als dem Anodenfall entspricht. Dieses Vorhandensein von langsameren Strahlen geht auch aus § 16 hervor.

II A. Lithium. Hauptintensität.

V (Volt)	H (Gauss)	$2x$ (mm)	a (cm)	b (cm)	v (cm/sec)	$\frac{\varepsilon}{\mu}$ (abs.)	$\frac{\mu_{Li}}{\mu_H}$
2600	900	3,8	1,55	3,9	$2{,}40 \cdot 10^7$	$1{,}11 \cdot 10^8$	8,6
3200	900	3,5	1,55	3,9	$2{,}71 \cdot 10^7$	$1{,}15 \cdot 10^8$	8,3

II B. Lithium. Steifste Strahlen.

V (Volt)	H (Gauss)	$2x$ (mm)	a (cm)	b (cm)	v (cm/sec)	$\frac{\varepsilon}{\mu}$ (abs.)	$\frac{\mu_{Li}}{\mu_H}$
2600	900	3,0	1,55	3,9	$1{,}89 \cdot 10^7$	$0{,}69 \cdot 10^8$	14
3000	910	3,0	1,75	3,95	$2{,}27 \cdot 10^7$	$0{,}86 \cdot 10^8$	11
3500	910	2,0	2,3	3,9	$2{,}46 \cdot 10^7$	$0{,}87 \cdot 10^8$	11

Beim Lithium erhielt man sonach, im Gegensatz zum Natrium, für die steifsten Strahlen *nicht* das Atomgewicht des Lithiums, sondern einen größeren Wert. Nur für die Hauptintensität kommt man dem Atomgewicht nahe. Man kann dieses Ergebnis auf verschiedene Weisen erklären. Zum Beispiel kann man nach dem Vorgange von Stark[1]) annehmen, daß die Lithiumanodenstrahlen aus Li-Atomen bestehen, deren Ladungen zum Teil während der Zeit, wo sie ihre Bahn vollenden, neutralisiert wurden, so daß sie nicht auf dem ganzen Wege eine Ablenkung durch das magnetische Feld erfahren. Unter dieser Annahme wären dann also die in Tab. II B berechneten Werte von v zu klein und von μ_{Li}/μ_H zu groß. Ferner wird man schließen, daß die Hauptmenge der Strahlen, wie aus Tab. II A hervorgeht, von solchen Lithiumteilchen gebildet wird, die fast den ganzen Weg als

1) J. Stark, Physik. Zeitschr. 4₃ p. 583—586. 1903.

geladenes Atom vollenden. An die letzteren schließt sich dann wieder ein Spektrum von stärker ablenkbaren Strahlen an, ganz wie im Falle des Natriums. Daß wir beim Natrium keine Strahlen von geringerer Ablenkung gefunden haben, liegt vielleicht daran, daß die Natriumstrahlen weniger lichtstark waren als die Lithiumstrahlen.

III. Strontium.

V (Volt)	H (Gauss)	$2x$ (mm)	a (cm)	b (cm)	v (cm/sec)	$\frac{\varepsilon}{\mu}$ (abs.)	$\frac{\mu_{Sr}}{\mu_H}$
2800	910	1,4	2,0	4,0	$1{,}08 \cdot 10^7$	$0{,}21 \cdot 10^8$	90

Bei der Berechnung von μ_{Sr}/μ_H wurde angenommen, daß die Ladung ε des Strontiumteilchens doppelt so groß ist als diejenige des Natrium- und Lithiumteilchens. Diese Annahme entspricht der Zweiwertigkeit des Strontiums und führt, wie aus obiger Messung ersichtlich ist, fast genau auf das Atomgewicht des Strontiums. — Wie hier noch bemerkt werden mag, ist die Farbe der Strontiumanodenstrahlen indigoblau; im Spektrum beobachtet man intensiv die blaue Strontiumlinie.

§ 18. Aus den in § 16 und § 17 mitgeteilten Beobachtungen möchten wir schließen, *daß die von Natrium, Lithium und Strontium unter den angewendeten Versuchsbedingungen erzeugten Anodenstrahlen aus geschleuderten Metallionen bestehen und daß die Energie der Strahlen der Hauptsache nach von dem elektrischen Kraftfelde herrührt*, welches sie durchlaufen, in diesem Falle also vom Anodenfall. Ferner wird man annehmen dürfen, daß ein großer Teil der Strahlen von der Anode selbst seinen Ausgang nimmt und daß für diesen die gleichen Gesetze gelten, welche auch das Verhalten der Kathodenstrahlen bestimmen.

Die Parallele zwischen den Strahlen von der Kathode und der Anode ist eine sehr weitgehende. Man kann geradezu behaupten, daß die Anodenstrahlen ein den Kathodenstrahlen völlig entsprechendes Phänomen darstellen. Denn die Anodenstrahlen besitzen die hauptsächlichsten Eigenschaften der Kathodenstrahlen: sie transportieren eine elektrische Ladung, werfen an Körpern, die ihnen in den Weg gestellt sind, scharfe

Schatten, stehen senkrecht zur Oberfläche der Elektrode, werden durch ein elektrisches und magnetisches Feld abgelenkt und erregen endlich an geeigneten Körpern, auf welche sie treffen, Fluoreszenzlicht.

Zum Schluß wollen wir die zu obigen Untersuchungen in Beziehung stehenden Literaturangaben, soweit uns diese bekannt sind und soweit sie uns von Belang erscheinen, hier anführen.

Schon Hittorf[1]) beobachtete, daß bei kleinem Abstand zweier Elektroden in einer Vakuumröhre eine eigentümliche Zerstiebung der Anode eintreten kann, während die Kathode, welche doch sonst sich erhitzt und zerstäubt, kalt und unversehrt bleibt. Diese vollständige Umkehrung der Wärmeverhältnisse an Anode und Kathode hatte, wie Hittorf angibt, auch bereits Gassiot[2]) im niederen Vakuum beobachtet. Später sind diese Wirkungen am elektrischen Lichtbogen eingehend von den verschiedensten Forschern studiert worden; es mag im Zusammenhang hiermit daran erinnert werden, daß beim Lichtbogen die Anode vor der Kathode durch einen höheren Wert des Potentialfalles ausgezeichnet ist. Gassiot und Hittorf haben übrigens ihre Beobachtungen an *Kohle*anoden angestellt.

Eine Bewegung positiver, von der Anode herkommender Teilchen im Sinne des elektrischen Stromes beobachtete E. Warburg[3]) in einer Natriumdampf enthaltenden Geisslerschen Röhre. Wir zitieren im folgenden die betreffende Stelle aus der Abhandlung Warburgs:

„§ 5. Mit der Entwickelung des Natriums an einer Glasanode ist eine Erscheinung verbunden, welche für die Glimmentladung nicht ohne Interesse ist und am sichersten in Wasserstoffgas von etwas höherem Druck (von 6 mm ab aufwärts) beobachtet wird. Man bemerkt dabei nämlich um das negative Glimmlicht herum eine breite, gelbe Aureole von Natriumdampf, welcher durch die Kathodenstrahlen erleuchtet wird. Diese Aureole verschwindet auf der Stelle, wenn der Platin-

1) W. Hittorf, Pogg. Ann. **136.** p. 210. 1869.
2) J. P. Gassiot, Pogg. Ann. **119.** p. 134. 1863.
3) E. Warburg, Wied. Ann. **40.** p. 1—17. 1890.

draht *A* zur Anode gemacht wird, also kein Natrium neu entwickelt wird, und tritt sofort wieder hervor, wenn man den Strom am Glase in das Gas eintreten läßt, sie rührt also unzweifelhaft her von Natriumteilchen, welche an der Anode frei geworden, im Sinne des positiven Stromes fortgeführt werden."

W. Wien[1]) hat ebenfalls Erscheinungen beobachtet, die auf das Vorhandensein von Anodenstrahlen hinzudeuten schienen. Er beschreibt unter der Überschrift „Über die Vorgänge an der Anode" Beobachtungen über das Auftreten positiver Teilchen an der Anode, die magnetisch stark zu beeinflussen sind und mit einem gewöhnlichen Hufeisenmagneten in entgegengesetztem Sinne wie Kathodenstrahlen abgelenkt werden können.

Ferner mag hingewiesen werden auf Beobachtungen Warburgs[2]) an der Spitzenentladung, auf Versuche von Riecke und Stark[3]) am Lichtbogen in Luft, und endlich auf eine Mitteilung von Wiedemann und Wehnelt[4]) über den Vakuumlichtbogen an Metallanoden.

Daß manche Salze beim Erhitzen die umgebende Luft leitend machen, fand Beattie[5]); derselbe Autor konstatierte später[6]), daß Körper, wie z. B. Kaliumdichromat oder Lithiumchlorid, die mit Jod oder Brom behandelt und auf Zinkstreifen aufgetragen waren, beim Erhitzen die umgebende Luft leitend machten, vorausgesetzt, daß sie positiv geladen waren; negative Ladung ergab keinen merklichen Effekt. A. E. Garrett und R. S. Willows[7]) haben sodann genauere Messungen hierüber angestellt. Richardson[8]) fand, daß ein frischer ge-

1) W. Wien, Wied. Ann. **65**. p. 449—450. 1898.

2) E. Warburg, Ann. d. Phys. **2**. p. 299—302. 1900.

3) E. Riecke u. J. Stark, Physik. Zeitschr. **5**. p. 537—538. 1904.

4) E. Wiedemann und A. Wehnelt, Physik. Zeitschr. **6**. p. 690. 1905.

5) J. C. Beattie, Phil. Mag. (5) **48**. p. 97—106. 1899.

6) l. c. (6) **1**. p. 442—454. 1901.

7) A. E. Garrett und R. S. Willows, Phil. Mag. (6) **8**. p. 437 bis 454. 1904.

8) O. W. Richardson, Physik. Zeitschr. **5**. p. 6—11. 1904; **6**. p. 914—915. 1905; Cambr. Phil. Soc. **13**. p. 192. 1906; vgl. ferner G. C. Schmidt u. W. Hechler, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. **9**. p. 39—48. 1907.

glühter Platindrat im Vakuum positive Ionen aussendet, mit der Zeit aber diese Eigenschaft verliert und sie auch von selbst nicht wieder erlangt. Durch geeignete Behandlung, wie z. B. Bestrahlung mit einer sekundären, leuchtenden Entladung, erhält indes der Platindraht seine verloren gegangene Emmissionsfähigkeit wieder. Richardson äußert dabei die Ansicht, daß möglicherweise eine auf dem Platin befindliche Fremdsubstanz hier wirksam sei.

Charlottenburg, Physikalisch-Technische Reichsanstalt.

(Eingegangen 11. März 1908.)

4. *Über das Verhalten fester, insbesondere pulverförmiger Körper in bewegten Flüssigkeiten und Gasen;*
von Johann Sahulka.

H. Helmholtz bespricht in der Abhandlung „Zur Theorie der stationären Ströme in reibenden Flüssigkeiten“[1]) einige von Schklarewsky ausgeführte Versuche. Sowohl in Kapillarröhren, als auch in 1—5 cm weiten Röhren, welche mit einer Flüssigkeit gefüllt sind, in der sich mikroskopisch kleine feste Körperteilchen suspendiert befinden, streben diese stets, sich gegen die Mitte der Röhren zu bewegen. Auch eine Kugel aus Wachs, welches wenig schwerer als Wasser ist, fällt in einem vertikalen, mit Wasser gefüllten Rohr stets so, daß sie von der Wand gleichsam gegen die Mitte abgestoßen wird. Wird die Wachskugel durch einen schwachen, aufwärts gerichteten Wasserstrom im Rohr am Sinken gehindert, so stellt sie sich stets in die Mitte des Rohres ein; wenn man die Kugel durch Neigen oder Schütteln der Röhre der Wand nähert, bewegt sie sich doch, sobald man damit aufhört, wieder zur Mitte der Röhre. Helmholtz sagt: „Diese Erscheinungen stehen im Gegensatze zu einem von W. Thomson aufgestellten Theorem, wonach ein Körper, der in einer nicht reibenden Flüssigkeit nahe einer senkrechten Wand fällt, von dieser angezogen wird, und zu ihr hineilt. Diese Erscheinung tritt ein, wenn man schwere Kugeln, z. B. grobes Bleischrot, in einem vertikalen Zylinder fallen läßt. Diese fallen schneller als die Wachskugeln und dadurch erhalten jene Druckunterschiede, welche vom Quadrate der Geschwindigkeit abhängen, größeren Einfluß. Man hört in der Tat eine solche Kugel, die man in

1) H. Helmholtz, Wiss. Abhandlungen, 1. p. 223. Leipzig 1881.

der Nähe der Wand eines mit Wasser gefüllten vertikalen Zylinders fallen läßt, mehrmals an die Wand anschlagen, ehe sie den Boden erreicht."

Helmholtz vermutete, daß die bei geringeren Geschwindigkeiten beobachteten Abweichungen vom Einfluß der Reibung herrühren. Das Ergebnis einer angestellten Berechnung, wobei jedoch nur die ersten Potenzen der Geschwindigkeiten berücksichtigt wurden, war, daß bei verschwindend kleinen Geschwindigkeiten und stationärem Strome die Strömungen in einer reibenden Flüssigkeit sich so verteilen, daß der Verlust an lebendiger Kraft durch die Reibung ein Minimum wird, vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeiten längs der Grenzen der Flüssigkeiten als fest gegeben betrachtet werden; ferner ergab sich aus der Rechnung, daß ein schwimmender Körper in einer reibenden, in langsamem stationärem Strome fließenden Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, wenn die Reibung im stationären Strome ein Minimum ist. Helmholtz betrachtete durch diese theoretischen Ergebnisse die von Schklarewsky beobachteten Erscheinungen nicht für aufgeklärt, und schrieb dies dem Umstande zu, weil er in der Rechnung die quadratischen Glieder der Geschwindigkeiten nicht berücksichtigte. Man sagt jedoch gewöhnlich, daß sich das Pulver oder die Wachskugel in den Röhren zur Mitte derselben bewegen, weil dort die kleinste Reibung zu überwinden ist. In gleicher Weise wird die alltäglich zu beobachtende Erscheinung erklärt, daß sich ein Pulver, welches in ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß gebracht wird, nach dem Umrühren der Flüssigkeit stets in der Mitte des Gefäßes sammelt, und daß sich in einem Luftwirbel der Staub im Zentrum des Wirbels ablagert. Hierher ist auch die von Prof. G. Jäger[1]) beschriebene Erscheinung zu zählen, daß ein Gummigutttropfen, welcher auf Wasser, welches in einem zylindrischen Gefäße langsam rotiert, mittels eines Pinsels exzentrisch aufgetragen wird, sich derart deformiert, daß er eine im Sinne der Rotation sich gegen das Zentrum des Gefäßes einrollende Spirale bildet.

Alle diese Erscheinungen lassen sich jedoch in einfacher

---

1) G. Jäger, „Die Gummiguttspirale", Wiener Ber. 112. Math.-phys. Kl. Abt. IIa. p. 1685. 1903.

Weise aus den bekannten Gesetzen über die Flüssigkeitsdrücke und Fliehkräfte erklären.

Es möge zunächst der Fall besprochen werden, daß in einer tropfbaren oder gasförmigen Flüssigkeit eine Wirbelbewegung hervorgerufen wird, so daß sich die Flüssigkeitsteilchen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_1 drehen. In diesem Falle erleidet ein in der Flüssigkeit befindlicher fester Körper, da der Flüssigkeitsdruck an der von der Achse des Wirbels abgewendeten Seite größer ist als an der zugewendeten Seite, einen Zug P_1 gegen die Rotationsachse, welcher gleich ist der zentripetalen Kraft auf einen gleich großen Flüssigkeitskörper. Nennt man m_1 die Masse der verdrängten Flüssigkeit und r den Abstand des Schwerpunktes derselben von der Rotationsachse, so ist $P_1 = m_1 r \omega_1^2$. Wenn der feste Körper die Masse m_2 hat und mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2 an der Rotation teilnimmt, so wirkt auf ihn eine Fliehkraft P_2 in radialer Richtung nach außen, wobei $P_2 = m_2 r \omega_2^2$ ist. Wenn $P_2 > P_1$ ist, muß sich der Körper gegen den Rand des Gefäßes bewegen, im entgegengesetzten Falle gegen die Rotationsachse. Wird in einem Gefäße, in welchem sich Flüssigkeit und ein spezifisch schwereres Pulver befindet, die Flüssigkeit und das Pulver in gleich schnelle Rotation versetzt, so bewegt sich das Pulver gegen die Seitenwand des Gefäßes. Wenn man die Flüssigkeit sich selbst überläßt, nimmt die Geschwindigkeit der Pulverteilchen infolge der Reibung an der Seitenwand und an dem Boden des Gefäßes rascher ab als die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen. Sobald P_2 kleiner geworden ist als P_1, müssen sich die Pulverteilchen, da sie noch eine Rotationsbewegung haben und gleichzeitig eine Kraft gegen die Rotationsachse wirkt, spiralförmig gegen die Mitte des Gefäßes bewegen, wo sie sich nach Vernichtung der Rotationsbewegung ablagern. Wenn in dem Gefäße die Flüssigkeit und das auf der Bodenfläche befindliche Pulver ruht und die Flüssigkeit nur in schwache Rotation versetzt wird, so daß das Pulver gerade noch in Bewegung kommt, so muß es sich von Anfang an spiralförmig gegen die Mitte des Gefäßes bewegen, weil $P_2 < P_1$ ist. Wird in dem angenommenen Falle ein stärkerer Wirbel erzeugt, so bewegt sich das Pulver anfänglich, solange $P_2 < P_1$ ist, gegen die Mitte des Gefäßes,

hierauf, wenn es infolge der Reibung mit der Flüssigkeit eine hinreichend große Geschwindigkeit erlangt, von der Mitte spiralförmig weg und erst dann, wenn infolge der Reibung mit den Gefäßwänden die Geschwindigkeit entsprechend abgenommen hat, wieder spiralförmig gegen die Mitte. Bringt man auf eine rotierende Flüssigkeit Körperteilchen, welche leichter sind als die Flüssigkeit und daher auf derselben schwimmen, so bewegen sich diese Teilchen auch in dem Falle, wenn sie mit gleicher Geschwindigkeit wie die Flüssigkeit rotieren, gegen die Mitte der Flüssigkeit, weil $P_2 < P_1$ ist. Bei dem von Prof. Jäger angestellten Versuche erlangt der Gummiguttropfen, welcher auf das mit geringer Geschwindigkeit rotierende Wasser exzentrisch aufgebracht wird, zunächst die Gestalt eines auf dem Wasser schwimmenden scheibenförmigen Fleckes. Infolge der Reibung mit dem Wasser werden die unteren Schichten des Fleckes in der Richtung der Rotation mitgenommen und dadurch der Fleck ausgezogen, wobei der in der Richtung der Rotation voraus befindliche Teil desselben dünner ist als der rückwärtige Teil und daher leichter von der Flüssigkeit mitgenommen wird; der Fleck muß sich daher immer mehr und mehr in der Richtung der Rotation der Flüssigkeit ausdehnen. Da aber die Geschwindigkeit des Gummiguttes kleiner ist als die des Wassers und das Gummigutt überdies leichter ist als das Wasser, so ist stets $P_2 < P_1$ und folglich muß der Fleck die Form einer sich gegen die Mitte des Wassers einrollenden Spirale annehmen. Die Erscheinung, daß sich in einem Luftwirbel der Staub im Zentrum des Wirbels ablagert, ist auch in derselben Weise zu erklären wie die Bewegung pulverförmiger schwerer Körper in einer rotierenden Flüssigkeit.

Es möge nun der Fall betrachtet werden, daß eine Wachskugel, welche wenig schwerer ist als Wasser, was durch Einfügen eines schwereren Kernes leicht erreichbar ist, in einer zylindrischen mit Wasser gefüllten Röhre nahe der Wand fallen gelassen wird, oder daß man die Kugel durch einen schwachen nach aufwärts gerichteten Wasserstrom in der Röhre schwebend erhält. Beide Fälle sind gleichwertig, da die Wirkung bloß von der relativen Bewegung des Wassers und der Kugel abhängt. Man kann daher, wie in der Fig. 1 ge-

zeichnet ist (statt einer Röhre ist nur ein niedriges Gefäß dargestellt), annehmen, daß das Wasser sich in der Richtung der Pfeile gegen die ruhende Kugel bewegt. Denkt man sich durch die Kugelmitte eine vertikale Schnittebene in der Rotationsrichtung der Flüssigkeit gelegt, so erkennt man, daß in dieser Ebene die Verteilung des Wassers zu beiden Seiten der Kugel symmetrisch ist. Legt man jedoch eine Schnittebene durch die Rotationsachse und den Mittelpunkt der Kugel, so ist die Wasserverteilung zu beiden Seiten der Kugel ungleich. Die durch die Kugelmitte gelegte Vertikale hat von den Wänden die Abstände $R_1 R_2$, die Kugel von den Wänden die Abstände $r_1 r_2$. Die Kugel setzt dem vorbeiströmenden Wasser ein Hindernis entgegen; dabei findet auf der der Wand näheren Seite $R_1 r_1$ eine verhältnismäßig stärkere Verkleinerung des Flüssigkeitsquerschnittes statt als auf der anderen Seite $R_2 r_2$. Das Wasser drückt daher auf der der Wand näheren Seite stärker gegen die Kugel als auf der der Mitte des Gefäßes zugewendeten Seite. Die Kugel muß sich gegen die Mitte des Gefäßes bewegen. Dies konnte ich auch bei Benutzung einer 1,5 cm weiten Röhre tatsächlich beobachten. Die Kugel macht häufig während des Falles eine Wellenbewegung; sobald sie sich der Gefäßwand sehr nähert, wird sie gegen die Mitte der Röhre abgelenkt, bewegt sich aber vermöge der Trägheit über die Mitte hinaus, wird dann in der Nähe der gegenüberliegenden Gefäßwand wieder abgelenkt, usw. Diese Erscheinung wurde auch beobachtet, wenn der Röhre eine Lage gegeben wurde, welche von der Vertikalen etwas abwich. Auch in diesem Falle blieb die sinkende Kugel nicht an der Gefäßwand. Es ist klar, daß für pulverförmige Körper die gleichen Schlüsse gelten. Jedes Pulverteilchen, welches in einer mit Flüssigkeit gefüllten engen Röhre sinkt, erleidet auf der der Gefäßwand näheren Seite eine stärkeren Seitendruck, als auf der gegen die Mitte des Gefäßes zugewendeten Seite, und muß sich daher, während es sinkt, gegen die Mitte der Röhre bewegen.

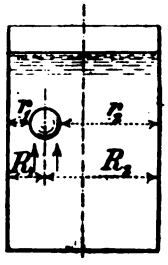


Fig. 1.

Um zu prüfen, ob die gegebene Erklärung richtig ist,

verfertigte ich den in den Figg. 2 und 3 abgebildeten Apparat. Derselbe besteht aus einem 18 cm hohen, 7 cm weiten zylindrischen Blechgefäß, in dessen Wand an diametral gegenüberliegenden Stellen Stopfbüchsen eingesetzt sind, in welchen Manometerröhren M_1 M_2 verschiebbar sind. Am oberen Ende der Gefäßwand sind in dieselbe oberhalb der Stopfbüchsen Führungsstangen F_1 F_2 eingeschraubt, welche von Ösen umschlossen werden, die am Deckel D des Gefäßes angeschraubt

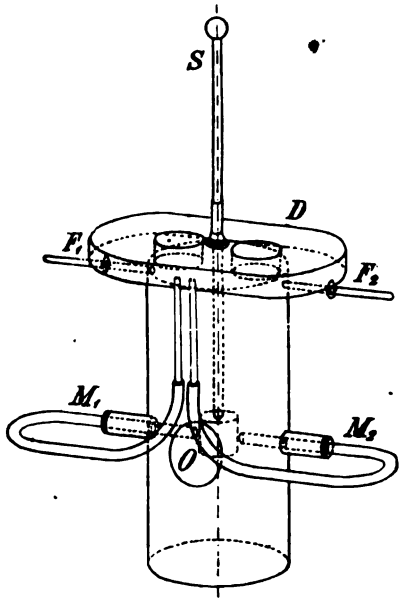


Fig. 2.

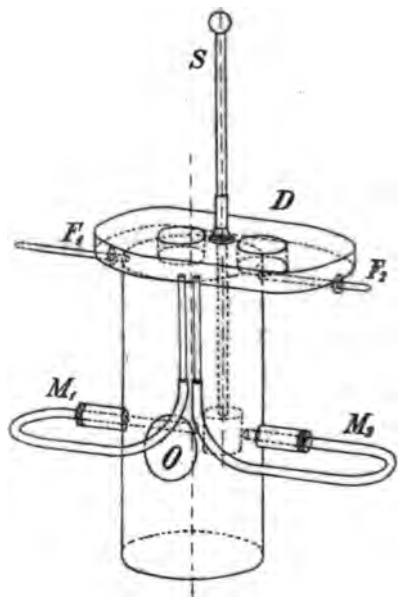


Fig. 3.

sind. Durch den Deckel kann eine Stange S, an deren unteres Ende ein Zylinder, eine Kugel oder ein anderer Körper angeschraubt werden kann, niedergestoßen werden. Im Deckel sind zwei Schauöffnungen angebracht; auch in die Gefäßwand sind an gegenüberliegenden Stellen zwei Schaugläser O eingesetzt, von welchen aber nur das vordere Schauglas gezeichnet ist. Das Gefäß wird mit Wasser gefüllt. In der Fig. 2 ist angenommen, daß der Deckel eine solche Lage hat, daß die Stange S und der an derselben angeschraubte zylindrische

Körper sich in der Mitte des Gefäßes befinden. Die Manometerröhrchen M_1 M_2 werden so eingestellt, daß sie von dem Körper nur einen sehr kleinen Abstand haben. Die Röhrchen sind so gebogen, daß die Glasröhrchen, in welche sie endigen, sich dicht nebeneinander befinden. Hält man den Deckel fest, hebt die Stange und stößt man hierauf mittels derselben den zylindrischen Körper rasch durch das Wasser zwischen den Manometern abwärts, so sieht man, daß in beiden Manometern das Wasser infolge des momentan entstehenden stärkeren Druckes gleich hoch steigt. Wenn man jedoch, wie in der Fig. 3 dargestellt ist, die Stange und die Manometer exzentrisch einstellt, so beobachtet man, daß während des Niederstoßens des Zylinders der Flüssigkeitsdruck auf der Seite, wo die Gefäßwand am nächsten ist, stärker ansteigt als auf der entgegengesetzten Seite. Im Manometer M_2 steigt das Wasser höher als in M_1. Wenn die Einstellung so gemacht wird, daß der an der Stange S befestigte Körper sich ganz nahe der Gefäßwand bewegt, kann leicht erreicht werden, daß das Wasser im Manometer M_2 um 6—8 mm höher steigt als in M_1. Das Ergebnis ist in Übereinstimmung mit der gegebenen Erklärung. Eine Druckverminderung konnte niemals auf der der Gefäßwand näheren Seite des durch die Flüssigkeit bewegten Körpers beobachtet werden.

Mit Rücksicht auf das erhaltene Ergebnis sollte erwartet werden, daß auch Bleischrot, welcher in einer Röhre in der Nähe der Wand fällt, von dieser abgelenkt wird, was aber gemäß der Abhandlung von Helmholtz nicht der Fall sein soll. Ich dachte daran, daß vielleicht dadurch, daß die Flüssigkeit zwischen der Bleikugel und der nahen Wand viel rascher emporströmt, als auf der gegenüberliegenden Seite der Bleikugel, eine hydrodynamische Saugwirkung entsteht. Die mit dem Apparate gemäß Fig. 3 gemachten Versuche sprachen aber dagegen; die Fallgeschwindigkeit der Bleikugeln war auch kaum größer als die Geschwindigkeit, mit welcher der an der Stange befestigte Körper in Fig. 3 nach abwärts bewegt wurde. Bei Versuchen, die ich mit Bleischrot von 5 mm Durchmesser und mit Wasser gefüllten Röhren ausführte, konnte ich nur ausnahmsweise ein Anschlagen der Bleikugeln an die Gefäßwand wahrnehmen, was ich in folgender Art erkläre. Sobald

man eine Bleikugel aus einer Höhe von einigen Zentimetern oder aus größerer Höhe in das Wasser fallen läßt, schlägt die Kugel in das Wasser mit solcher Geschwindigkeit ein, daß das Wasser, welches der Kugel ausweichen mußte, sich nicht unmittelbar hinter der Kugel vereinigen kann, weil es hierzu eine gewisse Zeit braucht. In der Fig. 4 ist der Moment des Einschlagens der Kugel in das Wasser dargestellt. Während der weiteren Bewegung der Kugel kann sich das Wasser, weil die Geschwindigkeit der Kugel groß bleibt, aus gleichem Grunde nicht unmittelbar hinter der Kugel vereinigen. Die Luftblase bleibt daher an der Kugel haften und trennt sich erst los, wenn die Kugel auf den Boden des Gefäßes aufstößt. Wenn die Kugel in sehr kleiner Höhe über dem Wasser losgelassen wird, hat sie beim Einschlagen in das Wasser eine kleine Geschwindigkeit, weshalb keine Luft mitgenommen wird. Läßt man aber die Kugel aus einer Höhe von mehreren Dezimetern in das Wasser fallen, so bildet sich an der Kugel anfänglich eine sehr lange Luftblase. Infolge der Abnahme der Geschwindigkeit der Kugel kann die lange Blase nicht erhalten bleiben; während des Falles der Kugel trennen sich daher mehrere Blasen ab, doch bewegt sich eine Blase mit der Kugel bis an den Boden des Gefäßes. Läßt man die Kugel in der Nähe der Rohrwand aus einer Höhe von einigen Zentimetern fallen, so kann die Luftblase nicht eine symmetrische Form haben wie in dem Falle, wenn die Kugel in der Mitte des Rohres fällt, weil an der Seite der Wand der Flüssigkeitsersatz schwer möglich ist; es mag daher manchmal der Fall sein, daß die Luftblase unmittelbar an die Gefäßwand angrenzt. Die unsymmetrische Form der Luftblase in dem Falle, wenn die Kugel dicht neben der Gefäßwand fällt, mag die Ursache sein, daß die Kugel sich während des Falles gegen die Wand bewegt und an diese anschlägt. Wenn ich die Kugel aus geringer Höhe fallen ließ, so daß sich keine Luftblase mit der Kugel bewegte, konnte ich ein Anschlagen der Kugel an die Wand nicht wahrnehmen. Aus der zitierten Abhandlung ist nicht zu ersehen, wie Herr Schklarewsky den Versuch ausführte, und ist es daher auch nicht möglich, aus den von ihm

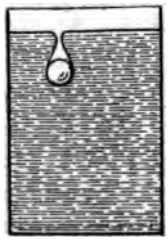


Fig. 4.

angeführten Ergebnissen den Schluß zu ziehen, daß die Bleikugel sich anders verhalte wie die Wachskugel.

Die Erscheinung, daß man in seichtem Wasser schwerer schwimmt als in tiefem Wasser, ist ebenfalls darauf zurückzuführen, daß das Wasser in ersterem Falle schwerer unter der schwimmenden Person ausweicht und daher stärker gegen dieselbe drückt als im zweiten Falle.

Wien, 14. Januar 1908.

(Eingegangen 15. Januar 1908.)

5. *Zur Berechnung der molekularen Dimensionen;* *von H. Sirk.*

Wie in der kinetischen Gastheorie gezeigt wird, ist die absolute Anzahl der Molekeln im mm³ Gas

$$N = \frac{1}{320\, L^3 x^2},$$

wo L die mittlere freie Weglänge in Millimetern und x der Raumerfüllungskoeffizient ist. Nach dem Gesetz von Avogadro ist nun für alle Gase N unter gleichen Bedingungen des Druckes und der Temperatur sehr nahe gleich groß. Es muß daher unter diesen Bedingungen für alle Gase

$$L^3 x^2 = \text{konst.}^{1})$$

sein, was im folgenden geprüft werden soll.

Diese Beziehung deckt sich ihrem Inhalte nach mit der von Dorn[2]) gegebenen, unter dem Namen des Satzes vom gleichen molekularen Wegvolumen bekannten Relation. Dieser Satz sagt unter Annahme der Gültigkeit des Gesetzes von Avogadro aus, daß

$$\sigma \sqrt{L} = \text{konst.},$$

wo der Molekulardurchmesser $\sigma = 8{,}5\, x\, L$[3]) ist. Dieser Wert, in die Dornsche Relation eingesetzt, gibt

$$x\, L \sqrt{L} = L^{3/2} x = \text{konst.},$$

was sich mit der Beziehung $L^3 x^2 = \text{konst.}$ deckt. Dorn prüfte seine Beziehung, indem er den Raumerfüllungskoeffizienten auf einem später zu erwähnenden Wege aus der Dielektrizitätskonstante berechnet, und findet die Relation bei acht Gasen bestätigt.

1) Vgl. W. Nernst, Theoret. Chem. 5. Aufl. p. 429.
2) E. Dorn, Wied. Ann. 18. p. 380. 1881.
3) Vgl. W. Nernst, Theoret. Chem. 5. Aufl. p. 428.

Rechnungsmethode.

In der folgenden Tabelle sind nun die Werte für $L^3 x^2 . 10^{20}$ für 37 Stoffe berechnet. Zur Bestimmung der Größe von L, der mittleren freien Weglänge, wurden, um die Untersuchung möglichst zu verbreitern und die einzelnen Werte möglichst gut untereinander vergleichbar zu machen, nur die aus Transpirationsversuchen berechneten Werte verwendet. Sie wurden für viele Gase aus dem Werke von O. E. Meyer[1]) entnommen, wo sie für den Druck von 1 Atm. und die Temperatur von 0° C. angeführt sind. Waren dort, wie oft, zwei verschiedene Beobachtungen angegeben (Messungen von Graham und Obermeyer), so wurden beide Werte zur Berechnung verwendet und aus den erhaltenen Resultaten das Mittel genommen. Der von Graham erhaltene Wert für Äthylen wurde jedoch beiseite gelassen, da sein kleiner Betrag auf eine größere Verunreinigung durch Äther hinweist, während Obermayer Vorsichtsmaßregeln angewandt hat, um sein Gas von dieser Verunreinigung zu befreien. Die in dem Werke von O. E. Meyer nicht enthaltenen Werte der Weglänge wurden aus den Tabellen von Landolt-Börnstein entnommen, und zwar wurden die Messungen von L. Meyer und Schumann[2]) und Steudl[3]) verwendet. Waren die Transpirationsversuche bei höherer Temperatur als 0° gemacht worden, so wurden die in den erwähnten Tabellen enthaltenen nach der von Winkelmann[4]) gegebenen Formel auf 0° umgerechneten Werte verwendet, so daß sämtliche Weglängen auf die Temperatur von 0° C. und den Druck von 760 mm bezogen sind. L wurde, in Millimetern ausgedrückt, für die weitere Rechnung verwendet. Bei jedem Stoffe sind die verwendeten Werte von $L . 10^6$ in der zweiten Kolonne von Tab. I angeführt. Wurden bei einem Stoffe zwei Werte von L verwendet, so ist der Mittelwert angegeben. Bei He wurde der von H. Schulze[5]) angegebene Wert verwendet.

1) O. E. Meyer, Kinetische Theorie der Gase. 2. Aufl. p. 192 und p. 198.

2) L. Meyer u. O. Schumann, Wied. Ann. 13. p. 1. 1881.

3) V. Steudl, Wied. Ann. 16. p. 386. 1882.

4) A. Winkelmann, Wied. Ann. 26. p. 31. 1885.

5) H. Schulze, Ann. d. Phys. 6. p. 304. 1901.

Der Raumerfüllungskoeffizient x wurde ebenfalls auf die Temperatur von 0° C. und 760 mm Druck bezogen. Zu seiner Berechnung wurde die ursprünglich von Loschmidt[1]) in seiner epochemachenden Arbeit verwendete, jetzt nur mehr historisch wichtige Methode beiseite gelassen und drei verschiedene Wege verwendet.

Erstens wurde zur Ermittelung von x die van der Waalssche Zustandsgleichung benützt. Nach der ursprünglichen Fassung der Theorie van der Waals beträgt die Konstante b der Zustandsgleichung das Vierfache des von den Molekeln eingenommenen Raumes. Es ist also $x = b/4$ angenommen und b der von Guye[2]) veröffentlichten Zusammenstellung der Werte a und b der Zustandsgleichung aus der dort (p. 519) angegebenen Tab. I entnommen, wo die Werte dieser Größe aus den kritischen Daten berechnet und mit dem Volumen von 0° C. und 1 Atm. Druck als Einheit angegeben sind. Waren aus verschiedenen Beobachtungen der kritischen Daten dort für ein Gas zwei Werte von b abgeleitet, so wurden sie beide in der angegebenen Weise verwendet und dann das Mittel der Resultate genommen. Bei Äthylen, dessen Wert in der angegebenen Zusammenstellung fehlt, wurde der von van der Waals angegebene Wert von b benützt.[3]) Die aus dem so erhaltenen Werte von x berechneten Werte von $L^3x^3 . 10^{20}$ sind in der folgenden Tabelle unter Kolonne A zusammengestellt.

Die übrigen zwei Wege[4]) ergeben sich aus der Theorie von Clausius-Mosotti über die Konstitution der Dielektrika. Aus ihr ergibt sich $x = \frac{K-1}{K+2}$, wo K die Dielektrizitätskonstante ist, unter der Annahme, daß die Molekeln des betreffenden Dielektrikums leitende Kugeln seien. Die Werte von K wurden den Tabellen von Landolt-Börnstein entnommen. Es wurden die Messungen von Boltzmann verwendet, die für 0° und 760 mm Druck angegeben sind, bei CCl_4 wurde der von Bädeker angegebene Wert benützt. Die Raumerfüllung wurde hier zuerst für die Temperatur der

1) J. Loschmidt, Wiener Sitzungsber. **52.** 2. p. 395. 1865.
2) Ph. Guye, Arch. Genève (4) **90.** p. 519. 1900.
3) Vgl. van der Waals, Konfinuität. 2. Aufl. p. 146.
4) Vgl. F. Exner, Wiener Sitzungsber. **91.** 2. p. 850. 1885.

Messung der Dielektrizitätskonstante ermittelt und dann auf 0° und 760 mm Druck umgerechnet unter der Annahme, daß sich der Stoff wie ein ideales Gas verhalte. Bei den übrigen Stoffen, wo die Maxwellsche Beziehung nicht gilt, wurde die Dielektrizitätskonstante nicht verwertet. Die so berechneten Werte von $L^3x^3.10^{20}$ sind unter Kolonne C angeführt.

Setzt man in der eben gegebenen Formel für den Raumerfüllungskoeffizienten nach der elektromagnetischen Lichttheorie $K = n^2$, so ergibt sich $x = \frac{n^2-1}{n^2+2}$. Die Werte des Brechungsindex n sind aus der Zusammenstellung von Brühl[1]), wo sie für 0° C. und 760 mm Druck umgerechnet sind, angeführt. Es wurden hierbei für Gase die Messungen von Mascart verwendet mit Ausnahme von C_2H_5Cl, wo die Bestimmung von Dulong benutzt wurde (vgl. Brühl, l. c. p. 20). Bei Dämpfen (von $T_c = 508$ an) wurden die Messungen von Prytz und Lorentz verwendet. Nur bei Argon und Helium wurden die in den Tabellen von Landolt-Börnstein angegebenen Werte verwendet. Von einer Umrechnung der meist auf die D-Linie sich beziehenden Werte des Brechungsindex auf Licht von unendlich langer Wellenlänge, für welches die Beziehung $K = n^2$ exakt gilt, wurde abgesehen, da der sehr kleine Betrag der Dispersion bei Gasen wegen der Unsicherheit der Messungen des Brechungsindex nicht in Betracht kommt. Die mit dem so erhaltenen Werte des Raumerfüllungskoeffizienten x berechneten Werte von $L^3x^3.10^{20}$ sind unter Kolonne B angeführt.

Die Resultate der Werte für $L^3x^3.10^{20}$ sind bei den verschiedenen Stoffen in der Reihenfolge ihrer kritischen Temperaturen angeführt. Diese sind der erwähnten Zusammenstellung von Guye entnommen und unter T_c angegeben.

Diskussion der Resultate.

Vergleichen wir zunächst die Resultate in Kolonne A mit denen in Kolonne B. Wir sehen, daß die Werte von $L^3x^3.10^{20}$ in Kolonne A ausnahmslos größer sind als in Kolonne B, also bei den Werten, wo der Raumerfüllungskoeffi-

1) J. W. Brühl, Zeitschr. f. physik. Chem. 7. p. 25. 1891; vgl. F. Exner, Wiener Sitzungsber. 91. 2. p. 850. 1885.

Tabelle.

Substanz	$L \cdot 10^6$	T_c	A	B	C
He	276	—	—	1,8	—
H	180	88	28,2	5,0	4,4
N	95	127	15,8	3,4	—
CO	64	133	14,7	4,0	4,3
Ar	99	152	11,2	3,5	—
O	101	155	12,6	3,4	—
NO	94	180	7,0	3,3	—
CH_4	80	191	8,2	4,3	4,9
C_2H_4	52	282	4,4	3,2	2,7
CO_2	64	304	6,0	2,3	2,5
N_2O	63	309	5,8	2,9	3,6
HCl	71	325	7,0	3,2	—
H_2S	60	373	5,0	3,6	—
C_2N_2	40	397	3,5	1,9	—
$(CH_3)_2O$	41	403	4,6	2,4	—
NH_3	71	404	5,8	2,2	—
CH_3Cl	44	415	3,7	2,9	—
SO_2	47	425	4,1	2,3	—
C_2H_5Cl	36	456	4,5	2,2	—
$C_2H_3O_2(CH_3)$	39	507	9,9	3,7	—
$CHO_2(C_2H_5)$	40	508	5,8	4,1	—
$CH_3(OH)$	50	513	7,2	1,7	—
$C_2H_5(OH)$	42	517	6,8	2,5	—
$C_3H_2O_2(C_2H_5)$	33	523	9,5	4,0	—
$C_3H_5O_2(CH_3)$	32	530	8,3	3,2	—
$C_3H_7(OH)$	33	537	6,1	—	—
$CHO_2(C_3H_7)$	33	538	9,1	—	—
i. $C_4H_8O_2(CH_3)$	28	541	8,0	—	—
$C_3H_5O_2(C_2H_5)$	24	546	5,5	—	—
$C_3H_3O_2(C_3H_7)$	28	549	8,7	—	—
CCl_4	31	556	6,4	4,2	5,9
C_2H_5Br	43	—	—	5,3	—
$C_2H_4Cl_2$	33	—	—	2,9	—
$CH_3.CHCl_2$	36	—	—	4,1	—
C_2H_5J	35	—	—	5,0	—
$CHCl_3$	37	—	—	4,6	—
C_3H_7J	29	—	—	3,5	—

zient unter den Voraussetzungen der kinetischen Gastheorie aus der Zustandsgleichung gewonnen wurde, größer als bei den Werten, wo er auf optischem Wege berechnet wurde. Es

hat dies seinen Grund darin, daß bei dieser Art der Berechnung die Raumerfüllung scheinbar kleiner ist als bei Verwendung der Zustandsgleichung. Bei Beurteilung der p. 894 geforderten Konstanz des Produktes L^3x^2 ist zu beachten, daß es durch die Fehler der Bestimmungen von L und x wegen der hohen Potenzen, mit denen diese Größen in die Rechnung eingehen, sehr stark beeinflußt wird; infolgedessen weichen auch bei demselben Stoffe die aus verschiedenen Messungen berechneten Werte von L^3x^2 stark voneinander ab. So z. B. findet man, je nachdem man L nach Obermayer oder nach Graham mit zwei verschiedenen Werten von b aus der erwähnten Tabelle von Guye zur Berechnung von $L^3x^2.10^{20}$ verwendet für:

H	29,1	27,1		
N	16,6	16,1	14,4	13,9
CO	15,9	15,1	14,4	13,7
N_2O	6,6	6,1	5,4	5,0

Wir sehen so, daß die Abnahme mit dem Ansteigen der kritischen Temperatur, welche die Größe L^3x^2 in Kolonne A wenigstens bei den ersten 13 Stoffen zeigt, nicht durch die Fehler der Messungen der in die Rechnung eingehenden Größen bedingt werden kann; wohl aber die unregelmäßigen Schwankungen, die diese Größe außer dieser Abnahme noch zeigt, denn diese bleiben in denselben Grenzen wie die Abweichungen der für denselben Stoff aus verschiedenen Messungen berechneten Werte von $L^3x^2.10^{20}$.

Prüfen wir in derselben Weise die Zahlen von Kolonne B. Wenn wir für L dieselben Werte wie früher verwenden und die Raumerfüllung entweder aus den Messungen des Brechungsindex von Dulong oder von Mascart verwenden, so erhalten wir für:

H_2	4,9	5,2	4,9	5,2
O_2	3,4	3,3	3,4	3,2
CO	4,1	3,8	4,5	4,1

Es scheint also, daß die Schwankungen der Zahlen von Kolonne B nicht ausschließlich durch zufällige Fehler der Messungen bedingt werden. Soweit sich bei der Unsicherheit der in die Rechnung eingehenden Versuchsdaten feststellen läßt, sind die Werte von $L^3x^2.10^{20}$ in der Kolonne B bei

Gasen mit hochzusammengesetzten Molekeln (C_2H_5Cl, SO_2, NH_3, $(CH_3)_2O$) kleiner als wie bei Stoffen mit einfacheren Molekeln. Auffallend erscheint in dieser Hinsicht aber der abnorm kleine Wert 1,8 bei He. Man könnte erwarten, daß das mit seiner Einatomigkeit zusammenhängt. Allein der große Wert von 3,5 für das gleichfalls einatomige Ar läßt uns vermuten, daß jener abnorme kleine Wert durch die gerade hier sehr wahrscheinlichen Meßfehler bedingt wird. Trotz dieser großen, aber unregelmäßigen Schwankungen dieser der absoluten Anzahl der Molekeln im Kubikmillimeter Gas umgekehrt proportionalen Größe sehen wir, daß die Beziehung $L^3x^2 =$ konst. sich in der Kolonne B ausspricht. Jene starken Abweichungen der einzelnen Werte untereinander erklären sich durch die großen Schwierigkeiten, mit denen sowohl die theoretischen Erwägungen, die zur obigen Formel für N führten, als auch durch die Unsicherheit, mit der die Größen L und x behaftet sind. Denn bei ihrer Herleitung aus experimentell gemessenen Daten (vgl. p. 895—897) wurden auch gewisse vereinfachende Voraussetzungen gemacht, die in der Natur nicht zutreffen, wie z. B. die Annahme kugelförmiger Molekeln, und außerdem ist die Messung der zur Berechnung notwendigen Größen, der inneren Reibung der Gase und Dämpfe und des bei diesen Stoffen nur wenig von 1 verschiedenen Brechungsindex mit großen experimentellen Schwierigkeiten verknüpft.

Betrachten wir nun den Umstand, daß der Wert von $L^3x^2.10^{20}$ in Kolonne A mit steigender kritischer Temperatur des betreffenden Stoffes abnimmt, während wir in Kolonne B nur unregelmäßige Schwankungen sehen. Da in den beiden Kolonnen dieselben Werte von L verwendet wurden, so liegt die Ursache der Schwankungen in x. Es scheint also nach dem vorhergehenden, daß die Werte des Raumerfüllungskoeffizienten für gleiche Bedingungen der Temperatur und des Druckes, wie sie aus der Zustandsgleichung berechnet wurden, gegenüber den wahren Werten um so größer erscheinen, je tiefer die kritische Temperatur des betreffenden Stoffes ist.

Ph. Guye[1]) hat nun in seinen 1890 erschienenen Arbeiten

1) Ph. Guye, Arch. d. sciences phys. et nat. Genève 23. 1898; Sur l'equation de M. van der Waals p. 200; Coefficient crilique et la constitution moleculaire des corps p. 204.

eine Vergleichung des aus der Zustandsgleichung ermittelten Wertes des Raumerfüllungskoeffizienten mit dem auf optischem Wege ermittelten durchgeführt. Er berechnete einerseits den

$$\text{kritischen Koeffizienten} = \frac{\text{kritische Temperatur}}{\text{kritischer Druck}},$$

welcher, wie er ausführt, der Größe b der Zustandsgleichung von van der Waals (bezogen auf das Gasvolumen bei 0° C. und 760 mm Druck als Einheit) nahe proportional ist. Andererseits ist die Molekularrefraktion ein Maß des von den Molekeln tatsächlich eingenommenen Raumes, also in Anbetracht des Avogadroschen Gesetzes auch des Raumerfüllungskoeffizienten. Es muß daher der kritische Koeffizient proportional der Molekularrefraktion sein. Guye prüft diese Folgerung, indem er das Verhältnis

$$f = \frac{\text{Molekularrefraktion}}{\text{kritischer Koeffizient}}$$

berechnet und findet es für die meisten untersuchten Stoffe nahe = 1,8. Bei O, CO und N war hingegen f auffallend kleiner, und zwar war es für

N	1,1
O	1,3
CO	1,4

Dies zeigt also im Einklang mit dem vorhergehenden, daß die Raumerfüllung, welche aus der Zustandsgleichung berechnet wird, bei diesen Gasen zu groß ist. Die beiden anderen Gase, bei denen dieser Umstand nach meinen Rechnungen auch sehr auffallend ist, Ar und H, hat Guye noch nicht untersucht. In einer späteren Arbeit[1]) berechnet er den kritischen Koeffizienten für diese Gase und daraus finden wir für f bei

Ar	1,3
H	1,0

Wir sehen also bei Ar, dessen kritische Temperatur nahe bei der des O liegt, denselben Wert von f wie bei diesem Stoffe, und bei H, dessen kritische Temperatur die niedrigste ist, den kleinsten Wert. Es kann dies so gedeutet werden, daß der nach van der Waals berechnete Raumerfüllungskoeffizient

1) Ph. Guye, Arch. de science phys. et nat. Genève 9. p. 528. 1900.

gegenüber dem auf optischem Wege hergeleiteten um so größer erscheint, je tiefer die kritische Temperatur ist. Guye selbst konnte sich jene drei Abweichungen (bei O, N, CO) in keiner Weise erklären. Er vermutete, daß sie daher rühren, daß gerade bei diesen Gasen die Molekularrefraktion weit oberhalb des kritischen Punktes gemessen wurde und vielleicht nicht bis zu so tiefer Temperatur konstant bleibe. Allein, da wir in der Tabelle sahen, daß die mit auf optischem Wege ermittelten Werten von x berechneten Produkte L^3x^2 wohl eine angenäherte Konstanz ergaben, die unter Annahme der van der Waalsschen Zustandsgleichung berechneten aber nicht, so müssen wir annehmen, daß hier die Ursache der Abweichungen in dem Umstande zu suchen ist, daß van der Waals Zustandsgleichung nur eine Annäherung darstellt.

Um so auffallender muß es daher erscheinen, daß das in Rede stehende Abnehmen der Größe L^3x^2 mit der kritischen Temperatur des betreffenden Stoffes Hand in Hand geht mit den Abweichungen von der Regel von Trouton[1]), die sich aus der Zustandsgleichung von van der Waals ebenso, wie aus jeder anderen, die nicht mehr wie drei individuelle Konstante enthält, ableiten läßt. Nach der Regel von Trouton soll bei übereinstimmenden Drucken $\lambda/T = \text{konst.}$, wo λ die molekulare Verdampfungswärme und T die betreffende Siedetemperatur ist. Ursprünglich fand man bei Substanzen von nicht allzu verschiedener Siedetemperatur eine Bestätigung des Gesetzes. „Eine genauere Prüfung unter Berücksichtigung von Substanzen mit sehr verschiedener Siedetemperatur zeigte jedoch, daß obiger Quotient keineswegs konstant ist, sondern ausgesprochen regelmäßig mit der Temperatur ansteigt“ (vgl. Nernst, l. c.).

In Kolonne C sind, wie erwähnt, Werte von $L^3x^2.10^{20}$ angeführt, wo x aus der Dielektrizitätskonstante berechnet ist, und zwar wurde hier die Berechnung nur für jene Stoffe angeführt, wo $K = n^2$. Wenn dies nicht zutrifft, so erhält man für $L^3x^2.10^{20}$ abnorm hohe Werte, z. B. für HCl: 26, NH_3: 175, die also sicherlich mit allen übrigen Werten in keiner Weise

1) Vgl. W. Nernst, Theoret. Chemie 5. Aufl. p. 328 oder Göttinger Nachr. Heft 1. 1906.

vergleichbar sind, während jene Werte, bei denen der auf optischem Wege berechnete Raumerfüllungskoeffizient verwendet wurde, nicht herausfallen. Es steht das auch damit im Zusammenhang, daß wohl der Ausdruck $\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d}$ bei ein und demselben Stoffe von der Temperatur, Dichte und Aggregatzustand nahezu unabhängig ist, die Größe $\frac{K-1}{K+2}\cdot\frac{1}{d}$ aber nicht.[1]) Es steht also dieser Ausdruck zum Volumen der Molekeln nicht in derselben nahen Beziehung wie jener. Wie Nernst vermutet[1]), kann das dadurch erklärt werden, daß die dielektrischen Polarisationen des Lichtes auf einen kleineren gut leitenden Kern des Molekels beschränkt bleiben, während die für sehr lange Wellen gemessene Refraktion, welche ja durch den Ausdruck $\frac{K-1}{K+2}\cdot\frac{1}{d}$ dargestellt wird, das Volumen des Kernes + einer schlecht leitenden Hülle mißt und infolgedessen zur hier in Betracht kommenden Raumerfüllung nicht in der gewünschten nahen Beziehung steht.

Berechnung der Größe $L^3.x^2$ auf anderem Wege.

Schließlich erübrigt es, noch verschiedene neuere Methoden, welche ebenfalls N die Anzahl der Molekeln in Kubikmillimeter Gas zu ermitteln gestatten, ohne jedoch in irgend einer Weise auf den Voraussetzungen der kinetischen Gastheorie zu fußen[2]), zu verwenden, um aus der eingangs gegebenen Gleichung $L^3x^2.10^{20}$ zu berechnen. J. J. Thomson findet die Größe des elektrischen Elementarquantums $e=3{,}4.10^{-10}$ in elektrostatischen Einheiten, woraus $N=3{,}6.10^{16}$. Daraus berechnet sich $L^3x^2.10^{20}=8{,}7$.

H. A. Wilson[3]) findet nach einer etwas abweichenden Methode das elektrische Elementarquantum

$$e = 2.10^{-10} \text{ bis } 4.10^{-10},$$

woraus

$$N = 6.10^{16} \quad „ \quad 3.10^{16},$$

woraus

$$L^3x^2.10^{20} = 5{,}1 \text{ bis } 10{,}4.$$

---

1) W. Nernst, Theoret. Chemie 5. Aufl. p. 317.
2) W. Nernst, l. c. p. 430.
3) H. A. Wilson, Phil. Mag. [5] p. 429. 1903.

Planck[1]) endlich findet aus seiner elektromagnetischen Theorie der Strahlung auf einem Wege, bei dem von experimentell gemessenen Daten nur die Strahlungskonstante eingeht, der also als der genaueste von allen angesehen werden muß, $N = 5{,}0 \cdot 10^{16}$, woraus $L^3 x^2 \cdot 10^{20} = 6{,}2$. Es ist merkwürdig, daß gerade der Weg, welcher zur Bestimmung unserer Größe am zuverlässigsten erscheint, Zahlenwerte ergibt, die etwas größer als die Werte von Kolonne *B* und auffallend kleiner sind als die in Kolonne *A* für Gase von sehr tiefer kritischer Temperatur berechneten Werte.

Im allgemeinen kann man aber sagen, daß man von dieser Übereinstimmung ebenso wie mit der Konstanz der Werte in Kolonne *B* befriedigt sein kann, in Anbetracht des Umstandes, daß die kinetische Gastheorie gewisse vereinfachende Voraussetzungen macht, welche in der Natur sicher nicht zutreffen, wie z. B. die Annahme kugelförmiger Molekeln, und andererseits die zufälligen Fehler der Messungen von sehr großem Einfluß auf die Größe $L^3 x^2$ sind.

Zum Schluß ist es mir eine angenehme Pflicht meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Nernst, für die Anregung zu dieser Arbeit zu danken.

Berlin, Physik.-chem. Institut d. Universität.

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 4. p. 553. 1901.

(Eingegangen 22. Februar 1908.)

6. *Über die Temperatur der Sonne;* *von D. A. Goldhammer.*

Erste Mitteilung.

I.

Gewöhnlich sucht man sich eine Vorstellung über die mperatur der Sonne dadurch zu bilden, daß man auf die nnenstrahlung eine der drei Beziehungen anwendet, welche r für einen absolut schwarzen Körper gelten. Diese Be-hungen sind bekanntlich

$$e = A T^4,$$
$$e_m = B T^5,$$
$$\lambda_m T = 2940$$

d führen zu den Zahlen für T, die ziemlich untereinander ereinstimmend etwa um 6000° abs. schwanken und natür-h nur als eine *untere* Grenze für die wirkliche Temperatur r Sonne dienen können. Führen wir die Benennung „schwarze mperatur" S in einem etwas allgemeineren Sinne, als es i Holborn und Kurlbaum[1]) geschehen ist, ein, und nennen *de* Temperatur „schwarz", wenn dieselbe aus einer *be-bigen*, aber nur für einen vollkommen schwarzen Körper ltenden Formel berechnet wird, so kann man für jede rein ermaktine Strahlung unendlich viele Werte für S ableiten, ren drei den Gleichungen

)
$$e = A S_1^4,$$
)
$$e_m = B S_2^5,$$
)
$$\lambda_m S_3 = 2940$$

nügen und alle anderen aus der Planckschen Formel

)
$$e_\lambda \lambda^5 \left(e^{\frac{c}{\lambda S}} - 1 \right) = C$$

lgen und mit der Wellenlänge λ veränderlich sind.

1) L. Holborn u. F. Kurlbaum, Ann. d. Phys. 10. p. 225. 1903.

In allen Fällen bietet offenbar das größte Interesse nur derjenige Wert von S dar, welcher möglichst groß ausfällt, und daher möglichst nahe an die wirkliche Temperatur des strahlenden Körpers kommt. Nun können sich solche Werte von S nur aus der Formel (4) ergeben, falls e_λ auf der ganzen Länge des Spektrums bekannt ist. Aus (1) und (2) folgen immer viel kleinere Zahlen und (3) ist überhaupt nicht anzuwenden.

In der Tat, es sei S_m der maximale Wert von S, der sich aus der Gleichung (4) berechnen läßt; dann ist

$$S_m > S,$$

$$e_\lambda \lambda^5 \left(e^{\frac{c}{\lambda S}} - 1\right) < C,$$

$$e = \int_0^\infty C \lambda^{-5} \left(e^{\frac{c}{\lambda S}} - 1\right)^{-1} d\lambda < \int_0^\infty C \lambda^{-5} \left(e^{\frac{c}{\lambda S_m}} - 1\right)^{-1} d\lambda.$$

Da aber für die schwarze Strahlung ist

$$\varepsilon = A T^4 = \int_0^\infty C \lambda^{-5} \left(e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1\right)^{-1} d\lambda,$$

so folgt auch

$$e < A S_m^4;$$

also ist

$$\underline{S_1 < S_m.}$$

Es sei ferner λ_m die Wellenlänge, welche einem Maximum der Strahlung e_m entspricht; wir haben dann nach (4)

$$e_m \lambda_m^5 \left(e^{\frac{c}{\lambda_m S_0}} - 1\right) = C.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{c}{\lambda_m S_0} = \sigma_0,$$

so können wir schreiben

$$e_m = S_0^5 \frac{C}{c^5} \sigma_0^5 (e^{\sigma_0} - 1)^{-1}.$$

Nun hat die Funktion

$$x^5 (e^x - 1)^{-1}$$

nur ein endliches Maximum für $x = \tau = 4{,}9651$, wie es aus der Theorie der schwarzen Strahlung bekannt ist, und dann haben wir

$$\frac{C}{c^5} \tau^5 (e^\tau - 1)^{-1} = B.$$

Es muß also für ein beliebiges σ_0 immer

$$\frac{C}{\sigma^5}\sigma_0^5(e^{\sigma_0}-1)^{-1} < B$$

sein. Das bedeutet, daß

$$e_m < B S_0^5$$

und folglich

$$\underline{S_2 < S_0}.$$

Was nun die Gleichung (3) anbetrifft, so verfahren wir folgendermaßen. Ist a_λ das Emissionsvermögen des strahlenden Körpers, so haben wir

$$e_\lambda \lambda^5 \left(e^{\frac{c}{\lambda T}}-1\right) = C a_\lambda, \tag{5}$$

worin T die wirkliche Temperatur bedeutet. Suchen wir die Bedingung für Maximum bzw. Minimum von e_λ, setzen also $\partial e_\lambda/\partial\lambda = 0$, so gibt das

$$\frac{T}{c}\tau_m\left(5-\frac{\tau_m e^{\tau_m}}{e^{\tau_m}-1}\right) = \frac{1}{a_\lambda}\frac{\partial a_\lambda}{\partial\lambda},$$

worin

$$\frac{c}{\lambda_m T} = \tau_m$$

gesetzt ist.

Je nachdem nun

$$\frac{\partial a_\lambda}{\partial\lambda} \gtreqless 0$$

ist, wird auch

$$5-\frac{\tau_m e^{\tau_m}}{e^{\tau_m}-1} \gtreqless 0$$

sein, d. h.

$$\tau_m \lesseqgtr 4{,}9651$$

und folglich

$$\lambda_m T \gtreqless 2940. \tag{6}$$

Diese Beziehung kann also eine untere Grenze für T, die wirkliche Temperatur oder eine obere Grenze dafür geben: alles hängt von dem Vorzeichen von $\partial a_\lambda/\partial\lambda$ ab. Leider ist der Gang des Emissionsvermögens a_λ meistens vollkommen unbekannt; dann ist natürlich auch die gewonnene Beziehung *nicht* zu gebrauchen.

Nur wenn uns der Gang von S mit λ in der Umgebung von e_m bekannt ist, bekommt (6) in gewissen Fällen einen Sinn. Dann aber ist dieselbe nutzlos.

Wir haben nämlich aus der Formel

(7) $$e_\lambda = \varepsilon_\lambda a_\lambda$$

die Beziehung

(8) $$e^\tau - 1 = a_\lambda (e^\sigma - 1),$$

worin

$$\tau = \frac{c}{\lambda T}, \quad \sigma = \frac{c}{\lambda S}$$

gesetzt ist.

Die Differentiation nach λ gibt

$$\frac{1}{\lambda}(\sigma e^\sigma a_\lambda - \tau e^\tau) = (e^\sigma - 1)\frac{\partial a_\lambda}{\partial \lambda} - a_\lambda \frac{\sigma}{S}\frac{\partial S}{\partial \lambda},$$

oder, wenn a_λ links mittels (8) eliminiert wird,

(9) $$\frac{e^\tau - 1}{\lambda}\left(\frac{\sigma e^\sigma}{e^\sigma - 1} - \frac{\tau e^\tau}{e^\tau - 1}\right) = (e^\sigma - 1)\frac{\partial a_\lambda}{\partial \lambda} - a_\lambda \frac{\sigma}{S} e^\sigma \frac{\partial S}{\partial \lambda}.$$

Die Funktion

$$\frac{x e^x}{e^x - 1}$$

hat offenbar für $\infty > x > 0$ weder Maximum noch Minimum und wächst kontinuierlich mit wachsendem x zwischen den Grenzen 1 und ∞. Da nun immer τ und σ positiv sind und

$$S < T, \quad \sigma > \tau$$

sein soll, so bleibt die linke Seite von (9) immer positiv.

Ist daher

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} \geqq 0,$$

so muß notwendig auch

$$\frac{\partial a_\lambda}{\partial \lambda} > 0$$

sein, also auch nach (6)

$$\lambda_m T > 2940,$$

$$\lambda_m S_\lambda = 2940.$$

Ist aber

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} < 0,$$

so bleibt das Vorzeichen von $\partial a_\lambda / \partial \lambda$ unbestimmt und (6) wie auch (3) sind daher unbrauchbar.

Aber auch dann, wenn

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} \gtreqless 0$$

in der Umgebung von e_m ist, folgt doch aus (3) der Wert für S kleiner als derjenige, der direkt aus (4) für $\lambda = \lambda_m$ sich ableiten läßt.

In der Tat, logarithmieren und differentiieren wir (4) nach λ und setzen dann $\partial e_\lambda / \partial \lambda = 0$, so folgt

$$5 - \frac{\sigma_0 e^{\sigma_0}}{e^{\sigma_0} - 1} = \frac{\sigma_0 e^{\sigma_0}}{e^{\sigma_0} - 1} \frac{\lambda_m}{S_0} \frac{\partial S_0}{\partial \lambda}.$$

Im Falle

$$\frac{\partial S_0}{\partial \lambda} \gtreqless 0$$

haben wir

$$5 - \frac{\sigma_0 e^{\sigma_0}}{e^{\sigma_0} - 1} \gtreqless 0,$$

$$\sigma_0 \lessgtr \tau_m,$$

also

$$\lambda_m S_0 \gtreqless 2940,$$

$$\underline{S_0 \gtreqless S_2}.$$

Ein Beispiel möge das Gesagte erläutern. Wir wollen dazu die von Rubens[1]) untersuchte, sicher thermaktine Strahlung eines Auerbrenners benutzen.

Ein schwarzer Körper von $T = 1800$ strahlt nach Rubens Angaben 33,2mal so stark als ein dichtes Auerstrumpfgewebe. Wir haben daher

Schwarzer Körper $s = A T^4$, Auerstrumpf $e = A S_1^4$,

$$T = 1800, \quad \frac{s}{e} = 33{,}2.$$

Daraus folgt

$$\underline{S_1 = 750\,(!)}.$$

Die Strahlung eines Auerstrumpfes hat ferner ein absolutes Maximum bei $\lambda = 1{,}2\,\mu$ und beträgt dasselbe nach Rubens in gewissen Einheiten gemessen 34,3. In denselben Einheiten gemessen ergibt sich die Strahlung eines schwarzen Körpers für dieselbe λ und $T = 1800$ zu 2930. Sind nun λ in Mikron,

1) H. Rubens, Ann. d. Phys. 18. p. 725. 1905.

e_λ in Watt pro 1 qcm Fläche gemessen, so haben bekanntlich die Konstanten der Planckschen Formel folgende Bedeutung:

$$C = 3{,}72 \cdot 10^8; \quad c = 2940 \cdot 4{,}9651 = 14597.$$

Daraus folgt

$B = 1{,}191 \cdot 10^{-11}$, $e_\lambda = 1{,}741 \cdot 10^5$ (für $T = 1800$, $\lambda = 1{,}2$)

und für den Auerstrumpf

$$e_m = \frac{84{,}3 \cdot 1{,}741 \cdot 10^5}{2930} = 2038.$$

Aus (2) ergibt sich somit

$$S_2 = 702\,(!).$$

Diese Zahlen geben uns keine Vorstellung über die wirkliche Temperatur des Auerstrumpfes, da nach (4) Werte für S folgen, welche S_1 und S_2 um mehr als zweimal übertreffen. So finden wir aus den von Rubens in der Tab. II mitgeteilten Zahlen eine Reihe von Werten für S, deren Maximum der Wellenlänge $\lambda = 0{,}45$ entspricht und 1772 beträgt.

Tabelle I.

λ (μ)	Zahlen von Rubens	e_λ (Watt)	Schwarze Temp. S (abs.)
0,45	3,8	225,7	1772
0,5	11,5	683,1	1751
0,55	22,0	1307	1708
0,6	24,0	1426	1619
0,7	25,8	1532	1341
1,0	34,3	2038	1207
1,2	34,3	2038	1085
1,5	34,0	2020	981,5
2,0	25,5	1515	815,7
3,0	17,0	1010	664,3
4,0	7,6	451,4	545,2
5,0	7,0	415,9	516,0
6,0	7,9	469,2	525,0
7,0	15,0	891,0	641,3
8,0	23,9	1420	830,5
9,0	29,9	1776	1070
10,0	27,4	1628	1227
12,0	19,1	1134	1481
15,0	9,6 [1])	570,2	1569
18,0	5,0	297,0	1595

1) Die von Rubens direkt gewonnene Zahl beträgt hier 8,9; dieselbe ist der Bemerkung des Verfassers gemäß (l. c. p. 733—734) korrigiert.

Wir schließen daraus, daß die Temperatur des Auerstrumpfes sicher höher als 1772 ausfällt.

Die Tab. I zeigt, daß etwa für $\lambda > 5$

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} > 0$$

ist. Hier hat daher (6) ihre Anwendung. Das Maximum von e_λ fällt hier nach Rubens bei $\lambda = 9{,}3$. Wir haben also

$$S_\lambda > \frac{2940}{9{,}3}, \quad \underline{S_\lambda > 316{,}1\,(!)},$$

indem (4) für dieselbe Wellenlänge $S_0 = 1160$ gibt.

Wenden wir die angeführten Überlegungen auf die Strahlung der Sonne an, so kommen wir zu folgendem Schluss: *1. alle schwarzen Temperaturen der Sonne, die bisher nach der Formel (3) bestimmt worden sind, haben überhaupt keinen Sinn, so lange man nicht bewiesen hat, daß in der Umgebung des Strahlungsmaximums der Sonne tatsächlich die Bedingung*

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} \gtreqless 0$$

erfüllt ist; 2. diejenigen Werte von S, welche nach den Formeln (1) bzw. (2) gewonnen worden sind, ergeben Zahlen, die möglicherweise ebensoweit von der wirklichen Temperatur der Sonne abstehen, wie es für S_1 und S_2 bei dem Auerstrumpfe der Fall ist. Man kennt doch die optische Natur der Sonne nicht. Will man also sich irgendwelche Vorstellung über die untere Grenze der Sonnentemperatur bilden, so muß man einzig und allein von der Gleichung (4) ausgehen. Das dazu nötige Material finden wir zunächst in den Untersuchungen von Langley.

II.

Bekommt die Erde außerhalb der Erdatmosphäre von der Sonne in einer Minute normal pro 1 qcm Q g-cal. insgesamt (die sogenannte Solarkonstante) bzw. q_λ g-cal. von der Wellenlänge λ, also in einer Sekunde

$$q_\lambda \frac{4{,}17}{60} \text{ Watt},$$

so ist die Energie der Sonnenstrahlung

$$e_\lambda = q_\lambda \frac{4{,}17}{60} \operatorname{cosec}^2 \frac{\varphi}{2},$$

worin φ die mittlere scheinbare Größe des Sonnendurchmessers von der Erde aus gesehen bedeutet, und

$$\varphi = 32' 3{,}6''$$

ist. Gewöhnlich gibt die Beobachtung nicht direkt q_λ, sondern die Ablesungen eines mit einem Energie aufnehmenden Instrument verbundenen Galvanometers f_λ in gewissen Skalenteilen (sc) ausgedrückt. Wird nun die Energiekurve $f_\lambda = f(\lambda)$ konstruiert und ihre Fläche F sc. cm gemessen, so hat man

$$\frac{q_\lambda}{f_\lambda} = \frac{Q}{F}$$

und folglich

$$e_\lambda = f_\lambda \frac{Q}{F} \frac{4{,}17}{60} \operatorname{cosec}^2 \frac{\varphi}{2} = U f_\lambda.$$

Vor einigen Jahren war die Meinung allgemein verbreitet, es sei etwa $Q = 3$, oder noch mehr. Das ist eine Zahl, die von Langley auf einem ziemlich künstlichen Wege aus den Ergebnissen der *Mount Whitney*-Expedition abgeleitet wurde. Die neueren zahlreichen bolographischen Messungen, ausgeführt in der *Astrophysical Observatory* der *Smithsonian Institution* zu *Washington* zeigen, daß kein Grund vorliegt, an der Richtigkeit der sogenannten Bouguerschen Formel für die Lichtabsorption in der Erdatmosphäre zu zweifeln, wenn bei der Beobachtung der Sonnenstrahlung gewisse Vorsichtsmaßregeln Anwendung finden; dementsprechend ergab sich in *Washington* während der Zeit vom 9. Oktober 1902 bis 11. Februar 1904 eine Reihe von Zahlen für die Solarkonstante, welche so gut untereinander übereinstimmen, daß schon eine Abnahme derselben um etwa 10 Proz. zwischen 26. März 1903 und 11. Februar 1904 Langley einer besonderen Untersuchung wert schien.[1]) Diese Zahlen sind in der Tab. II wiedergegeben.

1) S. P. Langley, Astrophys. Journ. 19. p. 305. 1904.

Tabelle II.

Datum	Q		Datum	Q	
9. Oktober 1902	2,19		24. August 1903	1,93	
15. „	2,19		14. Oktober	1,98	1,94
22. „	2,16		29. „	1,97	
19. Februar 1903	2,28	2,25	7. Dezember	1,94	
25. März	2,26	2,21	24. „	1,96	2,01
26. „	2,10	1,98	27. Januar 1904	2,05	1,98
29. April	1,94	1,97	11. Februar	2,29	2,24
7. Juli	2,16	2,11			

Was nun die Genauigkeit dieser Messungen anbetrifft, so können dieselben nach Langleys Meinung nur mit einem *konstanten* Fehler von 20 Proz. oder sogar mehr behaftet sein, welcher von der „absoluten Standardisation" des Akinometers herrührt. Alle anderen Einflüsse veränderlichen Charakters sind so gut wie ganz eliminiert.

Nun stimmen die von Langley während der *Mount Whitney*-Expedition direkt gewonnenen Zahlen für Q merkwürdig gut mit den Ergebnissen der Observatory zu *Washington*. So ergab sich[1]) für die untere Bergstation „*Lone-Pine*" aus zwei Beobachtungsreihen

$$Q = 2{,}067 \text{ bzw. } 2{,}053; \text{ im Mittel also } 2{,}060;$$

für die obere Bergstation „*Mountain Camp*" aus drei Beobachtungsreihen

$$Q = 2{,}260;\ 2{,}217;\ 2{,}183; \text{ im Mittel also } 2{,}220.$$

Da die Beobachtungen dieser Expedition mit sehr großer Sorgfalt angestellt wurden, so schien mir interessant, die Untersuchung der schwarzen Temperatur der Sonne gerade an diesem Material zu beginnen.

Dabei beträgt die Fläche der Energiekurve, welche dem Werte $Q = 2{,}183$ entspricht,

$$F = 185{,}7 \text{ sc} \cdot \mu = 185{,}7 \cdot 10^{-4} \text{ sc} \cdot \text{cm}^2),$$

1) S. P. Langley, Profess. Papers of the Signal Service Nr. XV. Researches on solar heat p. 148. Washington 1881.

2) Die Zahlen für die Flächen F bei S. P. Langley (l. c. p. 148) müssen verdoppelt werden, um dieselben mit den Zahlen für f_1 in Einklang zu bringen.

so daß daraus

$$U = 3{,}758 \cdot 10^5$$

folgt. Die Zahlen für f_λ sind von Langley in der Tab. 120 zusammengestellt; wir geben dieselben in den Tab. III und IV wieder.

Tabelle III.

Lone Pine, 1881.

λ (μ)	f_λ I	f_λ II	Mittel	S
0,35	64,8	—	64,8	5229
0,375	52,2	75,6	63,9	5092
0,4	86,1	100,7	93,4	5092
0,45	139,3	138,0	138,6	5225
0,5	184,0	175,9	180,0	5441
0,6	229,0	214,9	227,0	6015
0,7	202,4	207,1	204,7	6143
0,8	159,4	167,2	163,3	6142
1,0	106,3	110,6	108,4	6303
1,2	100,5	93,1	96,8	7456
1,4	76,3	71,0	73,7	8327
1,6	55,6	51,8	53,7	8988
1,8	38,6	36,0	37,3	9244
2,0	24,5	22,9	23,7	8736
2,2	13,0	13,2	13,1	7143
2,4	4,1	3,9	4,0	4207

Tabelle IV.

Mountain Camp, 1881.

λ (μ)	f_λ I	f_λ II	f_λ III	Mittel	S
0,35	100,2	77,4	24,0	67,2	5251
0,375	96,7	65,8	30,9	64,5	5098
0,4	123,3	90,3	93,1	102,2	5098
0,45	204,0	197,9	189,0	197,0	5322
0,5	258,8	257,8	246,8	254,5	5781
0,6	274,2	276,4	273,5	274,7	6340
0,7	225,8	229,4	242,0	232,4	6373
0,8	160,9	167,6	181,0	169,8	6218
1,0	106,7	107,7	111,3	108,6	6309
1,2	87,0	81,9	81,5	83,5	6945
1,4	72,4	67,1	62,3	67,3	7910
1,6	55,5	51,6	46,9	51,3	8735
1,8	40,2	37,4	34,4	37,3	9244
2,0	26,5	24,7	23,7	25,0	9062
2,2	14,5	13,7	13,1	13,8	7490
2,4	4,5	4,3	4,2	4,3	4476

Abgesehen von gewissen Unregelmäßigkeiten der zwei ersten Horizontalreihen in der Tab. IV, sind die Ergebnisse der Beobachtung auf jeder Station so gut miteinander übereinstimmend, daß es vollkommen genügt, mit den Mittelwerten die Rechnung zu führen. Wir bekommen auf diese Weise Zahlen für S, welche in den letzten vertikalen Kolumnen der Tabb. III und IV angegeben sind.

Wie wir sehen, zeigen beide voneinander vollkommen unabhängigen, an verschiedenen Orten ausgeführten Messungen eine ganz vorzügliche Übereinstimmung in den Werten der schwarzen Temperatur der Sonne. Dabei kann von einer Konstanz von S überhaupt keine Rede sein. In beiden Fällen wächst es mit wachsender Wellenlänge λ von etwa 5000 bis über 9200 und fällt dann sehr schnell ab, um bei $\lambda = 2{,}4$ den Wert 4200—4400 zu erreichen.

Die Gleichungen (1) und (2) ergeben nun

$$\textit{Lone Pine} \begin{cases} S_1 = 5930 \\ S_2 = 5901 \end{cases} \qquad \textit{Mountain Camp} \begin{cases} S_1 = 6044 \\ S_2 = 6155. \end{cases}$$

Trotz guter Übereinstimmung dieser Zahlen untereinander, weichen dieselben von dem Werte von S für $\lambda = 1{,}8$ um mehr als 50 Proz. ab.[1])

Es fragt sich nun, wie weit der gefundene Gang von S den wirklichen optischen Eigenschaften der Sonne entspricht und sei derselbe vielleicht nicht durch gewisse Beobachtungsfehler verursacht.

Was zunächst das Spektralgebiet $\lambda = 0{,}35$—$0{,}375$ anbetrifft, so sind hier die Zahlen f_λ so starken Schwankungen unterworfen, daß man keinen besonderen Wert auf die Übereinstimmung von S für diese Wellenlängen legen kann. Der Grund aber des Abfalles von S für $\lambda > 2{,}0$ ist leicht anzugeben.

Die Messungen der Sonnenstrahlung während der *Mount Whitney*-Expedition wurden mittels Rowlandscher Diffraktionsgitter ausgeführt; dieselben konnten aber nur bis $\lambda = 1{,}2$ (inklusiv) ihre Anwendung finden, da die Übereinanderlagerung der Spektra für größere λ schon zu stark ausfiel. Die Energie-

1) Auch bei dem Auerstrumpfe stimmen S_1 und S_2 ziemlich gut überein.

kurven der Expedition wurden daher für $\lambda > 1{,}2$ mit Hilfe der späteren Messungen zu *Allegheny* im Jahre 1882 bis $\lambda = 2{,}4$ ergänzt. Bei diesen letzten Beobachtungen wurde nun nicht das Diffraktionsspektrum untersucht, sondern ein prismatisches, durch ein Hilgersches Flintglasprisma geliefert. Dieses Spektrum erschien bei etwa $\lambda = 2{,}8$ schon vollkommen abgebrochen, indem wir jetzt wissen, daß das Sonnenspektrum sich über 10 μ erstreckt. Diese starke Strahlenabsorption in den Glasteilen der Beobachtungsapparate bei $\lambda = 2{,}8$ und darüber hinaus mußte offenbar bewirken, daß schon für gewisse $\lambda < 2{,}8$ die gemessenen Energiemengen zu klein ermittelt sind. Wir schließen daraus, daß der Abfall von S für $\lambda > 2{,}0$ mindestens zum Teil, wenn nicht vollständig, seine Ursache nicht in der Natur der Sonnenstrahlung habe und eine Nebenerscheinung sei. Der wirkliche Gang von S für $\lambda > 2{,}0$ bleibt also bis auf weiteres unbestimmt.

Die Werte von f_λ, ferner, die den Wellenlängen $\lambda = 1{,}4$ bis $\lambda = 2{,}0$ entsprechen, und die, wie oben gesagt, mittels eines Prismas ermittelt worden sind, bedürfen gewisser Korrektionen.

Bedeute δ die Minimalablenkung eines Prismas, so müssen bekanntlich die Ordinaten einer prismatischen Energiekurve mit $-\partial\delta/\partial\lambda$ multipliziert werden, um die den Ordinaten eines normalen Energiespektrums proportionalen Zahlen zu erhalten. Ein solcher Faktor ist bei Langley[1]) mit $\operatorname{tg}\varphi$ bezeichnet und für das Hilgersche Prisma auf graphischem Wege gefunden. Es ergaben sich dabei Zahlen für $\operatorname{tg}\varphi$, die mit wachsendem λ kontinuierlich *abnehmen*. Nun entspricht ein solcher Gang von $\operatorname{tg}\varphi$ der Wirklichkeit nicht.

In den achtziger Jahren des XIX. Jahrhunderts blieb noch nicht allgemein die Tatsache erkannt, daß jede Dispersionskurve in gewissen Spektralgebieten, und zwar ziemlich entfernt vor denjenigen der beginnenden Absorption, Inflexionspunkte hat, so daß darin $-\partial\delta/\partial\lambda$ durch ein Minimum geht.

Das Flintglas des Hilgerschen Prismas muß daher etwas früher als bei $\lambda = 2{,}0$ einen solchen Inflexionspunkt besitzen. Leider sind die von Langley mitgeteilten Wertepaare δ, λ

1) S. P. Langley, l. c. p. 282.

zu weit voneinander abstehend, um die Lage dieses Inflexionspunktes einigermaßen genau bestimmen zu können. Doch wäre ein Versuch in dieser Richtung nicht ohne Interesse.

Wir wollen daher dazu die Berechnungen von Ketteler[1] benutzen. Ketteler suchte die Dispersion des Langleyschen Flintglasprismas mittels einer Formel

$$n^2 = a^2 + \frac{D\lambda_m^2}{\lambda^2 - \lambda_m^2} - k\lambda^2$$

darzustellen, worin

$$D = 0{,}60714, \quad \lambda_m^2 = 0{,}029929,$$
$$a^2 = 2{,}44137, \quad k = 0{,}009076$$

sind. Setzen wir zum Abkürzen $D\lambda_m^2 = M$, so finden wir

$$-n\frac{\partial n}{\partial \lambda} = \left[\frac{M}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2} + k\right]\lambda.$$

Andererseits aus der Beziehung

$$n \sin\frac{A}{2} = \sin\left(\frac{A+\delta}{2}\right),$$

worin A den Brechungswinkel des Prismas bedeutet, folgt

$$\sin\frac{A}{2}\frac{\partial n}{\partial \lambda} = \cos\left(\frac{A+\delta}{2}\right)\frac{1}{2}\frac{\partial \delta}{\partial \lambda};$$

daraus leiten wir ab

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial \delta}{\partial \lambda} = \sin^2\frac{A}{2}\frac{\lambda}{\sin(A+\delta)}\left[\frac{M}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2} + k\right].$$

Schreibt man jetzt

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\lambda}{\sin(A+\delta)}\left[\frac{M}{(\lambda^2 - \lambda_m^2)^2} + k\right],$$

so muß $\varkappa = \operatorname{tg}\varphi'/\operatorname{tg}\varphi$ im Spektralgebiete von $\lambda = 0{,}4$ bis $\lambda = 1{,}0$ (etwa) eine konstante Zahl sein; in der Umgebung von $\lambda = 2{,}0$ aber muß $\varkappa$ ziemlich stark zunehmen. Daß es wirklich so ist, zeigt die Tab. V, worin die ersten drei Vertikalreihen aus der Tab. H[2] von Langley entnommen sind. $A = 62^0\,34'\,43''$.

---

1) E. Ketteler, Wied. Ann. 30. p. 309. 1887.
2) S. P. Langley, l. c. p. 238.

Tabelle V.

λ (μ)	δ	tg φ	tg φ'	$\varkappa$
0,4	50° 27′ 40″	9,820	0,4708	0,0479
0,5	48 34 00	4,226	0,2060	0,0488
0,6	47 35 20	2,380	0,1124	0,0473
0,7	03 00	1,450	0,07051	0,0486
0,8	46 41 40	1,000	0,04907	0,0491
0,9	25 40	0,720	0,03704	0,0514
1,0	14 30	0,600	0,03000	0,0500
1,1	04 30	0,550	0,02570	0,0467
1,2	45 55 30	0,520	0,02305	0,0443
1,3	46 40	0,498	0,02146	0,0431
1,4	38 00	0,480	0,02055	0,0428
1,5	29 30	0,463	0,02010	0,0434
1,6	21 00	0,448	0,02005	0,0447
1,7	13 20	0,436	0,02017	0,0463
1,8	05 40	0,429	0,02044	0,0477
1,9	44 58 10	0,423	0,02085	0,0493
2,0	50 40	0,418	0,02144	0,0513
2,1	43 20	0,414	0,02203	0,0532
2,2	36 00	0,411	0,02271	0,0553
2,3	28 40	0,409	0,02341	0,0572
2,4	21 30	0,407	0,02416	0,0594

Bis $\lambda = 1{,}0$ bleibt tatsächlich $\varkappa$ nahezu konstant, im Mittel gleich 0,0490 und die Schwankungen desselben übertreffen nicht 5 Proz. Später beginnt $\varkappa$ abzunehmen, erreicht ein Minimum bei $\lambda = 1{,}4$ und wächst von da ab ziemlich schnell an.

Wollten wir annehmen, die Kettelersche Dispersionsformel stelle die Dispersion des Hilgerschen Prismas richtig, so hätte das zur Folge, daß alle Ordinaten der Energiekurve, von $\lambda = 1{,}0$ ab, mit den Faktoren multipliziert werden müßten, die in der Tab. VI angeführt sind. Die Korrektionen für λ sind dabei unbedeutend.

Tabelle VI.

λ	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
	0,905	0,874	0,913	0,974	1,047	1,128	1,211
	1	0,966	1,009	1,077	1,159	1,286	1,339

Sollen nun die Energiekurve der *Mount Whitney*-Expedition und dieselbe für *Allegheny* bei $\lambda = 1{,}2$ aneinander angeschlossen

werden, so müssen wir die Zahlen f_λ der Tabb. III und IV für $\lambda > 1{,}4$ mit den Faktoren multiplizieren, welche sich in der letzten Horizontalreihe der Tab. VI befinden. Dadurch wird natürlich auch die Fläche F der Kurve etwas geändert, und zwar vergrößert; diese Änderung aber kann ihrer Kleinheit wegen außer acht gelassen werden (ein paar Prozent).

Die nach den korrigierten Werten von f_λ berechneten Zahlen für S bilden den Inhalt der Tab. VII.

Tabelle VII.

λ	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
Lone Pine	8163	9088	9716	9675	8271	5067
Moun. Camp	7760	8788	9716	10040	8706	5286

Wir sehen, daß diese Korrektionen für unseren Zweck keine große Bedeutung haben; das Maximum von S ist jetzt etwas größer geworden und nach der Seite der größeren Wellenlängen verschoben; auch der Abfall von S auf dem Ende des Spektrums erscheint merklich kleiner. Im großen und ganzen bleibt doch der Gang von S trotz dieser Korrektionen unverändert.

Ich habe mir sehr viel Mühe gegeben, irgendwelche Fehlerquelle aufzusuchen, die als Ursache dieses merkwürdigen Ganges von S dienen könnte. Das ist mir nicht gelungen. Allerdings liegt die Ursache nicht in dem Werte der Solarkonstante (2,0—2,2), da z. B. Hansky auf dem *Montblanc* und Stankiewitsch auf dem *Pamir* mit Hilfe neuerer genauer Instrumente die Sonnenstrahlung über 2,0 g-cal. direkt gemessen haben. Die absolute Solarkonstante kann nicht kleiner als 2,2 ausfallen.

Es muß noch betont werden, daß die ultraroten Strahlen im Gebiete $\lambda = 1{,}2$ bis 2,0 und weiter durch die Erdatmosphäre nur wenig (etwa 10 Proz.) und fast in gleicher Weise absorbiert werden. In dem Anschluß der verschiedenen Energiekurven kann daher kein Grund gewisser *großer* Fehler liegen. Im Jahre 1882 betrug zu Allegheny das Maximum der Energiekurve der direkten Strahlung etwa 86,7 mm bei $\lambda = 0{,}6$ und bei $\lambda = 2{,}1$ ergab sich 9,2 mm.[1])

1) S. P. Langley, l. c., Platte XV, Kurve I. Wir wählen Wellenlängen $\lambda = 0{,}6$ und $\lambda = 2{,}1$, da hier keine auswählende Absorption der Strahlen in der Atmosphäre vorhanden ist.

Aus den von Langley mitgeteilten Zahlen für die Durchlässigkeit der Atmosphäre zu *Allegheny*[1]) berechnen wir die Energie außerhalb der Erdatmosphäre zu:

$$\lambda = 0{,}6 \quad \frac{86{,}7}{0{,}78} = 118{,}7$$

Verhältnis 11,7.

$$\lambda = 2{,}1 \quad \frac{9{,}2}{0{,}91} = 10{,}1$$

Nun wurde für $\lambda = 0{,}6$ zu *Lone Pine* 227,0 sc, zu *Mountain Camp* 274,7 sc gefunden (Tabb. III und IV), im Mittel also 250,8. Diese Zahl muß ziemlich genau sein, also auch für *Allegheny* außerhalb der Erdatmosphäre gelten. Dann ergibt sich daselbst für $\lambda = 2{,}1$ die Zahl

$$\frac{250{,}8}{11{,}7} = 21{,}4 \text{ sc}.$$

Das stimmt vollkommen gut mit den in den Tabb. III und IV angeführten Werten für f_λ.

Bis auf weiteres sind wir somit zu dem Schlusse geführt worden, daß der sich aus den zitierten Beobachtungen von Langley ergebende Wert von S von der Ordnung 10000 ist und daß daher die wirkliche Temperatur der Sonne nicht weniger als

$$\underline{T = 10000^\circ \text{ abs.}}$$

betragen kann.[2])

Kasan, im August 1906.

---

1) S. P. Langley, l. c. p. 151—152.

2) Vorgetragen in der Januar-Sitzung der Phys.-Math. Gesellsch. zu Kasan 1907.

(Eingegangen 4. März 1908.)

7. *Der Widerstand des Wismuts im veränderlichen Magnetfelde und für veränderlichen Meßstrom;* *von Paul Pallme König.*

(Auszug aus der Leipziger Inaugural-Dissertation.)

Einleitung.

Die Widerstandsänderung des Wismuts bei Transversal- oder Longitudinalmagnetisierung ist, wie Ph. Lenard[1]) gefunden, davon abhängig, ob man die Meßanordnung — meist Wheatstonesche Brücke — mit Gleichstrom oder mit dem Wechselstrom des Kohlrauschschen Induktors speist. Die Gleichstromnullstellung mit dem Galvanometer und die Telephonnullstellung bei Wechselstrom weichen voneinander ab, und zwar ist, wie Lenard in der zitierten Arbeit zeigte, diese Differenz eine Funktion der Feldstärke. Auch weist er darauf hin, daß man bei Gegenwart von Wismut im Stromkreise mit dem Telephon nie ein ausgesprochen einfaches Minimum erhält. Man kann zwei verschiedene Minima bei Verschiebung des Brückenkontaktes finden:

Das erste entspricht dem Ton des Unterbrechers am Induktor und stimmt mit seiner Brückenstellung mit der Gleichstrommessung überein.

Das zweite hat ein Minimum des Telephongeräusches, hat eine, dem oben angegebenen Effekte entsprechend abweichende Brückenstellung, der Unterbrecherton ist bereits wieder angewachsen. Dieses vom Tonminimum abweichende Geräuschminimum ist eine besondere Eigenschaft des Wismuts und wurde von ihm so gedeutet, daß sich dies Metall gegen die das Telephongeräusch erzeugenden Eigenschwingungen der Sekundärspule des Induktors (von der Frequenz über 10000 pro Sekunde) anders verhält, als für Gleichstrom.

1) Ph. Lenard, Wied. Ann. 39. p. 619. 1890.

Fand Lenard eine abweichende Widerstandsmessung erst bei Frequenzen, wie sie Schwingungen der Sekundärspule des Induktors liefern, so ergaben im Gegensatz hierzu neuere Arbeiten[1]), daß sich der Wismutwiderstand überhaupt als Funktion der Änderungsgeschwindigkeit des Meßstromes darstellt, also ein Effekt schon bei Wechselstrom von sehr geringer Periodenzahl auftritt und auch von dieser abhängt. Die Widerstandsänderung ergab sich als eine scheinbare, d. h. durch sie wird nicht elektrische Energie in Wärme verwandelt, nach dem Ausdrucke englischer Autoren „vergeudet", sondern in irgend einer noch nicht bekannten Form aufgespeichert, welche als elektrische Energie wieder abgegeben werden kann. Die Widerstandsänderung bei Wechselstrom im Vergleich mit Gleichstrom kann man also als eine elektromotorische Kraft deuten, die infolge einer Phasenverschiebung gegenüber dem Meßstrome eben eine Energieaufspeicherung irgendwelcher Art besitzt.

Es liegt die Vermutung nahe, daß das Wismut in bezug auf seine, die große Widerstandsvermehrung hervorrufende Magnetisierung ein ähnliches Verhalten zeigt, wie alle ferromagnetischen Metalle, die eine statische Hysteresis und eine zeitliche Trägheit besitzen.

Wäre die Widerstandsvermehrung des Wismuts mit statischer Hysteresis behaftet, so würden sich für einen bestimmten Wert der Feldstärke verschiedene Werte des Widerstandes ergeben, je nachdem man den betreffenden Feldwert von größeren oder kleineren Werten her erreicht, je nachdem man also bei ab- oder aufsteigender Magnetisierung mißt. Der Widerstand wäre nicht nur von der momentanen Feldstärke abhängig, sondern auch von der Vorgeschichte.

Ein solches Verhalten des Wismuts wäre leicht zu beobachten und ist auch bei den genauesten Messungen nicht zu

---

1) A. Sadowsky, Journ. de la Soc. phys.-chem. russe (26) 2. 1894; Journ. de phys. (3) 4. p. 186. Nr. 2. 1895; B. Wolff, Diss. Würzburg 1897; R. Wachsmuth u. C. Bamberger, Physik. Zeitschr. 1. p. 127. 1899; K. Bamberger, Diss. Berlin 1901; G. C. Simpson, Phil. Mag. (6) 2. p. 300. 1901; C. Carpini, N. Cim. (5) 8. p. 171. 1904; E. Schnorr v. Carolsfeld, Diss. München 1904.

merken, so daß die Widerstandsvermehrung als frei von ıtischer Hysteresis angesehen werden kann.

Was die Existenz einer zeitlichen Trägheit betrifft, so ırde dieselbe zwar jedem Feldwerte einen Wert des Widerındes eindeutig zuordnen, doch würde derselbe bei sprungıiser Änderung des Feldwertes erst nach einer gewissen endhen Zeit erreicht. Man bezeichnet dieses zeitliche Zurückeiben des Widerstandes gegenüber dem Feldwerte auch als iskose Hysteresis".

Die Untersuchung des Wismuts auf eine vorhandene zeitıe Trägheit besitzt zwar bedeutende experimentelle Schwierigiten, ist aber von großem Interesse, denn einerseits werden schon seit Jahren Wismutspiralen zur Messung von techschen Wechselstromfeldern benutzt, was bei Vorhandensein ıer viskosen Hysteresis nicht ohne weiteres gestattet wäre, d andererseits ist das Phänomen von Wichtigkeit für die ektronentheorie der Metalle.

Die einfachste Versuchsanordnung zur Untersuchung einer itlichen Trägheit besteht darin, das Wismut in das Feld ıes Wechselstrommagneten zu bringen. Es ergibt sich so tsächlich der mittlere Wismutwiderstand kleiner, als es der 'ektiven Wechselfeldstärke zukommen müßte. Wie am Schlusse eser Arbeit gezeigt werden soll, ist dies eine Folge der ersuchsanordnung selbst, die sehr komplizierte Verhältnisse sitzt. Ob ein Teil der Wirkung dem Wismut zuzuschreiben , bleibt bei dem Experimente noch fraglich.

W. Eichhorn[1]) versuchte die experimentelle Lösung dieser ıfgabe im Jahre 1900 nach Art der Joubertschen Phasenheibe, indem er eine Wismutspirale, an der Peripherie einer reisscheibe befestigt, durch ein ruhendes Magnetfeld hindurchhlug und mit Momentanschluß des Meßstromes an verhiedenen Stellen des Feldes den Widerstand ruhend und wegt bestimmte. Er erhielt so tatsächlich eine „viskose ysteresis" von ganz bedeutendem Betrage, deren Richtigkeit jedoch in Frage stellte. Auf die Eichhornsche Arbeit rd zur Auffindung des mutmaßlichen Fehlers später eingangen.

1) W. Eichhorn, Ann. d. Phys. 3. p. 20. 1900.

Der Inhalt vorliegender Arbeit ist, der gestellten Frage auf ganz anderem Wege näher zu treten und einen Beitrag zum Gleichstrom-Wechseltromeffekt des Wismuts zu liefern.

Die Arbeit gliedert sich daher in zwei Teile: I. Trägheit des Wismuts im Magnetfelde, II. Trägheit des Wismuts in bezug auf den Meßstrom.

I. Trägheit des Wismuts im Magnetfelde.

Es sei zunächst kurz das Wesen der Meßmethode angegeben. Erst später soll die Anordnung eingehender besprochen und die möglichen Fehler, sowie die Grenze der Genauigkeit diskutiert werden.

Im Luftschlitz eines gut unterteilten hinkenden (d. h. mit einer einzigen Erregerspule in unsymmetrischer Anordnung auf einem Schenkel) Elektromagneten befanden sich die Wismutspirale und eine Probespule zur Messung der Feldstärke. Es wurde zunächst die Abhängigkeit des Widerstandes von der Feldstärke bei nach und nach verstärktem Erregerstrom des Elektromagneten untersucht, dies lieferte also die normale Abhängigkeit des Widerstandes von der Feldstärke, dies war die „ruhende" Messung. Diese Messung soll im folgenden stets die „statische" genannt werden.

Sodann wurde auf ein und dieselbe Endstromstärke eingestellt und das Feld plötzlich eingeschaltet. Je nach dem Widerstande des Magneten, seiner Selbstinduktion, der Weite des Interferrikums und der verwendeten Spannung stieg jetzt das Feld mehr oder weniger schnell an und in diesem variablen Felde wurde neuerdings der Widerstand des Wismuts als Funktion der Feldstärke aufgenommen. Dies stellt die Messung in der Bewegung dar, sie soll in Zukunft stets die „dynamische" heißen. Beide Messungen miteinander verglichen mußten offenbar eine vorhandene Viskosität durch ein Zurückbleiben bei der dynamischen Messung erkennen lassen. Eine mechanische Bewegung war also nicht vorhanden, die ganze Meßanordnung befand sich in Ruhe.

Die Apparate.

Zeitmessender Apparat war ein Helmholtzscher Pendelunterbrecher von Edelmann-München. Er war mit vier Kon-

takten ausgerüstet, von denen jeder sowohl zur Stromschließung, als auch Öffnung verwendet werden konnte. Der Apparat ist von Edelmann selbst beschrieben[1]) und nähere Details auch von Martin Gildemeister und Otto Weiß[2]) angegeben, so daß Einzelheiten der Konstruktion dort einzusehen sind.

Wie bereits von U. Seiler[3]) und Martin Gildemeister angegeben, sind für Präzisionsmessungen nur Öffnungskontakte zulässig, da Stromschlußkontakte durch variable Fallzeit, Abfederung, unsichere Momentanberührung, Klirren usw. ungenaue Resultate ergeben, wenn es sich um sehr kleine Zeiten handelt. Daher war es bei allen vorliegenden Messungen Prinzip, nur Stromöffnungen zur Präzision heranzuziehen und die nötigen Schlußkontakte so zu montieren, daß sie nur solche Funktionen hatten, welche die Genauigkeit der Messung nicht stören konnten.

Mit dem Pendelunterbrecher sind offenbar nur solche Phänomene zeitlich zu verfolgen, die genau präzisierte, nach beliebig langer Zeit stets wieder von neuem herstellbare Anfangsbedingungen besitzen; denn die Aufnahme ist eine punktweise, eine unscharfe Definition des Beginns des zu untersuchenden Geschehens hat eine zeitliche Phase zur Folge. Auf ein scharfes Beginnen des Stromanstieges des Elektromagneten zu rechnen, wäre wohl nie möglich gewesen, doch fallen bei allen Messungen Ungenauigkeiten im Erregerstromanstieg, hervorgerufen durch Schwankungen der städtischen Spannung usw. vollständig fort, da es ja nur auf die Relation zwischen statischer und dynamischer Messung ankommt. Die Anwendung des Pendelunterbrechers war daher zulässig.

Zur Ermittelung der Pendelgeschwindigkeit, d. h. dem Zeitwerte einer Trommelumdrehung der Mikrometerschrauben, wurde die Methode von Radakovic[4]) benutzt.

Es wurde genau dieselbe Schaltung verwendet, die am

---

1) M. Th. Edelmann, Ann. d. Phys. 8. p. 274. 1900.

2) M. Gildemeister u. O. Weiss, Ann. d. Phys. 17. p. 174. 1905; Zeitschr. f. Instrumentenk. 25. p. 175. 1905.

3) U. Seiler, Wied. Ann. 61. 1897.

4) M. Radakovic, Wiener Sitzungsber. 109. Abt. IIa. 1900; vgl. auch M. Th. Edelmann, l. c. p. 278.

angegebenen Orte beschrieben ist. Es genügt daher, hier nur das Endresultat anzuführen. Es ergab sich die

Pendelkonstante $T = 0{,}00018$ Sek.

Zum Schluß des Starkstromes für den Elektromagneten wurde ein besonders kräftig konstruierter Fallkontakt hergestellt, mit breiten weichen Platinkontakten und flexibler Kabelzuleitung zum Fallhebel. Der Kontakt war am Pendel fest angeordnet und von den übrigen Teilen durch Ebonit isoliert. Er vertrug die enorme Stromstärke von ca. 200 Amp., ohne sich, allerdings nur während Bruchteilen einer Sekunde belastet, unzulässig zu erhitzen.

Die drei anderen Präzisionskontakte waren auf Schlitten mit Mikrometerschrauben verschiebbar, Ganghöhe = 0,5 mm. Diese Kontakte sollen stets I, II, III heißen, der Starkstromkontakt aber IV. Die Trommel jeder Mikrometerschraube war in 100 Teile geteilt; der Meßbereich jedes Kontaktes betrug 80 Trommelumdrehungen.

Der Elektromagnet.

Der verwendete Elektromagnet, wie schon erwähnt, hinkend, war aus einer technischen Drosselspule hergestellt, gut unterteilt und die einzelnen Bleche gut isoliert. Seine Dimensionen waren: Schenkelquerschnitt 40×55 mm, Schenkellänge 160 mm. Das Verbindungsjoch vom selben Querschnitt hatte eine Länge von 120 mm. Der mittlere Kraftlinienweg des magnetischen Flusses betrug 48 cm.

Zur Verwendung gelangten drei verschiedene Magnetisierungsspulen:

Spule *A* mit einfachem Drahte, 3 mm Durchmesser (1,8 mm blank), mit acht Lagen zu 28 Windungen. Sie besaß also eine Gesamtwindungszahl von 224 und einen Widerstand von 0,773 Ohm.

Spule *B* mit ganz demselben Drahte wie Spule *A*, doch doppelt gewickelt, so daß zwei getrennte Wickelungen mit je 112 Windungen vorhanden waren.

Spule *C* besaß einen Draht von 1,7 mm Durchmesser (1,5 mm blank) in 18 Lagen zu 56 einfachen Windungen, zusammen also 1008 Windungen. Der Draht wurde in zwei ge-

trennten Wickelungen aufgebracht, die parallel geschaltet also eine Magnetisierungsspule von 504 Windungen repräsentierten. Der Widerstand dieser Doppelspule betrug 0,73 Ohm.

Das von der Spule *A* und *C* entwickelte Spulenfeld bei einem totalen Kraftlinienwege von 48 cm im Ferromagnetikum betrug nach der Formel

$$H = \frac{4\pi n i}{10\,S}$$

(i = Stromstärke in Amperes, S = mittlerer Kraftlinienweg) berechnet:

Bei Spule *A* . . . H = 5,8 absol. Einheiten
„ „ *B* . . . H = 18,2 „ „ } pro Ampere.

Bis zu Feldstärken von 4000 (C.G.S.) im Interferrikum wurde Spule *A* benutzt, bei höheren Feldern Spule *C*. Von vornherein wurde auf eine Schnürung des Kraftlinienbündels verzichtet, um eine stark variierende Streuung zu vermeiden; da ferner infolge der ziemlich großen Schlitzweite von 2 bis 12 mm die entmagnetisierende Kraft bedeutend war, so konnte aus beiden Gründen die Induktion nur bis ca. 18000 C.G.S. getrieben werden.

Auf der der Spule entgegengesetzten Seite war der Luftschlitz angeordnet; zur Herstellung eines günstigen Eisenweges für die Kraftlinien war daher auf der anderen Seite eine ebenfalls unterteilte, aus Blech hergestellte Zwischenlage eingeschoben. Im Luftschlitz befand sich ein aus Ebonit und Glimmer hergestelltes Kühlkästchen, dessen doppelte Wände stets von Wasser durchflossen wurden, so daß im hohlen Innenraume eine genügend konstante Temperatur erzielt werden konnte. Diese Kühlung war unbedingt notwendig, da bei sehr hohen Stromstärken Spule und Eisen sich erwärmten. Bei mehreren Versuchen wurde auch der Magnet direkt in ein Petroleumbad gesetzt, das noch außerdem durch eine von Wasser durchflossene Kühlschlange auf konstanter Temperatur erhalten wurde.

Die Wismutspirale.

war die in der bekannten Ausführung von Hartmann und Braun, Durchmesser = 20 mm, normaler Widerstand 25 Ohm. Der Wismutdraht ist bei der Anfertigung zwar sehr sorg-

fältig bifilar zur Spirale gewunden, doch schließt er trotzdem eine nicht zu vernachlässigende Windungsfläche ein, welche bei den rasch veränderlichen Feldern zu bedeutenden Fehlern Anlaß gegeben hätte, indem hierdurch induzierte Ströme in die Meßanordnung getreten wären. Es wurde daher eine der Wismutspirale genau konforme Spirale aus Kupfer hergestellt, die Kompensationsspirale. Ein dünner, umsponnener Kupferdraht wurde bifilar zur Spirale gewunden, zwischen zwei Glimmerblättchen mit Marineleim befestigt und sodann die Windungsfläche im warmen Zustande des Kittes so lange verändert, bis sie mit der Wismutspirale genau übereinstimmte. Es wurde absichtlich auf genaue Konformität geachtet, damit Wismutspirale und Kompensationsspirale entgegengesetzt in Serie geschaltet aufeinander gelegt in jedem Felde, mochte es auch inhomogen sein, sich gegenseitig in bezug auf die Anzahl der umschlungenen Kraftlinien im Gleichgewicht hielten.

Die Galvanometer,

die zur Verwendung gelangten, waren Spulengalvanometer. Das erste von Hartmann und Braun zur Feldmessung verwendete hatte in der bekannten Ausführung zwei getrennte Wickelungen auf der drehbaren Spule: die Meßwickelung von 514 Ohm und die Dämpfungswickelung von 4,33 Ohm. Die Dämpfung konnte durch außen an die Dämpfungswickelung angeschlossene Widerstände in ein bequemes Maß gebracht werden. Die Schwingungsdauer betrug ungedämpft ca. 8 Sek., die ballistische Empfindlichkeit für 1 mm Ausschlag bei 1 m Skalenabstand $1{,}242 \times 10^{-9}$ Coul. Das zweite von Siemens & Halske mit einer einzigen Spulenwickelung bei 265 Ohm Widerstand, einer Schwingungsdauer von ca. 6 Sek., besaß eine ballistische Empfindlichkeit von $2{,}303 \times 10^{-8}$ Coul. Es wurde für die Widerstandsmessung verwendet.

Art der Widerstandsmessung.

Die größte Schwierigkeit bot die Aufgabe, wie der Widerstand der Wismutspirale bei dem rasch anwachsenden Felde in einem bestimmten Momente — also quasi „im Fluge“ — gemessen werden sollte. Es verging lange Zeit mit Vorversuchen in dieser Richtung, mehrere Anordnungen wurden durch-

probiert, bis die bedeutende Schwierigkeit, die hier im Wege lag, beseitigt wurde. Insbesondere war es nicht möglich, die Messung so auszuführen, daß man das Galvanometer einen Augenblick an die Meßanordnung anschloß, also durch Momentankontakt den veränderlichen Widerstand zu bestimmen suchte. Die Art der Messung von Eichhorn enthielt einen bedeutenden, nicht kontrollierbaren Fehler. Die Messung mußte scharf definierte Verhältnisse besitzen.

Es sei sofort die endgültige Anordnung beschrieben; sie ist schematisch in Fig. 1 ersichtlich. *a b s c* ist das Schema

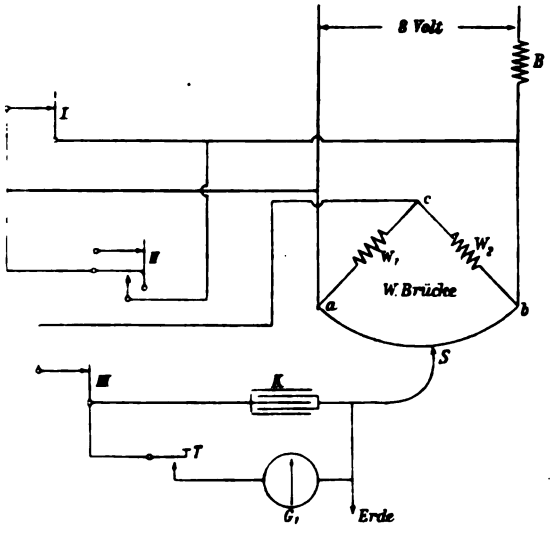


Fig. 1.

der Wheatstoneschen Brücke (Kohlrauschsche Walzenform mit um das Neunfache verlängertem Brückendraht). An den Speisepunkten *a b* liegen über dem Ballast *B* von ca. 4 Ohm 8 Volt an. Die beiden anderen Brückenecken *s c* lagen über dem Helmholtzkontakt III am Normalglimmerkondensator *K* (Siemens & Halske 0,1 bis 1 Mikrof.). Die drei Helmholtzkontakte I, II, III sind in der Anordnung so gezeichnet, daß eine von links kommende, parallel zu sich selbst verschobene vertikale Gerade — die Zeitlinie — sie in der Reihenfolge trifft, wie die Pendelplatte es in Wirklichkeit tat.

Kontakt I ist in der Ruhelage geschlossen, die Fallknagge dagegen gehoben. Wird I umgeschlagen, so wird dadurch der Kurzschluß der 8 Volt-Meßbatterie aufgehoben, der Strom beginnt durch die Wheatstonesche Brücke zu fließen, bis das Pendel den Kontakt II trifft und dessen Knagge fällt, die den Kurzschluß wieder herstellt. In dieser Zwischenzeit floß der Strom in einer Stärke von 0,1 bis 0,5 Amp. durch die Brückenanordnung, und in dieser Zwischenzeit trifft das Pendel auch Kontakt III, schaltet also den Kondensator K ab, so daß seine Ladung der Spannung der Brückenecken $c\,s$ im Momente des Aufschlagens von III entspricht. Nach Fallenlassen des Pendels wurde der Taster T gedrückt und die Ladung durch den ballistischen Ausschlag des Galvanometers G_1 gemessen.

Das vollständige Schaltungsschema gibt Fig. 2 wieder. Die Reihenfolge, in der die Kontakte getroffen werden, ist

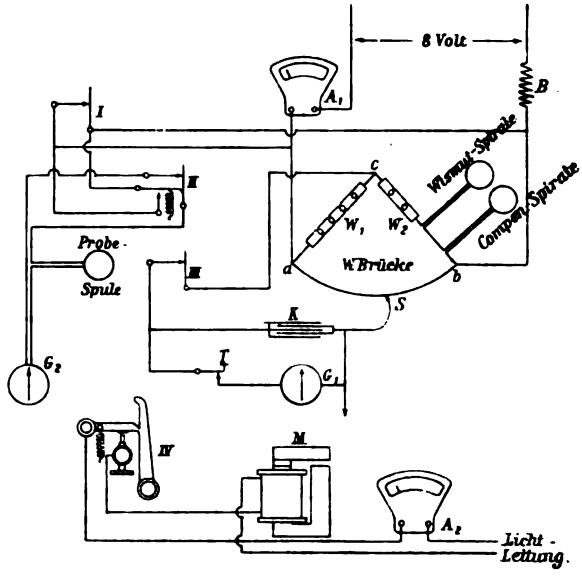


Fig. 2.

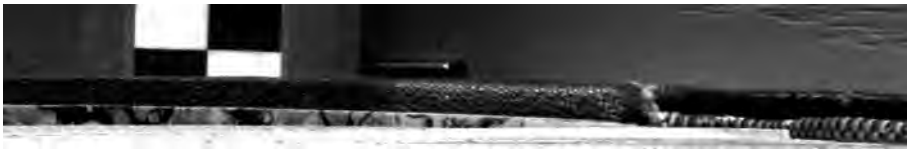
wieder entsprechend einer von links kommenden Zeitlinie gezeichnet, nämlich I, IV, III, II. IV ist der Starkstromkontakt und schaltet den Erregerstrom ein durch Niederfallen seiner Knagge.

Wurde nun die Brücke bei konstant fließendem schwachen Strome auf Null gestellt, so hatte offenbar eine jede Änderung des Widerstandes der Wismutspirale auf der rechten Seite der Brücke (bei unveränderter Stellung des Schleifkontaktes) eine Spannung an den vorher stromlosen Brückenecken zur Folge, die sich in weiten Grenzen als proportional der Widerstandsänderung erwies. Die Ladung des Kondensators im Momente des Aufschlagens des Kontaktes III gab daher genau die Widerstandszunahme des Wismuts an. Der ballistische Ausschlag des Galvanometers G_1 gibt also direkt die Zunahme des Widerstandes des Wismuts über seinen Normalwiderstand im Felde Null, auf den vorher abgeglichen war. Die ganze Widerstandsmessung „im Fluge" reduzierte sich auf diese Weise auf eine Eichung der Galvanometerausschläge entsprechend der Widerstandsänderung, indem auf der Wismutseite an einem in Serie geschalteten Präzisionswiderstande bekannte Widerstände gezogen wurden. Der auf der anderen Seite befindliche Abgleichwiderstand W_1 blieb stets unverändert. In Fig. 2 sind in die Brückenanordnung die Wismutspirale und Kompensationsspirale mit dem Eichungswiderstande W_2 schematisch eingezeichnet. A_1 und A_2 sind zwei Westonamperemeter zur Bestimmung der Stärke des Meß- und Erregerstromes. M stellt den Elektromagneten dar.

Es erübrigt nun noch einige Worte über die Feldmessung zu sagen. Es mußte offenbar dieselbe im gleichen Augenblicke geschehen, als Kontakt III aufgeschlagen wurde, damit man Widerstand des Wismuts und Feldstärke zur selben Zeit des rasch ansteigenden Feldes messen konnte. Dazu ergab sich ganz von selbst Öffnungskontakt II, dessen Fallknagge allein zum Kurzschluß des Meßstromes diente, dessen Öffner also noch zu vergeben war. Kontakt II und III wurden also stets genau koinzidierend verschoben. Trotzdem erfolgte der Meßstromkurzschluß immer, wie es ja erwünscht war, einige Zeit nach Aufschlagen von II und III, da ja die Knagge eine gewisse Zeit braucht, um auf ihren Amboß zu fallen. Der ballistische Ausschlag des Galvanometers G_2 gab also die bis dahin angewachsene Feldstärke im Interferrikum an.

Der Gang einer Messung war nun der folgende:

Zunächst statisch: Kontakt I und IV blieben ganz zu



Anfang der Pendelbahn. Kontakt I wurde zuerst getroffen, schaltete also den Meßstrom ein, hierauf Kontakt IV den Erregerstrom. Kontakt II und III befanden sich stets ganz am Ende der Bahn in Koinzidenz. Zwischen IV und II bzw. III hatte das Pendel eine so lange Zeit zu durchlaufen, daß im Momente des Aufschlagens von II und III die Feldstärke praktisch ihren Endwert erreicht hatte, die Erregerstromstärke stationär geworden war. Durch richtige Wahl der Konstanten Widerstand, Induktanz und Spannung des Erregerstromes war dies stets zu erreichen. Wurden also in solcher Lage Kontakte II und III getroffen, so war die so erhaltene Feld- und Widerstandsmessung eine statische. Die Feldmessung entsprach dem erreichten Endwerte und der Widerstand der Wismutspirale diesem stationären Zustande. Die einzige Variation lag ganz einfach in der Erregerstromstärke, d. h. im äußeren Widerstande des Magneten. Auf diese Weise wurde die statische Abhängigkeit der Widerstandsänderung des Wismuts von der Feldänderung erhalten.

Nun zur dynamischen Messung: Es wurden die Kontakte II und III jetzt ganz zum Anfang der Pendelbahn geschoben, daß sie zunächst mit IV gleichzeitig getroffen wurden. Der äußere Widerstand des Magneten blieb unverändert, so daß stets bei jeder Einzelmessung dieselben Endstromstärken erreicht wurden. Die Variation erfolgte jetzt durch allmähliches Herausschrauben der Kontakte II und III, so daß sie immer später als IV getroffen wurden, und in immer späteren Zeiten des Anstieges des Magnetfeldes Widerstand und Feldstärke angaben, also während der Bewegung von Feld und Widerstand. Dies stellt also die dynamische Messung dar.

Die Ergebnisse der statischen und dynamischen Messungen wurden nun als Kurven in Koordinatenpapier eingezeichnet. Der Vergleich der beiden mußte eine eventuelle viskose Hysteresis des Wismuts durch ein Zurückbleiben der dynamischen Kurve ergeben.

Der größeren Deutlichkeit halber seien nun genauer die einzelnen Handgriffe bei der Durchführung jeder der beiden Messungen angegeben.

Vor allem ist zu erwähnen eine sich von selbst ergebende Art und Weise der Nullstellung des Brückenkontaktes bei nicht eingeschaltetem Felde. Waren nämlich alle Hebel ein-

gelegt, also Hebel I geschlossen, so waren die die Brücke speisenden 8 Volt kurz geschlossen. Nun war der Übergangswiderstand der Platinkontakte des Hebels I nicht verschwindend klein, so daß entsprechend dem Spannungsabfall an ihm ein schwacher Strom von 2,5 Milliamp. auch in der Ruhe die Brücke durchfloß. Wurde nun ganz einfach Taster T gedrückt, so war die normale Brückenschaltung ohne Kondensator hergestellt und mit dem Galvanometer konnte der Schleifkontakt auf Null einreguliert werden. Diese Nullstellung der Brücke wurde während der Messung oftmals wiederholt, um einen Einfluß einer Erwärmung usw. sofort kompensieren zu können. Dank der Kühlvorrichtungen an der Wismutspirale selbst und am Elektromagneten waren nur kleine Nullageverstellungen zu beobachten.

War so die Brücke auf Null gestellt, dann wurde zunächst geeicht. Auf der Wismutseite wurden nacheinander 0, 1, 2, 3, 4, 5 Ohm am Rheostaten gezogen und der Ausschlag des Galvanometers bestimmt, indem man durch Drücken des ganz mit Paraffin isolierten Tasters T nach Fallenlassen des Pendels den Kondensator entlud. Diese Eichung wurde vor und nach jeder Messungsreihe wiederholt, um ein sicheres Urteil über die Konstanz der Meßanordnung zu haben. Die 8 Volt-Meßbatterie bestand aus 4 Akkumulatorenzellen hoher Kapazität und hatte sich ihre Spannung während mehrerer Stunden nie nachweisbar geändert.

Nachdem so die Widerstandsmessung geeicht war, wurde auch der Starkstromhebel IV eingelegt. Der beim Fernrohr für das Galvanometer G_2 sitzende Beobachter konnte nun das Pendel durch einen Schalter elektromagnetisch loslassen. Das fallende Pendel traf die Kontakte und wurde nach einem Hin- und Hergange wieder aufgefangen. Das die Feldmessung bedienende Galvanometer ergab sofort den ballistischen Ausschlag entsprechend dem Feldwerte beim Auftreffen auf Hebel II. Sodann begab sich der Beobachter zum Fernrohr des Galvanometers G_1, drückte den Taster T und der erfolgende Ausschlag ergab den Widerstand des Wismuts beim Aufschlagen des Hebels III. Beim Platzwechsel des Beobachters wurde auch sogleich an einem bequem zur Hand montierten Starkstromschalter der immer noch fließende Erregerstrom abgeschaltet. So war eine Messung beendet. Eine statische Messungsreihe

bestand nun, wie nochmals hervorgehoben werden soll, darin, daß Kontakte II und III sich am Ende der Pendelbahn befanden und zu einer Zeit getroffen wurden, wo der Endwert der Magnetisierung praktisch bereits erreicht war. Variiert wurde nur die Erregerstromstärke. Bei der dynamischen Messung hatte man konstante Endstromstärke — variiert wurde nur die Stellung der Kontakte II und III, die in der Anstiegszeit des Magnetismus aufgeschlagen wurden. Man kann also sagen, die statische Messung war eine dynamische bei der Feldgeschwindigkeit Null, bei stationärem Zustand. Diese Art und Weise der Messung mußte aus folgendem Grunde vorgenommen werden: Bei der dynamischen Messung wird, um das Feld in einem bestimmten Momente zu bestimmen, die Leitung der Probespule zum Galvanometer aufgeschlagen. Der nun erfolgende Ausschlag desselben ist also ungedämpft, erfolgt bei offener Galvanometerwickelung, ist eine reine Torsion der Suspension (bzw. besitzt nur die Dämpfung der zweiten Spulenwickelung des Galvanometers, die beliebig variierbar ist). Er wird dadurch zu einem Maximum und gibt ein genaues Maß der hindurchgegangenen Elektrizitätsmenge, denn alle Ausschläge, die bei geschlossener Meßwickelung erfolgen, sind notwendigerweise kleiner, weil sie gedämpft sind, und sind Funktion des oft nicht ganz homogenen permanenten Magnetfeldes des Galvanometers.

Für die statische Messung mußte daher, um dieselben Verhältnisse wie bei der dynamischen Messung zu schaffen, auch mit offener Meßwickelung gearbeitet werden. Dies wurde eben dadurch realisiert, daß die Galvanometerleitung nach erreichter, maximaler Feldstärke des Elektromagneten durch den Kontakt II aufgeschlagen wurde. Daß die Zeit von Kontakt IV bis II eben noch sehr klein war gegenüber der Schwingungsdauer des Galvanometers, so daß in dieser Zeit sich die Stellung desselben nur um hundertstel Millimeter aus seiner Ruhelage entfernt haben konnte, ergibt sich aus den Anstiegskurven des Magnetismus.

Nach vollendeter Einzelmessung wurde der Elektromagnet mittels Flüssigkeitsschalter und Wechselstrom entmagnetisiert, hierauf die aufgeschlagenen Hebel wieder eingelegt, so daß die Anordnung zu einer neuen Messung wieder bereit war.

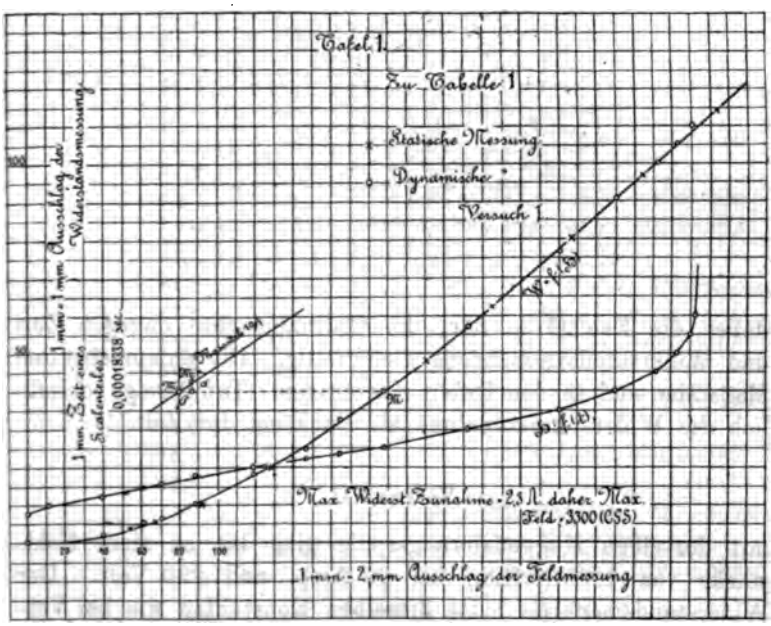
Resultat der Messungen.

Es sei nun sofort auf das Resultat der Messungen eingegangen und sodann zu Details über den „Mechanismus" der Anordnung.

Von den zahlreichen Beobachtungsreihen sollen hier drei angegeben werden. Bei allen Versuchen war eine Kontrolle des Temperaturganges notwendig. Es wurde daher stets der Widerstand des Wismuts statisch und dynamisch abwechselnd bei eingeschaltetem Felde und beim Felde Null bestimmt, um die veränderte Nullstellung bei der eigentlichen Widerstandsvermehrung durch das Feld abziehen zu können. Die Tafeln zeigen die Kurven nach Vornahme dieser Temperaturkorrektion

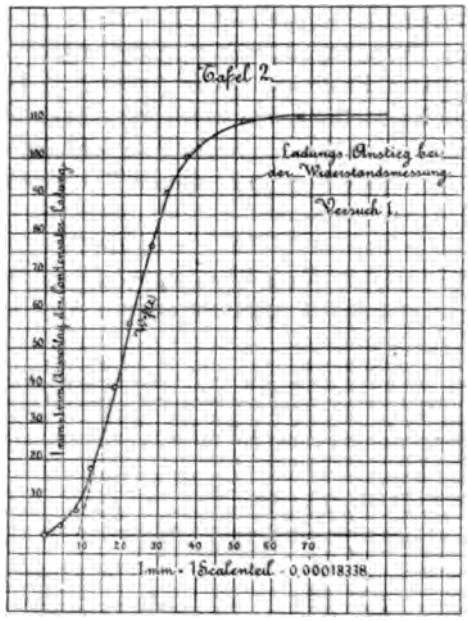
Versuch I

ergab bei 220 Volt, 30 Amp. Erregerstrom mit Spule *A* eine maximale Feldstärke von 3300 (C.G.S.). Zur Widerstands-



messung wurde 1 Mikrof. gestöpselt, das Feldmeßgalvanometer erhielt, um den Ausschlag in eine bequeme Größe zu bringen,

1000 Ohm Ballast. Tab. 1 gibt den Gang der Beobachtung wieder, das Resultat ist graphisch aus Taf. 1 und 2 ersichtlich. In Taf. 1 ist die Widerstandsvermehrung als Funktion der Feldstärke und diese wieder als Funktion der seit Stromschluß verflossenen Zeit aufgetragen. Die Abszissenachse stellt



daher die Feldstärke dar, die Ordinatenachse dagegen Zeit und Widerstandsvermehrung gleichzeitig. Die entsprechenden Maßstäbe sind in den Tafeln eingetragen. Taf. 2 zeigt schließlich die Widerstandszunahme als Funktion der Zeit.

Versuch II

mit derselben Magnetisierungsspule ging bis zu einer Feldstärke von 4000 (C.G.S.) bei 60 Amp. und 220 Volt. Der Widerstandsmeßkreis hatte dieselben Konstanten wie bei Versuch I, der Feldmeßkreis dagegen besaß 2000 Ohm Ballast. Tab. 2 mit Taf. 3 geben das Resultat der Beobachtungsreihe an.

Tabelle 1.

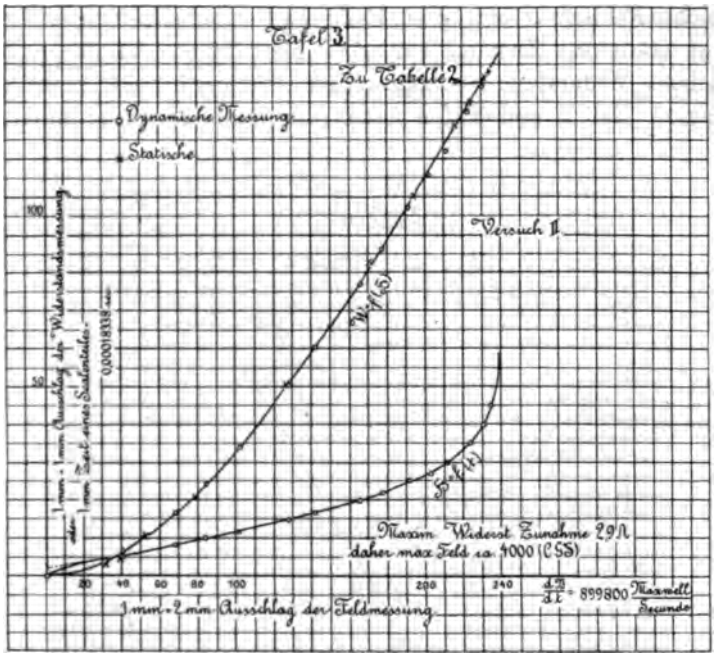
Versuch 1. Hierzu Taf. 1 u. 2.

Statisch			Dynamisch		
	Widerstand	Feld	Stellung Kontakt II u. III	Widerstand	Feld
Eichung 0	−0,4	—	0	1,1	—
Eichung 0,1 Ω	+4,4	—	10	1,3	11,8
Eichung 1	45,5	—	„	1,3	—
Eichung 2	89,5	—	12	3,2—3,9	35—38
Eichung 0	0,8	—	„	1,5	—
	3,6—3,8	54—54	14	6,7—5,9	61—56
	0,9	—	„	1,8	—
	6 —6,4	67,5—67,5	16	13,2—9	93—68,8
	6,2—6,3	67 —67,5	„	9,8	72
	1	—	„	3,6	—
	11—11,5	92—92	18	14,3—14,8	88—91
	1	—	„	3,8	—
	21,6	129,1	20	21,8	119
	1,5	—	„	4,1	—
	49,9	211	22	30—29	146—141
	50	211	„	4,8	—
	1,8	—	24	37,5—38,6	164—196
	64,8	247,2	„	4,8	—
	65	248	26	44,8—44,6	188,9—188
	1,8	—	30	62,6—61,2	284,5—282
	81,7	287	„	4,8	—
	81,9	287,5	35	81,3—80,7	280—278,5
	1,9	—	„	4,6	—
	98,1	324	40	95—95,2	310,5—310
	98,2	324	„	4,8	—
	1,9	—	45	104,8—104	332—329
	116,2	364	„	4,8	—
	116,4	364	50	109,4—109,2	341,5—343
	1,9	—	„	4	—
			55	113,5—113,5	351—350,5
			„	4	—
			60	114,9—115,2	352,5—352,5
			„	4	—
			Eichung 0,1 Ω	8,2	—
			Eichung 1	48,1	—
			Eichung 2	92,6	—
			Eichung 0	3,4	—

Tabelle 2.

Versuch II. Hiersu Taf. 8.

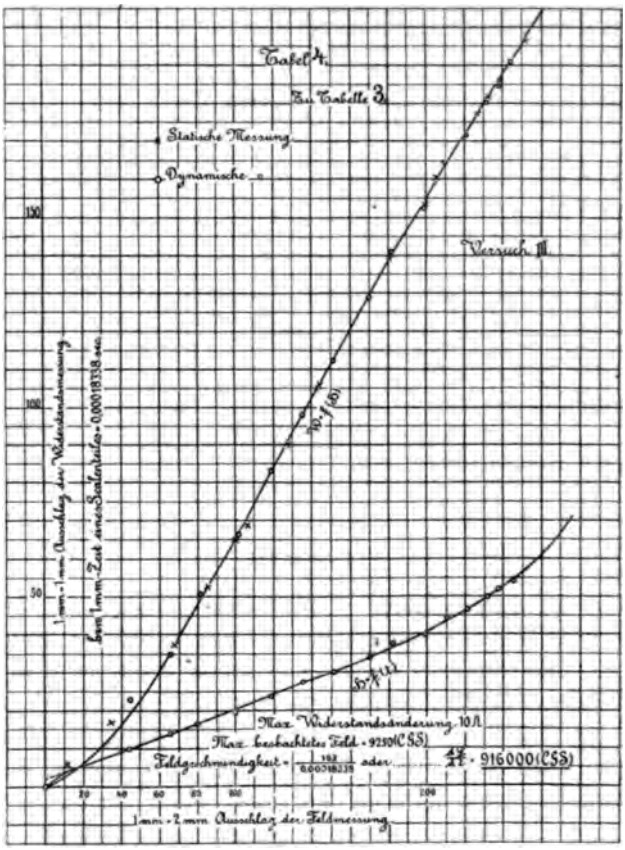
Statisch			Dynamisch		
	Widerstand	Feld	Stellung	Widerstand	Feld
Eichung 0 Ω	0			−2,2	
0,1	4,7—4,7		10	−2,8	
1	45,6—45,6		12	−1,9—2	11,8—11,2
2	90—89,7			−2,7	
3	132,9—132,8		15	3,7—3,8	40,5—40,5
4	174,9—174,2			−2,8	
0	0		18	14,3—14,3	68—67
	3,1—2,6	32—41,5		−2	
	−0,6		20	22,4—22,6	84—83,5
	4,8—4,4	39,5—39,5		−1,5	
	−1		22	32,8—31,9	101,5—105
	9,2—9,1	54—54		−1,1	
	−1,2		25	50,7—48,4	128,8—125,5
	19,4—19,4	77—76,9		−0,6	
	−1,3		27	59,7—59,8	142—143
	49,9—49	127,8—127		−0,2	
	−1,5		30	77,4—76,9	165,5—164,5
	64,1—64,3	148,9—148,5		−0,1	
	−2		32	86,4—85,2	177—176
	80,9—80,8	171—170,8		−0,4	
	−2,2		35	97,8—98,1	191,5—192
	97,5—97,4	193—193		1,1	
	−2,7		37	107,2—106,7	202—201,5
	115,9—115,9	216—216		1,8	
	−3		40	114,7—113,7	211,5—210,5
	121,9—121,3	223—222,7		2,1	
	−2,9		45	124,8—124,8	223,3—223
	128,4—128,3	231,8—231,2		2,7	
	−3		50	131,8—131,6	230,5—230,3
	130,4	234		2,9	
	−3		55	135,2—135,2	234,5—235
	132,5	236		2,4	
	134,4	238,5	Eichung 0,1 Ω	8,2	
	−2,5		1	48,7—48,4	
	135,8	240	2	92,5	
			3	134,8—134,2	
			0	3,2	



Versuch III.

Um zu noch höheren Feldstärken gelangen zu können, wurde mit Magnetisierungsspule *C* und größerer Belastung operiert. Die Spule *C* besaß, wie schon erwähnt, 0,73 Ohm; der vorgelegte Ballast betrug 0,5 Ohm, so daß eine Endstromstärke bei 220 Volt Erregung von ca. 170 Amp. erzielt wurde. Da diese hohe Stromstärke bei einer Energie von 37 Kilowatt die Magnetisierungsspule in kürzester Zeit verbrannt hätte, wurde in die Starkstromleitung einpolig eine Sicherung montiert, deren Bleidraht durch Versuche so gewählt wurde, daß er nach ca. 0,05 Sek. abbrannte, einer Zeit, in welcher die Messung längst beendet war. Nach jedesmaligem Fallen lassen des Pendels mußte dann ein frischer Bleidraht eingezogen werden. Dank der kurzen Schlußzeit trat bei diesen Messungen eine nur sehr geringe Temperaturerhöhung ein. Der Widerstandsmeßkreis erhielt eine Kapazität von 0,5 Mikrof., das Feldmeßgalvanometer einen Vorschaltwiderstand von 5000 Ohm. Die so er-

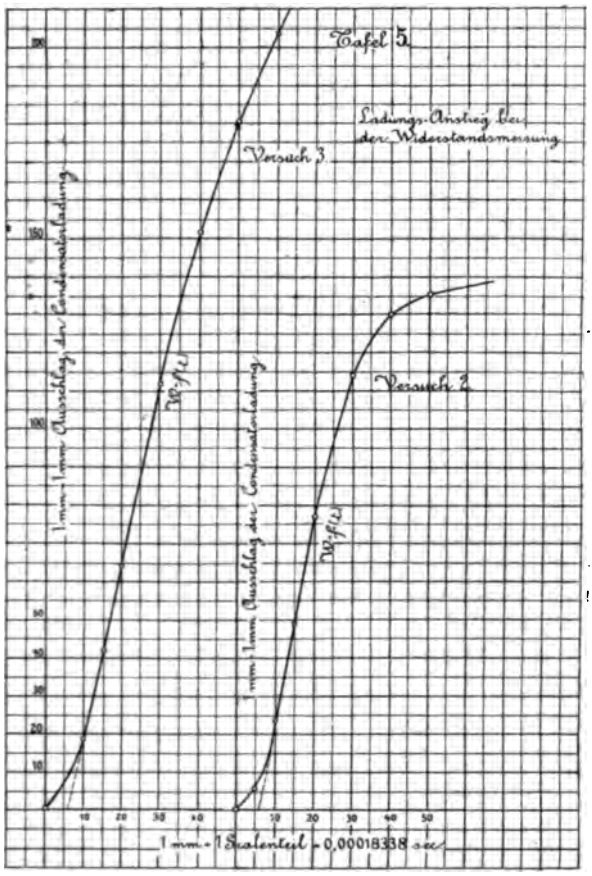
reichte Feldstärke betrug am Ende der Pendelbahn 9250 (C.G.S.). Der stationäre Zustand war aber hier infolge des durch den kleinen Widerstand verlangsamten Anstieges noch nicht erreicht. Tab. 3 und Taf. 4 geben das Resultat dieser Messung



an. Taf. 5 zeigt die Abhängigkeit des Widerstandes von der Zeit bei den beiden letzten Versuchen.

Bei allen drei Versuchen sind in den zugehörigen Kurventafeln bei den Widerstandskurven als Funktion des Feldes die dynamisch gewonnenen Werte durch kleine Kreise, die statisch gewonnenen durch kleine Kreuze markiert. Die dadurch erhaltenen zwei Kurven fallen in allen drei Fällen vollständig

einander, erscheinen gänzlich verschmolzen, die einzelnen namischen Beobachtungen liegen abwechselnd rechts und ks von den beobachteten statischen Werten, so daß keine seitige Verkleinerung der dynamischen Messung zu bemerken.



Eine „viskose Hysteresis" der Widerstandsvermehrung Wismuts im variablen Felde ist aus den vorliegenden ssungen daher nicht zu ersehen.

Wie später gezeigt werden soll, bedürfen die vorliegenden sultate zweier eingehender Korrekturen durch eine Trägheit Widerstandsmessung und eine Trägheit in der Feldmessung,

Größen, die bei den gewöhnlich vorkommenden Messungen so klein sind, daß sie stets vernachlässigt werden, aber hier der Beachtung unterworfen werden müssen.

Tabelle 3.

Versuch III. Hierzu Taf. 4.

		Statisch		Dynamisch		
		Widerstand	Feld	Stellung	Widerstand	Feld
Eichung	0 Ω	0		64	191	245
	1	22,8			0,4	
	2	44,4—44,4		62	185,2	238
	5	106—106			0,5	
	10	196—196		60	180,5	232
	0	0		57	172	221
Erregerstromstärke	4 Amp.	5,3—5,5	11—10,5		0,5	
	0	0		54	165,5	210
	9,3	37	68	50	153,2	198,8
	8,0	16	35		1	
	11,8	53—50,5	86—81	47	142	182
	10	21,5	41,5		1	
	0	0		44	130,3	170
	15	65,5	101,5		1,2	
	15	69	106	40	113,6	151
	20,5	90—88,3	128—120		1,4	
	0	0		37	99	135
	25	105,5	145		1,6	
	32,5	127	169	34	85	119
	0	0			1,8	
	38,5	139	184	30	67,7	101
	46,5	148	197		1,8	
	55,5	153	200	27	53,5	80,5
	0	0			1,8	
	62	160	206	24	36,2	66
	85	177	228		1,8	
		0		20	25,3	45
Äußerer Ballast	1,5 Ω	182	233		2	
	1,2	186	239	Eichung 1 Ω	24,5	
	0	0,4		2	46,2	
	0,6	196	250	5	107,2	
		0,5		10	197,2	
Eichung 10 Ω		196,5		0	2,2	

Es war nun wünschenswert, die Messungen mit aufsteigendem Magnetismus durch solche mit absteigender Magnetisierung zu ergänzen.

Es wurde anfangs versucht, die abnehmende Magnetisierung dadurch zu erzeugen, daß durch das fallende Pendel mit dem Starkstromkontakte IV die ständig vom Strom durchflossene Erregerspule kurz geschlossen wurde, denn ein Ausschalten des Starkstromes durch einen Pendelkontakt war wegen des Flammenbogens nicht möglich. Diese Versuche ergaben einen außerordentlich langsamen Abstieg, denn die kurzgeschlossene Erregerspule wirkte als Drossel für die entstehende Kraftlinienvariation.

Um einen genügend raschen Abfall zu erzeugen, wurde nun Spule B mit zwei getrennten Wickelungen benutzt. Durch die eine Wickelung floß ständig ein Strom von der Stärke i, in der anderen Wickelung wurde nun durch das fallende Pendel der Strom $-2i$ dazu geschaltet, so daß der Magnetismus durch Null hindurch den entgegengesetzten Wert annehmen mußte. In der Tat war es so möglich, einen genügend raschen Abfall der Magnetisierung zu erreichen. Die Originalarbeit enthält einen vollständigen Beobachtungsgang des Widerstandes des Wismuts bei abnehmender Induktion und ist auch bei diesem Versuche innerhalb der Beobachtungsfehler keine viskose Hysteresis zu bemerken.

Diskussion der Widerstandsmeßanordnung.

Es war zu prüfen, ob durch die Zeit, welche nach Fallenlassen des Pendels und Drücken des Tasters bei der Widerstandsmessung verstreicht, ein Zurückgehen der Kondensatorladung verursacht sein könnte. Ein diesbezüglicher Versuch lehrte, daß nach 10 Sek. noch keine Abnahme zu bemerken ist. Da nun die bei den Beobachtungen tatsächlich verflossene Zeit höchstens 7 Sek. betrug, so ist in dieser Richtung kein Fehler vorhanden.

Des weiteren war bis jetzt die Kondensatorladung stets proportional dem Galvanometerausschlage gesetzt worden. Dies war offenbar zu vermuten, denn eine Kondensatorentladung durch das Galvanometer ist eine ballistische Messung, der Stromstoß geschieht in der Ruhelage des Galvanometers, der

Ausschlag erfolgt ungedämpft, ist, da der Stromkreis nach erfolgter Entladung für die Galvanometerschwingung so gut wie geöffnet erscheint, eine reine Torsion des Suspensionsmetallbandes. Der Ausschlag kann daher von irgend einer Inhomogenität des Feldes um die drehbare Spule im Galvanometer nicht abhängen, sondern ist nur Funktion der Feldstärke in der Ruhelage. Die Galvanometerablesung muß sich daher in weiten Grenzen als proportional der Kondensatorladung erweisen. Dieses Verhalten wurde nach einem einfachen Schaltungsschema näher untersucht und ergab sich der Ausschlag des Galvanometers in weiten Grenzen als vollkommen proportional der hindurchgegangenen Elektrizitätsmenge.

Wie bereits mehrfach erwähnt, wurde die Widerstandsvermehrung der Wismutspirale im „Fluge" dadurch bestimmt, daß die Spannung der Brückenecken den Meßkondensator auflud. Offenbar wird bei raschem Ansteigen des Widerstandes, also bei rascher Spannungsvariation an der Brücke, die Kondensatorladung etwas hinter der ladenden Spannung zurückbleiben. Diese Trägheit der Meßanordnung muß berücksichtigt werden.

Eine analytische Behandlung der Aufladeverhältnisse des Kondensators in der Brückenschaltung wäre wegen der Schwierigkeit der Bestimmung der Verteilung der Belastung der einzelnen Zweige während des Aufladens und den unbekannten Selbstinduktionskoeffizienten aussichtslos gewesen. Einfacher erschien der Vorgang, aus genau definierbaren Aufladeverhältnissen, z. B. plötzlichem Einschalten des Meßstromes, ein Urteil über die „Zeitkonstante" der Meßanordnung zu gewinnen und mit dieser gemessenen Größe analytisch das Zurückbleiben bei dem dynamischen Anstiege zu bestimmen.

Bei der dynamischen Messung wird der Meßstrom durch den Kontakt I lange vorher eingeschaltet, jedenfalls so lange vor der eigentlichen Widerstandsänderung des Wismuts, daß er bereits stationär geworden ist, was in der Zeit von 3 Skt. erreicht wird, wie dies besondere Versuche ergaben. Nun erst wird durch den Starkstromkontakt IV das Feld erregt und die Widerstandsänderung des Wismuts beginnt zu entstehen, ladet ihrerseits durch die platzgreifende Unsymmetrie der Brücke den Kondensator auf, alles bei schon stationär ge-

wordenem Meßstrome. Um nun die Zeitkonstante dieser Aufladeverhältnisse und mit ihr die Trägheit der Widerstandsmessung kennen zu lernen, wurde durch Schaltung (Fig. 3) die soeben erörterten Verhältnisse in genau definierter Weise realisiert.

In der Ruhe ist die Brücke auf Null abgeglichen, bei W_2 wird hierauf ein Widerstand von 1—4 Ohm gezogen, und diese hergestellte Unsymmetrie durch den Präzisionskontakt IV wieder kurzgeschlossen. Kontakt III wird nun zuerst in Koinzidenz mit Kontakt IV getroffen. Der

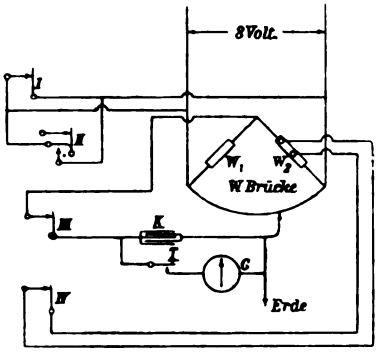


Fig. 3.

Tabelle 4.

1 Ω		2 Ω		4 Ω	
Totaler Ausschlag					
42 mm		84 mm		159 mm	
Stellung III	Ausschlag mm	Stellung III	Ausschlag mm	Stellung III	Ausschlag mm
10	0	10	0	10	0
10,10	—	10,10	0	10,10	0
15	3,3	15	13	15	20
20	6,2	20	20	20	38
30	16,1	30	38	30	63,5
40	22,2	40	46	40	87
50	27	50	56,4	70	128
60	30	70	68	11	145,2
70	32,6	90	75	11,50	155,2
80	35	11,10	79	12	157
90	37	11,50	82,2	13	159
11	37,5	12	84		
11,50	39,5	13	84		
12	40				
12,50	41				
13	42				

Hebel I wird genügend lange vorher aufgeschlagen, damit der Meßstrom beim Auftreffen des Pendels auf IV bereits konstant ist. Auf diese Weise wird in die vorher abgeglichene Brücke bei stationärem Meßstrome plötzlich eine Unsymmetrie geworfen, welche ihrerseits bewirkt, daß sich der Kondensator K zu der der Unsymmetrie entsprechenden Spannung auflädt. Das Tempo dieser Aufladung kann nun durch Verstellen von Kontakt III aus der Gleichzeitigkeitslage mit IV heraus untersucht werden. Solche Aufladungen für eine Unsymmetrie von 1, 2 und 4 Ohm bei W_2 zeigt vorstehende Tab. 4.

Im folgenden soll nun das Resultat dieser Tabelle näher ausgewertet werden.

Berechnung der Kondensatorträgheit.

Wie im vorhergehenden ersichtlich, ist der Einfluß der in der Brücke vorhandenen kleinen Selbstinduktion der bifilar gewickelten Widerstandssätze ganz zu vernachlässigen, und man kann die ganze Anordnung äquivalent setzen einem Stromkreise mit Widerstand und Kapazität in Serienschaltung, ohne Selbstinduktion.

Die Gleichung des Aufladevorganges eines solchen Stromkreises bei plötzlichem Einschalten einer äußeren elektromotorischen Kraft ist bekanntlich[1])

$$q = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \tag{1}$$

wo q die variable, Q die Maximalladung bedeuten, e die Basis der natürlichen Logarithmen, R den Widerstand und C die Kapazität.

Oder, wenn wir den Begriff der Zeitkonstanten einführen:

$$T = RC, \tag{2}$$

$$q = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

Die Aufladekurven dieser Art enthält nun die Tab. 4. Um

1) Vgl. Bedell u. Crehore, Theorie der Wechselströme p. 57.

aus den gemessenen Resultaten die Zeitkonstante des Kondensatorstromkreises berechnen zu können, dient die Gleichung:

$$T = \frac{t \log e}{\log Q - \log (Q-q)}, \tag{3}$$

gewonnen aus der Gleichung (2) durch Auflösung nach T.

Die Lösung der allgemeinen Differentialgleichung eines Stromkreises mit Widerstand und Kapazität von der Form:

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = E, \tag{4}$$

für den Fall, daß die „eingeprägte" äußere elektromotorische Kraft

$$E = f(t) \tag{5}$$

eine beliebige Funktion der Zeit ist, wird bekanntlich dargestellt durch die Gleichung[1]):

$$q = \frac{e^{-\frac{t}{T}}}{R}\int e^{+\frac{t}{T}} f(t)\, dt + c\, e^{+\frac{t}{T}}. \tag{6}$$

In dem vorliegenden Falle ist nun die elektromotorische Kraft E proportional der Widerstandsänderung des Wismuts. Taf. 2 und 5 geben graphisch die Abhängigkeit der Widerstandsänderung von der Zeit bei den drei dargestellten Versuchen an. Wenn man in jenen Kurven von dem, infolge der Inkonstanz der Permeabilität des Eisens, anfangs zu langsamen Anstiege abstrahiert und den gestrichelten Verlauf betrachtet, so kann man in allen drei Fällen mit großer Annäherung E als eine Exponentialfunktion der Zeit betrachten.

Diese Differenz der beobachteten und der analytisch einzusetzenden Funktion wird bedeutungslos, da man nur den Anfangspunkt der Zeitzählung in den Schnittpunkt der gestrichelten Linie mit der Zeitachse zu legen braucht, um sich, positive Werte der Zeit vorausgesetzt, den wahren Verhältnissen möglichst anzunähern. Auch wird offenbar, da die analytisch substituierte Kurve anfangs steiler ist als die wirklich beobachtete „Eisen"-Kurve, der berechnete Fehler, bzw. die Kondensatorträgheit in den ersten zwei bis drei Skalenteilen zu groß ausfallen, also wird jedenfalls die Berechnung der Trägheit nirgends einen zu kleinen Wert vortäuschen.

1) l. c. p. 53.

Wir sind also berechtigt zu setzen:

$$E = f(t) = a\left(1 - e^{-\frac{t}{m}}\right), \tag{7}$$

wo m die Zeitkonstante der Widerstandsänderung des Wismuts bedeutet.

Substituiert man (7) in (6), und berücksichtigt man, daß sich die arbiträre Konstante c aus den Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad q = 0$$

zu

$$c = a\,C\frac{T}{m - T}$$

ergibt, so erhält man

$$q = Ca\left(1 - \frac{m}{m-T}e^{-\frac{t}{m}} + \frac{T}{m-T}e^{-\frac{t}{T}}\right). \tag{8}$$

Dies ist nun die gesuchte Lösung der Differentialgleichung.

Bei trägheitslosem Aufladen des Kondensators a tempo mit der Widerstandsänderung, würde sein:

$$T = 0,$$

also

$$q' = Ca\left(1 - e^{-\frac{t}{m}}\right). \tag{9}$$

Die Differenz beider Werte ist die gesuchte Trägheit der Kondensatormessung und beträgt:

$$q' - q = \frac{TQ}{m-T}\left(e^{-\frac{t}{m}} - e^{-\frac{t}{T}}\right), \tag{10}$$

wo $Q = Ca$ die Maximalladung bedeutet.

Die gesuchte Korrektur der Widerstandsmessung ist daher, wie es auch selbstverständlich ist, stets positiv und kann nach Berechnung von m und T für die einzelnen Versuche leicht graphisch konstruiert werden.

Berechnung der Kondensatorzeitkonstanten.

T, die Kondensatorzeitkonstante, ergibt sich aus den Resultaten der Tab. 4 mit Hilfe der Formel (3):

$$T = \frac{t \log e}{\log Q - \log(Q - q)}.$$

So erhalten wir bei *Versuch I* und *II* für die verwendete Kapazität von 1 Mikrof.:

$$T = 6{,}12\ 10^{-5}\ \text{sec}$$

und bei *Versuch III* für 0,5 Mikrof.:

$$T = 3{,}06\ 10^{-5}\ \text{sec}.$$

Berechnung der Zeitkonstanten *m*.

Bei der Auswertung der Zeitkonstanten aus den beobachteten Kurven Taf. 2 und 5 muß auf den Umstand aufmerksam gemacht werden, daß man so die Gleichung der Kurven aufstellt, die bereits durch die Trägheit der Meßanordnung etwas zu kleine Werte gegenüber dem wahren Verlaufe des Widerstandes mit der Zeit besitzen. Lassen wir nun vorläufig diese Tatsache unberücksichtigt, berechnen aus den, den wirklichen Verhältnissen nicht ganz entsprechenden Kurven Taf. 2 und 5 die Trägheit der Meßanordnung, so wird deren Größe ergeben, ob dies Verfahren zulässig war oder nicht.

Tatsächlich ergibt sich die Korrektur, wie vorher bemerkt werden soll, so klein, daß eine Korrektur der Korrektur auf Grund des eben erwähnten Umstandes Werte besitzen würde, die in der Größenordnung von 0,01 mm liegen, also bei einer Ablesegenauigkeit von 0,1 mm vollständig innerhalb der Fehlergrenze verschwinden.

Das Vorstehende berechtigt uns also, die Zeitkonstanten aus den direkt gemessenen Kurven zu berechnen.

Es kommt wieder die Formel:

$$m = \frac{t \log e}{\log Q - \log (Q - q)}$$

zur Anwendung. Dies ergibt für die drei Versuche folgende Resultate:

Versuch I $\quad m = 3{,}183\ 10^{-3}$ sec,

Versuch II $\quad m = 3{,}271\ 10^{-3}$ sec,

Versuch III $\quad m = 6{,}731\ 10^{-3}$ sec.

Berechnung der Kondensatorkorrektur.

Da im vorhergehenden alle Werte zur Substitution in Gleichung (10) ermittelt wurden, kann nun die Trägheit des Meßkondensators zahlenmäßig bestimmt werden:

Es war

$$q' - q = \frac{1}{\frac{m}{T} - 1} Q \left(e^{-\frac{t}{m}} - e^{-\frac{t}{T}} \right),$$

also *Versuch I*:

$$q' - q = 2{,}178 \left(e^{-\frac{t}{3{,}18} 10^3} - e^{-\frac{t}{6{,}12} 10^3} \right) \text{mm}.$$

Zur Konstruktion der beiden Exponentialkurven, deren Differenz die gesuchte Korrektur ausmacht, kann man einen Wert jeder der beiden Exponentialausdrücke berechnen und aus diesem und dem Anfangswert durch fortlaufendes Verhältnis die anderen Werte bestimmen. Solche spezielle Werte sind im vorliegenden Falle:

$$2{,}178\, e^{-\frac{5t}{3{,}18} 10^3} = 1{,}632 \text{ mm} \text{ für } t = 5 \text{ Skt.},$$

$$2{,}178\, e^{-\frac{1t}{6{,}12} 10^3} = 0{,}108 \text{ mm} \text{ für } t = 1 \text{ Skt.}$$

Versuch II:

$$q' - q = 2{,}632 \left(e^{-\frac{t}{3{,}27} 10^3} - e^{-\frac{t}{6{,}12} 10^3} \right) \text{mm}.$$

Spezielle Werte sind:

$$2{,}632\, e^{-\frac{5t}{3{,}27} 10^3} = 1{,}988 \text{ mm} \text{ nach } t = 5 \text{ Skt.}$$

$$2{,}632\, e^{-\frac{1t}{6{,}12} 10^3} = 0{,}130 \text{ mm} \text{ nach } t = 1 \text{ Skt.}$$

Versuch III:

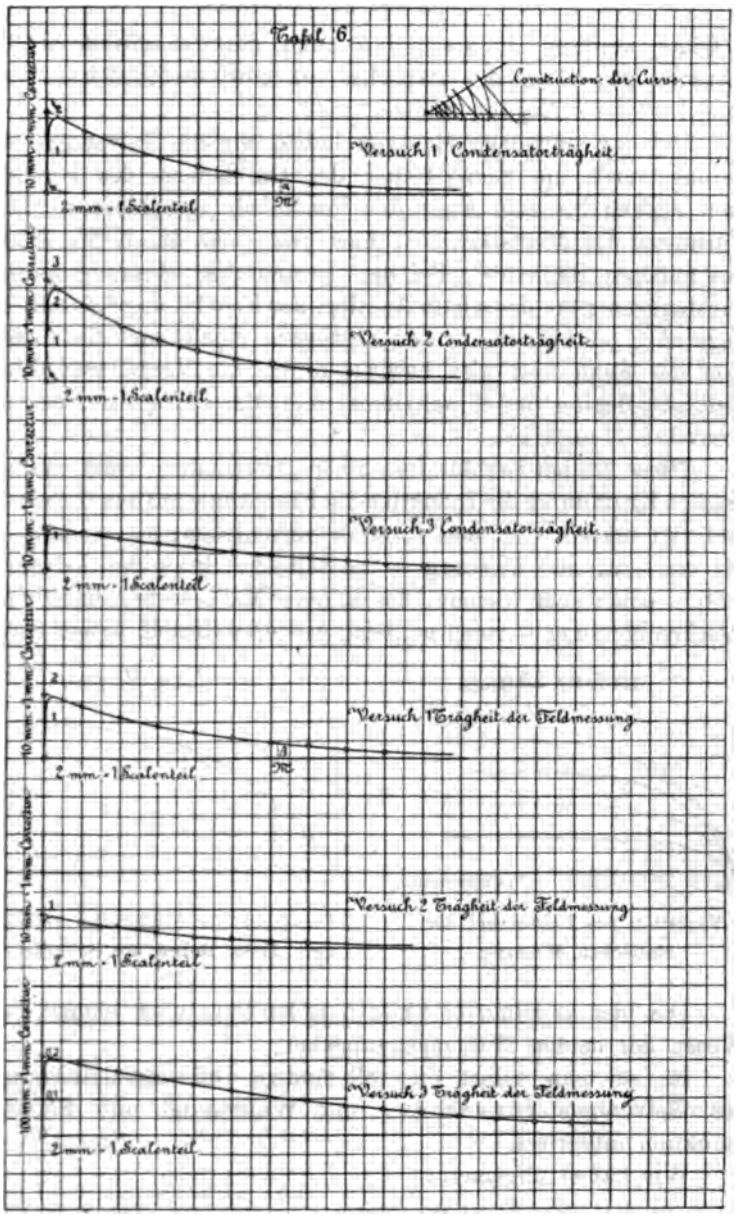
$$q' - q = 1{,}142 \left(e^{-\frac{t}{6{,}78} 10^3} - e^{-\frac{t}{3{,}06} 10^3} \right) \text{mm}.$$

Spezielle Werte:

$$1{,}142\, e^{-\frac{5t}{6{,}78} 10^3} = 0{,}966 \text{ mm} \text{ nach } t = 5 \text{ Skt.},$$

$$1{,}142\, e^{-\frac{1t}{3{,}06} 10^3} = 0{,}00285 \text{ mm} \text{ nach } t = 1 \text{ Skt.}$$

Die ersten drei Kurven auf Taf. 6 geben nun graphisch in zehnfach größerem Maßstabe die Kondensatorträgheit an.


Tafel 6.
Construction der Curve.
Versuch 1 Condensatorträgheit.
2 mm = 1 Scalenteil.
Versuch 2 Condensatorträgheit.
2 mm = 1 Scalenteil.
Versuch 3 Condensatorträgheit.
2 mm = 1 Scalenteil.
Versuch 1 Trägheit der Feldmessung.
2 mm = 1 Scalenteil.
Versuch 2 Trägheit der Feldmessung.
2 mm = 1 Scalenteil.
Versuch 3 Trägheit der Feldmessung.
2 mm = 1 Scalenteil.

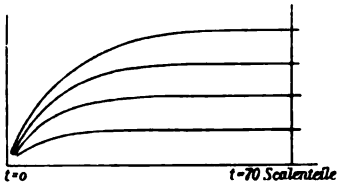
Berechnung der „Feldträgheit".

Ohne weiteres ist klar, daß auch die dynamische Feldmessung gegenüber der statischen ein gewisses Zurückbleiben, eine zu kleine Angabe besitzen muß.

Bei der statischen Messung haben wir die Galvanometerleitung durch die ganze Dauer des Durcheilens des Pendels vom Anfang bis zum Ende der Pendelbahn geschlossen. Die Variation der Feldstärke ist hier gewonnen durch Variation des äußeren Ballastes. Bei der dynamischen Messung haben wir dagegen stets denselben Anstieg, der Feldöffnungskontakt II liegt aber jetzt innerhalb des Anstiegsbereiches, und die Variation des Feldes ist hier bewirkt durch die Veränderung der Zeit seit Beginn des Einschaltens, d. h. der Distanz der beiden Kontakte II und IV.

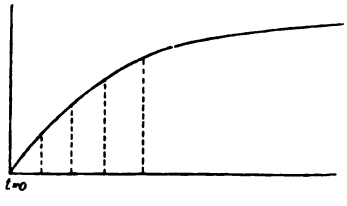
Diese beiden Verhältnisse einer „treibenden" elektromotorischen Kraft durch die Induktion der Probespule auf den Galvanometerstromkreis sind nun insofern verschieden, als einmal — bei der statischen Messung — die Selbstinduktion des Galvanometers einen sehr kleinen, das andere Mal —, bei der dynamischen Messung — einen ungleich größeren Einfluß haben muß.

Statische Messung



Variation des Feldes bei der statischen Messung.

Dynamische Messung



Variation der Feldstärke bei der dyn. Mess. durch die Schlußzeit.

Die hier angeführten Skizzen sollen kurz noch einmal das Wesen der beiden Messungen angeben.

Es sei nun sofort die vollständige Differentialgleichung des Galvanometerstromkreises mit Widerstand und Selbstinduktion integriert.

Wir haben allgemein:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{1}{L} E = \frac{1}{L} f(t). \tag{11}$$

Die elektromotorische Kraft E ist hier nun gebildet durch die Induktion der Probespule:

$$E = f\frac{dB}{dt} \quad (f = \text{Proportionalitätskonstante}); \tag{12}$$

es befolgt B das Gesetz:

$$B = B_0\left(1 - e^{-\frac{t}{n}}\right), \tag{13}$$

denn ganz wie früher bei der Widerstandsänderung sind wir hier berechtigt, den Anstieg der Feldstärke bzw. Induktion im Interferrikum als eine Exponentialfunktion der Zeit zu betrachten, wie dies aus den Tafeln 1, 3 und 4 hervorgeht. Auch hier ist wieder der infolge der kleinen Permeabilität des Eisens bei kleinen Feldstärken zu langsame Anfang zu eliminieren und der Beginn der Zeitzählung in den Schnitt der gestrichelten Kurve mit der Zeitachse zu rücken. Gleichung (13) kann daher als Darstellung des Feldanstieges dienen.

n ist hier die Zeitkonstante des Feldanstieges und als solche verschieden von m, der Zeitkonstanten des Widerstandsanstieges, da ja die Widerstandsänderung des Wismuts keine lineare Funktion der Feldstärke ist, sondern eine solche zweiten Grades.

Wir haben also:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{B_0}{n}e^{-\frac{t}{n}},$$

also:

$$E = f\frac{B_0}{n}e^{-\frac{t}{n}} = \lambda e^{-\frac{t}{n}}. \tag{14}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist nach bekanntem Verfahren[1]):

$$i = \frac{1}{L}e^{-\frac{t}{T}}\int e^{+\frac{t}{T}} f(t)\,dt + c\,e^{-\frac{t}{T}}, \tag{15}$$

c bestimmt sich aus der Bedingung:

$$t = 0, \quad i = 0,$$

also:

$$c = -1$$

und es wird

$$i = \frac{\lambda}{R}\frac{n}{n-T}e^{-\frac{t}{T}}\left(e^{t\frac{n-T}{nT}} - 1\right) = \frac{\lambda}{R}\frac{n}{n-T}\left(e^{-\frac{t}{n}} - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

1) Vgl. Bedell u. Crehore, p. 27.

Nun sind alle Ablesungen am Feldmeßgalvanometer als ballistische Ausschläge proportional der hindurchgeflossenen Elektrizitätsmenge, stets vorausgesetzt, daß die Zeit, in der die Elektrizitätsmenge das Galvanometer durchströmt, klein ist gegen die Schwingungsdauer, was bei den vorliegenden Versuchen ja stets der Fall war, denn die totale Anstiegsdauer des Magnetismus zählte nach hundertstel Sekunden, während die Schwingungsdauer des Galvanometers 8 Sek. betrug.

Wir haben also die durchflossene Elektrizitätsmenge:

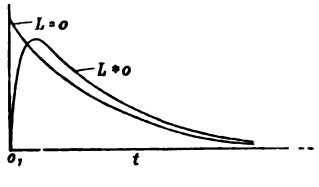
$$(16)\quad q = \int_0^t i\,dt = \frac{\lambda}{R}\frac{n}{n-T}\left(T e^{-\frac{t}{T}} - n e^{-\frac{t}{n}} + n - T\right).$$

Diese so gewonnene Formel haben wir einmal für den Fall der statischen Messung und dann für die dynamische Messung zu diskutieren, um so die Trägheit der dynamischen Messung gegen die statische zu erfahren.

Bei den statischen Messungen bleibt der Galvanometerstromkreis bei jedem Anstiege des Magnetismus bis zum erreichten stationären Zustande geschlossen, praktisch ist also $t = \infty$ zu setzen. Für diesen Fall ergibt die Gleichung (16):

$$(17)\quad q' = \frac{\lambda}{R} n.$$

Dieses Resultat ist bemerkenswert, denn es ist frei von T, also von L und zeigt also, daß in dem speziellen Falle einer eingeprägten elektromotorischen Kraft von der Form einer Exponentialfunktion mit reellem Exponenten die nach Ablauf einer genügend langen Zeit durch den betreffenden Stromkreis geflossene Elektrizitätsmenge unabhängig von einer vorhandenen Selbstinduktion ist. Die Ströme in jedem Momente, also die Verteilung der Elektrizitätsmenge über die Schlußzeit ist davon abhängig, ob Selbstinduktion vorhanden ist oder nicht, aber die total hindurchgeflossene Menge ist davon unbeeinflußt. Nebenstehende Skizze zeigt die Ströme als Funktion der Zeit bei Selbstinduktion und bei Abwesenheit von solcher. Die Flächen der beiden Kurven mit der Zeitachse sind also gleich.



Hieraus ist ersichtlich, daß die bei den Versuchen I, II und III angegebenen statischen Messungen der Wirklichkeit bis auf die Ablesungsfehler entsprechen, ein genaues Maß des vorhandenen Feldes sind.

Anders die dynamische Messung. Hier geht die Selbstinduktion ein und wir erhalten als Korrektur:

$$q' - q = Q' \frac{1}{\frac{n}{T} - 1} \left(e^{-\frac{t}{n}} - e^{-\frac{t}{T}} \right), \tag{18}$$

wo $Q' = \lambda n / R$ den Maximalausschlag bedeutet.

Zur Auswertung dieser Formel bedürfen wir zunächst der Kenntnis der Selbstinduktion des Galvanometers, denn da der Ballastwiderstand bei den einzelnen Versuchen genau bekannt war, ergibt dies sofort die Zeitkonstante T.

Diese Messung von L konnte nicht gut mit der Brücke und dem Telephon durch Vergleich mit einer bekannten Selbstinduktion oder einer bekannten Kapazität bestimmt werden, da einesteils die drehbare Spule im Galvanometer ganz von den Polschuhen der permanenten Stahlmagneten umgeben ist, andererseits ein feststehender Weicheisenzylinder sich in ihr befindet. Ein gutes Telephonminimum wäre nicht zu erwarten gewesen — es schien geboten, die Messung unter denselben Verhältnissen, wie sie in den Versuchen vorlagen, vorzunehmen. Sie erfolgte nun in der Weise, daß eine bekannte elektromotorische Kraft durch eine bekannte Zeit an das Galvanometer angelegt wurde. War nun die ballistische Empfindlichkeit des Galvanometers durch Messungen mit Kondensatorentladungen genau bekannt, so mußte sich aus den beobachteten Ausschlägen die Selbstinduktion berechnen lassen.

Denn wir haben in einem Stromkreise mit Widerstand und Selbstinduktion nach Einschaltung einer konstanten elektromotorischen Kraft E:

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right), \tag{19}$$

also:

$$q = \int_0^t i \, dt = \frac{E}{R} \left[t - \frac{L}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) \right].$$

Wir entwickeln den Exponentialausdruck in seine Potenzreihe:

$$q = E\left(\frac{t^2}{L}\frac{1}{1.2} - \frac{R t^3}{L^2}\frac{1}{1.2.3} + \frac{R^2 t^4}{L^3}\frac{1}{1.2.3.4} \cdots\right).$$

Zur Berechnung von L genügt es bis t^3 zu gehen, so daß man erhält:

$$L = \frac{E t^2}{4 q} \pm \sqrt{\frac{E^2 t^4}{16 q^2} - \frac{E R t^3}{6 q}}. \tag{20}$$

Die Bestimmung des Ausschlages des Galvanometers bei Anlegung einer bekannten elektromotorischen Kraft durch eine bekannte Zeit geschah mit Hilfe eines Schließungs- und eines Öffnungskontaktes.

Das Resultat zweier solcher Versuche als Mittel von sechs Ablesungen ist:

1 Volt in der Schlußzeit von 0,6 T ergeben 35 mm Ausschlag
3 „ „ „ „ „ 0,6 „ „ 159 „ „

Mit Hilfe von Kondensatorentladungen durch das Galvanometer wurde die ballistische Empfindlichkeit bei dem betreffenden Skalenabstande bestimmt zu:

1 mm entspricht $1{,}757 \cdot 10^{-9}$ Coulomb.

Der Widerstand der Galvanometerspule samt Zuleitungen betrug:

$$R = 517{,}4\ \Omega.$$

Die vorstehend angeführten Werte in die Formel (20) eingesetzt ergab als Mittel:

$$L = 0{,}029 \text{ Henry.}$$

Formel (24) ergibt für L zwei Werte; welcher davon der richtige ist, ergibt sich durch Vergleich der Werte in den beiden Fällen, und auch daraus, daß L stets positiv sein muß. Hier war die Berechnung nun zufällig insofern vereinfacht, als sich beim Falle $E = 3$ Volt der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen bis auf einen Rest von 1 Proz. des Gesamtwertes forthob.

Wir erhalten für die drei Versuche als Wert der Zeitkonstanten des Galvanometerstromkreises:

$$\text{Versuch I} \quad T = \frac{L}{R} = \frac{0{,}029}{1517{,}4} = 1{,}91 \cdot 10^{-5} \text{ sec},$$

$$\text{Versuch II} \quad T = \frac{L}{R} = \frac{0{,}029}{2517{,}4} = 1{,}15 \cdot 10^{-5} \text{ sec},$$

$$\text{Versuch III} \quad T = \frac{L}{R} = \frac{0{,}029}{5517{,}4} = 5{,}26 \cdot 10^{-6} \text{ sec}.$$

Berechnung der Zeitkonstanten n.

Die Berechnung der Zeitkonstanten n der Feldanstiege erfolgt wieder nach der Formel:

$$n = \frac{t \log e}{\log B_0 - \log (B_0 - B)}$$

und ergibt:

Versuch I $n = 4{,}10 \cdot 10^{-3}$ sec,
Versuch II $n = 3{,}25 \cdot 10^{-3}$ sec,
Versuch III $n = 7{,}55 \cdot 10^{-3}$ sec.

Berechnung der „Feldkorrektur".

Nun sind alle Werte bekannt, um mit Hilfe der Formel (18):

$$q' - q = Q \frac{1}{\frac{n}{T} - 1} \left(e^{-\frac{t}{n}} - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

die Feldkorrektur zu berechnen. Der Anfangswert Q' und ein für einen bestimmten Zeitpunkt berechneter zweiter Wert können wieder dazu dienen, um durch fortlaufendes Verhältnis die übrigen Werte zu konstruieren.

Versuch I:

$$q' - q = 1{,}65 \left(e^{-\frac{t}{4{,}1} 10^3} - e^{-\frac{t}{1{,}91} 10^3} \right) \text{mm},$$

$$1{,}65\, e^{-\frac{5t}{4{,}1} 10^3} = 1{,}32 \text{ mm} \text{ nach } t = 5 \text{ Skt.},$$

$$1{,}65\, e^{-\frac{0{,}5t}{1{,}91} 10^3} = 0{,}0136 \text{ mm} \text{ nach } t = 0{,}5 \text{ Skt.}$$

Versuch II:

$$q' - q = 0{,}8523 \left(e^{-\frac{t}{3{,}25} 10^3} - e^{-\frac{t}{1{,}15} 10^3} \right) \text{mm},$$

$$0{,}8523\, e^{-\frac{5t}{3{,}25} 10^3} = 0{,}643 \text{ mm} \text{ nach } t = 5 \text{ Skt.},$$

$$0{,}8523\, e^{-\frac{0{,}5t}{1{,}15} 10^3} = 0{,}00029 \text{ mm} \text{ nach } t = 0{,}5 \text{ Skt.},$$

Versuch III:

$$q' - q = 0{,}216 \left(e^{-\frac{t}{7{,}55} 10^3} - e^{-\frac{t}{5{,}26} 10^3} \right) \text{mm},$$

$$0{,}216\, e^{-\frac{5t}{7{,}55} 10^3} = 0{,}192 \text{ mm} \text{ nach } t = 5 \text{ Skt.},$$

$$0{,}216\, e^{-\frac{0{,}5t}{5{,}26} 10^3} = 5{,}8 \cdot 10^{-9} \text{ mm} \text{ nach } t = 0{,}5 \text{ Skt.}$$

Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind graphisch dargestellt durch die letzten drei Kurven auf Taf. 6, und zwar die beiden ersten Kurven für Versuch I und II in zehnfach, die letzte Kurve für Versuch III in hundertfach vergrößertem Maßstabe.

Anwendung der gefundenen Korrekturen.

Die Anwendung der gewonnenen Korrekturkurven auf Taf. 6 ist von selbst klar.

Ein Punkt M des Versuches I zur Zeit $t = 31$ Skt. sei der berechneten Korrektur unterworfen. Der durch ihn hindurchgehende Teil der Kurve auf Taf. 1 ist links davon in zehnmal größerem Maßstabe gezeichnet. Entnehmen wir nun aus der Feldkorrekturkurve des Versuches I auf Taf. 6 die Korrektur β, gehen damit von M nach rechts und haben nun von hier aus die Widerstandskorrektur α aus Taf. 6 aufzutragen. So erhalten wir den korrigierten Punkt M', welcher genau wieder auf der Kurve liegt, nur einer etwas späteren Zeit angehört. Dasselbe findet an allen anderen Punkten der Kurve statt.

Da jetzt alle Eigentümlichkeiten des Mechanismus der Meßanordnung berücksichtigt sind, so können wir den tatsächlichen Beobachtungsfehler oder die Meßgenauigkeit bestimmen:

Unter Zugrundelegung der Kurve des Versuches III erhält man die maximale Feldgeschwindigkeit aus der Eichtabelle der Wismutspirale zu

$$9 . 10^5 \text{ Maxwell pro Sekunde.}$$

Die Widerstandsgeschwindigkeit ergibt sich direkt aus der Kurve, indem ein Skalenteil einem Ausschlag des Galvanometers von 5 mm entspricht, wobei 1 Ω einen Ausschlag von 22,2 mm erzeugt, also:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{5}{2{,}22 \times 0{,}0018} = 1228 \frac{\Omega}{\text{sec}}.$$

Es beträgt also die Widerstandsänderungsgeschwindigkeit

$$1228 \text{ Ohm pro Sekunde.}$$

Die Ablesegenauigkeit der Galvanometer betrug mit Sicherheit 0,1 mm. Die Zeit, welche diesem maximalen Beobachtungs-

fehler entsprechen würde, ist also 0,02 Trommelumdrehung oder $3{,}6 \cdot 10^{-6}$ Sek. Mit Angabe dieser Zahlenwerte kann man daher das Resultat so fassen:

Das Wismut zeigt in bezug auf ein rasch variierendes äußeres Feld bei einer Ablesegenauigkeit von 0,1 mm, einer Feldänderungsgeschwindigkeit von $9 \cdot 10^5$ Maxwell pro Sekunde und einer Widerstandsänderungsgeschwindigkeit von 1228 Ω pro Sek. *keine Trägheit*, die $3{,}6 \cdot 10^{-6}$ Sek. überschreiten würde.

Zu bemerken ist, daß diese hohe Genauigkeit der Messungen nicht der Pendelgenauigkeit entspricht, sondern einzig und allein durch die hohe Feldgeschwindigkeit von $9 \cdot 10^5$ abs. Einh., also durch die hohe Geschwindigkeit der elektrischen Anordnung erreicht wurde. Die Genauigkeit des Pendels brauchte sich, wie man sofort einsieht, nur darauf zu beschränken, Hebel II und III zur Feld- und Widerstandsmessung gleichzeitig aufzuschlagen — eine Funktion, in die weder die toten Gänge der Mikrometerschrauben, noch Fehler derselben eingehen, wenn man nur für die Koinzidenz der beiden Hebel Sorge trug.

Was also an den besprochenen Messungen mit einem Fehler von kleiner als $3{,}6 \cdot 10^{-6}$ Sek. genau ist, das sind die $W = f(H)$-Kurven in den drei Versuchen — Messungen, die nur die Relativität je einer Widerstands- und einer gleichzeitigen Feldmessung berücksichtigen. Alle anderen Kurven dagegen: $W = f(t)$ und $W = f(t)$ haben als Grenze der Genauigkeit die Pendelgenauigkeit (denn in diese geht die direkte Zeitmessung ein), welche im vorliegenden Falle wegen des Starkstromfallkontaktes IV nur eine beschränkte war, aber doch einen Fehler von $9 \cdot 10^{-5}$ Sek. nicht überstieg. Da nun der Zweck vorliegender Messungen war, die Abhängigkeit des Wismutwiderstandes vom Felde zu untersuchen, wenn dasselbe einer raschen Variation unterworfen wurde, so kommt die geringe Genauigkeit, mit der die Variationsgeschwindigkeit gemessen wurde, nicht in Betracht, da die eigentliche Messung, die Abhängigkeit des Widerstandes vom Felde, weil frei von der Zeit, mit einer Genauigkeit beobachtet wurde, wie sie mit mechanischen Anordnungen kaum noch um ein Bedeutendes überschritten werden kann.

Das gefundene Resultat ist also im direkten Gegensatze

zu dem von Eichhorn. Über den Fehler seiner Anordnung, über die Versuche zum Beweise, daß der von ihm gemessene Effekt eine ganz andere Ursache hatte, kann erst im zweiten Teile dieser Arbeit berichtet werden.

II. Trägheit des Wismuts in bezug auf den Meßstrom.

Einleitung.

Wie bereits eingangs erwähnt, soll in diesem Teile der Arbeit die Darstellung einiger Versuche gegeben werden über die Eigenschaft des Wismuts bei Wechselstrom einen anderen Widerstand zu zeigen als bei Gleichstrom, eine Eigenschaft, die in folgendem der „Wechselstromeffekt" genannt werden soll. Bezeichnet c den Widerstand bei konstantem Strom und o denselben bei oszillierendem Strome, so ist der Wechselstromeffekt gleich $o - c$ zu setzen.

In der Originalarbeit ist an dieser Stelle[1]) versucht worden, einen Überblick über die Arbeiten der bereits zitierten Autoren zu geben. Dieselben haben erwiesen, daß der Wechselstromeffekt des Wismuts keine tatsächlich Ohmsche Widerstandsänderung bedeutet, sondern eine scheinbare, keine Energie vergeudende, sondern eine aufspeichernde.

Versuche.

Eine einfache Versuchsanordnung gestattete sofort die im ersten Teile verwendete Wismutspirale auf ihren Wechselstromeffekt zu prüfen, indem man den Widerstand in der Brückenanordnung einmal mit Gleichstrom und Galvanometer, hierauf mit dem oszillierenden Arme eines Seitenunterbrechers und Telephon maß. Das Resultat war genau dasselbe wie es bereits Lenard gefunden und stellte also eine Probe auf die Reinheit des verwendeten Wismuts dar.

Wismut außerhalb des Feldes.

Von größtem Interesse war nun die Frage, ob der Anstieg des Meßstromes, also eine einmalige Variation der Stromstärke den Wechselstromeffekt im Wismut hervorbringen würde.

Ein orientierender Versuch in dieser Richtung wurde nach Schaltungsschema Fig. 1 angestellt, indem der Kondensator-

1) Vgl. Diss. p. 47—55.

hebel sich anfangs in Koinzidenz mit dem Hebel I, der den Meßstromkurzschluß aufhob, befand, und nun allmählich herausgeschoben wurde, so daß in immer späteren Zeiten nach Beginn des Stromanstieges eine eventuelle Kondensatorladung durch Drücken des Tasters T nach Fallenlassen des Pendels gefunden wurde.

Wie bereits im ersten Teile, geschah die Gleichstromnullstellung durch Benutzung des in der Ruhe bei eingelegten Hebeln die Brückenanordnung durchfließenden schwachen Gleichstromes, hervorgerufen durch den Spannungsabfall am Meßstromkurzschlußhebel I. Wurde der Taster T im Ruhezustande gedrückt, so war die normale Brückenschaltung hergestellt, und mit dem Galvanometer konnte die Gleichstromnullstellung erreicht werden.

Bei Abwesenheit des Wismuts ergab die beschriebene Stromstoßmessung eine kleine, nach dem Exponentialgesetz abklingende Kondensatorladung, die einer vorhandenen kleinen Selbstinduktion entsprach.

Bei Gegenwart von Wismut in einem Brückenzweige war dagegen ein deutlicher Effekt sofort zu bemerken, der erst in viel längerer Zeit nach Anstieg des Meßstromes verschwand.

Um nun genaue quantitative Resultate zu erhalten, war unbedingt die gleichzeitige Variationsgeschwindigkeit des Stromes zu messen, im Falle der Gegenwart von Wismut und bei Abwesenheit desselben. Zur experimentellen Lösung dieser Frage diente das Schaltungsschema nach Fig. 4.

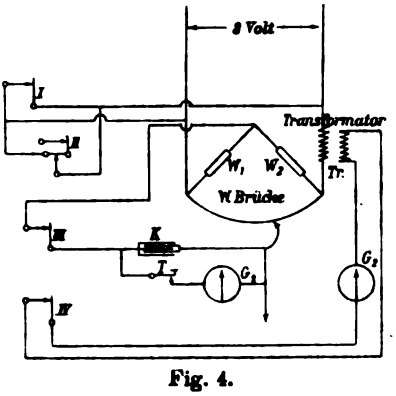


Fig. 4.

Die Bedeutung und Funktion der Schalter I, II und III war dieselbe wie früher; im Meßstromzuleitungsdraht war die Primärspule eines kleinen eisenlosen Transformators eingeschaltet, dessen Sekundärspule über den Präzisionskontakt IV am Galvanometer G_2 lag. Der ballistische Ausschlag des-

selben war also proportional dem Induktionsflusse durch den Transformator im Moment des Aufschlagens. Da nun der Induktionsfluß beim eisenlosen Transformator proportional der primären Stromstärke ist, wurde auf diese Weise der Meßstromanstieg gefunden. Zu erwähnen wäre noch, daß dieser Anstieg viel einfacher mit einem Kondensator hätte gemessen werden können, der durch den Spannungsabfall eines vom Meßstrom durchflossenen Shunts aufgeladen wurde. Da kein zweiter Kondensator zur Verfügung stand, wurde zur Notschaltung des Transformators gegriffen. Seine Dimensionen waren: Primär zehn Windungen auf ein Glasrohr von 15 mm Durchmesser und 10 cm Länge. Sekundär ca. 1000 Windungen.

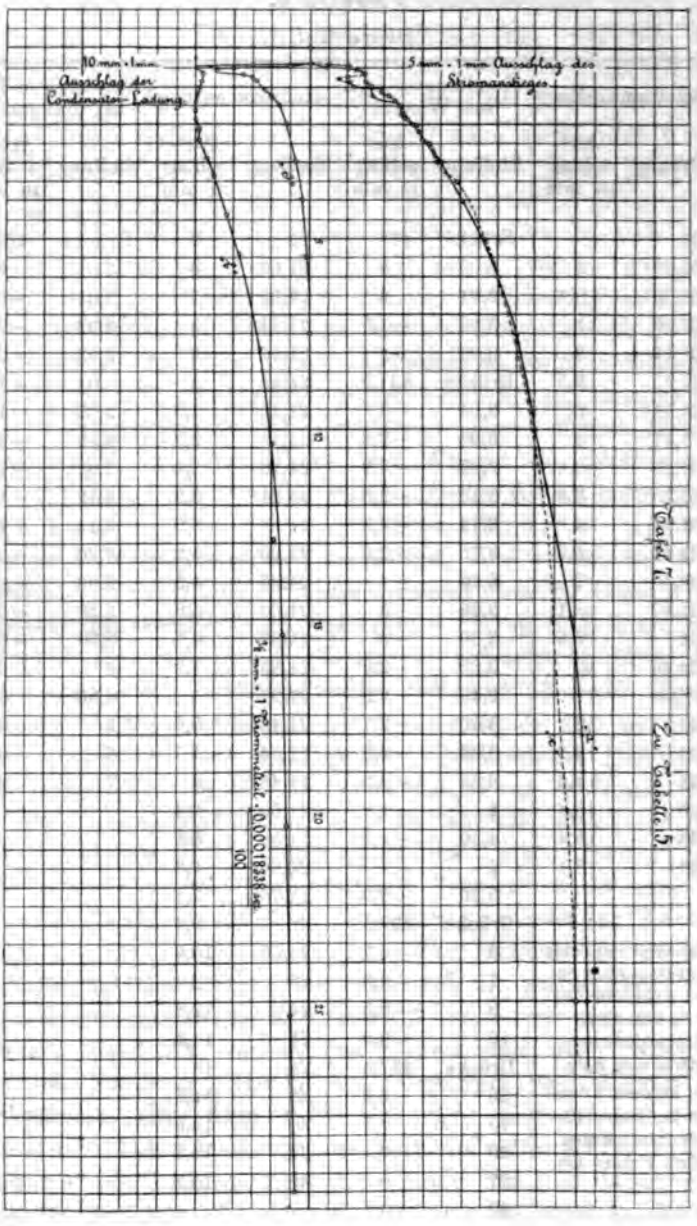
Tab. 5 gibt das Resultat dieser Versuche an, nämlich die Kondensatorladung der für Gleichstrom abgeglichenen Brücke beim Anstieg des Meßstromes und Wismut im Stromkreise, dann bei Ersatz des Wismuts durch einen praktisch induktionslosen Manganinwiderstand. In beiden Fällen ist der entsprechende Meßstromanstieg beobachtet. Die verwendete Wismutspirale besaß den Normalwiderstand von 25 Ohm. Die Kurzschlußstromstärke des Meßstromes betrug 0,95 Amp., der bei geöffnetem Kontakte I die Brücke passierende Strom dagegen 0,18 Amp., letztere Größe bestimmt also den Transformator-Reduktionsfaktor. Die Walzenbrücke war bei allen diesen Versuchen mit verlängertem Brückendraht gestöpselt. Die Empfindlichkeit der Widerstandsmessung bestimmt sich aus dem Galvanometerausschlag, der eintritt, wenn auf der Wismutseite an dem in Serie geschalteten Rheostaten W_2 ein Ohm gezogen wurde. Es ergab sich dieselbe zu 4,2 mm.

Taf. 7 stellt die erhaltenen Resultate graphisch dar. Kurve *d* entspricht der Kondensatorladung ohne Wismut, sie ist eine reine Exponentialfunktion, bedingt durch die immer etwas vorhandene Selbstinduktion und nach 1,5 Skt. bereits abgeklungen. Kurve *c* stellt den zugehörigen Stromanstieg dar. Kurve *b* gibt die Kondensatorladung bei Gegenwart von Wismut im Stromkreise, alles beim Felde Null, an. Hier ist sofort die bedeutende Abweichung von der Selbstinduktionskurve zu bemerken. Die Ladung zieht sich lange hin und klingt erst nach 20 Skt. ganz ab. Der Meßstromanstieg wird in diesem Falle durch die Kurve *a* angegeben.

Tabelle 5.

Hierzu Taf. 7.

Meßstromanstieg		Kondensator-Lad. bei Wismut		Meßstromanstieg		Kondensator-Lad. bei Manganin	
Stellung	Ausschlag in mm	Stellung	Ausschlag in mm	Stellung	Ausschlag in mm	Stellung	Ausschlag in mm
21	0	Brücke	438	21	0	Brücke	472,5
21,08	0	8	0	21,08	0	8	0
21,09	0,1	8,01	0	21,09	1	8,01	−0,5
21,10	1	8,02	−1,5	21,11	2	8,02	−2
21,11	2	8,03	−8	21,13	8	8,03	−2,4
21,12	2,5	Brücke	437,5	21,15	2	8,04	−1,7
21,14	3	8,04	−8	21,16	1,5	8,05	−1,5
21,17	3	8,05	−2,8	21,18	2,2	8,06	−1,4
21,20	3,6	8,07	−2,8	21,20	2,4	8,08	−1,3
21,25	3,6	8,10	−2,8	21,21	3,9	8,12	−1,2
21,30	4,8	8,13	−2,9	21,23	3,9	8,15	−1
21,40	5,5	8,15	−2,9	21,25	4,2	8,20	−0,8
21,60	7	8,20	−8	21,28	4,5	8,30	−0,6
21,80	8,1	8,25	−8	21,30	4,8	8,50	−0,4
22	9,3	8,30	−8	21,33	4,9	8,70	−0,2
22,20	10	8,35	−2,9	21,35	4,9	4	−0,1
22,50	11	8,40	−2,9	21,37	5	4,50	0
23	12	8,50	−2,7	21,40	5,6	5	0
24	13,8	8,60	−2,5	21,44	5,7	6	0
26	14,6	8,80	−2,2	21,48	6	7	0
30	15,4	4	−1,8	21,50	6,4		
35	15,4	4,50	−1,3	21,55	6,6		
40	15,4	5	−1	21,60	6,8		
		5,50	−0,9	21,70	7,8		
		Brücke	437,5	22	9,2		
Schließlich erreichte Endstromstärke in der Meßanordnung = 0,18 Amp. Kurzschlußstromstärke 0,95 Amp. Bei höheren Stromstärken traten Unregelmäßigkeiten durch Funken ein.		6	−0,7	22,50	10,9		
		7	−0,6	23	12		
		8	−0,5	24	12,8		
		10	−0,2	25	13,5		
		Brücke	437,5	26	14		
		13	−0,2	28	14,5		
		15	−0,1	30	14,6		
		20	−0,1	35	15,2		
		27	0	40	15,2		
		30	0				
Kurve „*a*“		Kurve „*b*“		Kurve „*c*“		Kurve „*d*“	


10 mm. = 1 min.
Ausschlag der
Condensator-Ladung.
5 mm. = 1 min. Ausschlag des
Stromanzeigers.
Tafel I.
Fig. Tabelle 5.
5 mm. = 1 Stromstärke: 0,000018338 Amp.

Wie man sieht, hat der Wismuteffekt die Richtung einer Verkleinerung des Widerstandes für den aufsteigenden Meßstrom. Daß die Wirkung der Selbstinduktion der Anordnung auf derselben Seite liegt, ist Zufall.

Auffallend ist, daß in allen Anstiegen des Meßstromes eine stark gedämpfte Schwingung zu bemerken ist. Die Vermutung, daß diese Schwingung durch den infolge des Wechselstromeffektes aufzuladenden Kondensator herrührt, erwies sich als unrichtig, da die Kurven *a* und *c* ganz dieselben blieben, auch wenn der Kondensator ganz abgeschaltet wurde. Es erscheinen eben doch alle verwendeten Widerstandssätze, hier bis 25 Ohm, nicht induktions- und kapazitätsfrei genug, wenn es sich um solche in sehr kleinen Zeiten abspielende Phänomene handelt. Bei einer eventuellen Wiederholung der beschriebenen Experimente wäre also mit Widerständen zu arbeiten, die aus möglichst kurzem dünnen Drahte herzustellen wären.

Auch erschien die Art der Variation des Meßstromes durch Aufschlagen eines Kurzschlußkontaktes nicht scharf definiert genug. Schwache Funkenbildung läßt sich bei den verwendeten Stromstärken nie ganz vermeiden, so daß ein unscharfer Beginn des Anstieges entsteht.

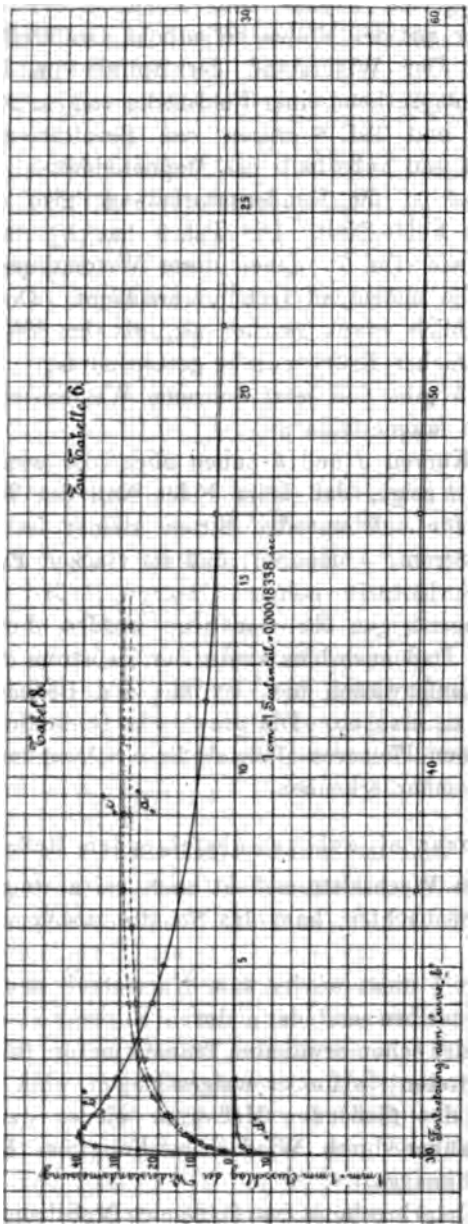
Am besten erscheint es, einen aufgeladenen Kondensator durch Aufschlagen eines Pendelkontaktes in die Brückenanordnung zu entladen, ein Vorgang, der sich ganz von selbst scharf definiert und gute Resultate ergeben muß. Da genauere Apparate nicht rasch genug zu beschaffen gewesen wären, konnten die Messungen auf diese Weise leider nicht verbessert werden. Es sei daher hier nur auf diese Möglichkeit hingewiesen.

Wismut im Magnetfelde.

Da das Wismut sich bis jetzt nur außerhalb des Magnetfeldes befand, war es wünschenswert, die Messungen auch im starken Felde zu wiederholen. Um die unter diesen Verhältnissen sehr bedeutende Widerstandsvermehrung des Wismuts mit denselben Widerständen vergleichen zu können, deren geringe Selbstinduktion aus den vorhergehenden Messungen bekannt war, wurde der einfache Brückendraht gestöpselt, da

Tabelle 6. Zu Taf. 8.

Wismut im Felde 20,300				Wismut im Felde 0			
Meßstromanstieg		Kondensatoranst.		Meßstromanstieg		Kondensatoraust.	
Stellung Kontakt IV	Ausschlag in mm	Stellung Kontakt III	Ausschlag in mm	Stellung Kontakt IV	Ausschlag in mm	Stellung Kontakt III	Ausschlag in mm
21,08	0	3	0	21,07	0	3	0
9	0,2	3,01	−2	8	0,3	3,01	−8
10	2,1	2	+2	10	2,9	2	−9,7
11	5,2	3	4	12	4,1	3	−7,8
13	5,2	4	8	14	3,6	4	−6,2
15	4	5	15	16	2,8	6	−5,1
17	3	6	19	18	5,1	8	−4,8
19	5,2	7	20	20	6,5	10	−4,1
21	7	8	23	22	7	14	−3,4
23	6,5	10	25	24	6,7	18	−2,9
25	6	12	29	26	6,8	25	−2
28	6,9	14	31,5	28	8	35	−1,5
30	8,2	17	34,8	30	8,9	50	−1,1
33	8,9	20	36,5	35	9,2	80	−0,8
36	8,9	25	38,8	40	10,8	4	−0,5
40	10,2	30	40	50	12,2	5	0
43	10,4	45	41	70	15	Brücke	497,2
45	10,6	55	40,5	22	17,8		
48	11,2	70	39,5	22,50	21,2		
51	11,8	4	37	23	23,6		
55	12,5	4,50	33,5	23,50	25		
60	13	5	30,6	24	26		
75	14,8	6	25,6	25	27,8		
22	16,5	7	21,5	26	28,5		
22,50	20	8	18,5	28	29,3		
23	22	10	14	30	29,7		
23,50	23,2	15	7,8	35	29,8		
24	24,3	20	5	40	29,8		
25	26	25	3,7	Brücke	497,4		
27	27	30	2,8				
30	27,8	70	2				
35	27,8	50	1				
Brücke	668,5	60	0				
		Brücke	669				
Kurve „a“		Kurve „b“		Kurve „c“		Kurve „d“	


Zu Tabelle 6
Tafel 8
1 mm = 0,0001838 sec
30 Zeitdehnung von Tafel 8

beim verlängerten Drahte zum Abgleich der Widerstandszunahme der auf der Walze befindliche Drahtteil nicht mehr ausreichte. Der Widerstand der Spirale im Felde betrug 50,5 Ohm, entsprechend einer Feldstärke von ca. 20300 (C.G.S.).

Tab. 6 und Taf. 8 zeigen das Resultat einer solchen Messung im und außerhalb des Magnetfeldes.

Kurve *d* ist die Kondensatorladung, also der Wismuteffekt beim Felde Null. Die Taf. 8 hat $^1/_5$ des Abszissenmaßstabes wie Taf. 7, daher diese Wismutkurve außerhalb des Feldes so bedeutend verkürzt erscheint. Doch klingt sie auch tatsächlich etwas rascher ab, als im Versuch Tab. 5, da jetzt einfacher Brückendraht gestöpselt ist.

Kurve *b* gibt den jetzt enormen Wechselstromeffekt des Wismuts im Magnetfelde an.

Beide Kurven *d* und *b* haben auch hier wieder die richtige Lage, *d* zeigt, daß beim Felde Null der Wechselstromwiderstand für aufsteigenden Strom kleiner ist als für den konstanten Strom, *b* dagegen, daß im starken Felde die umgekehrten Verhältnisse gelten.

Die zugehörigen Stromanstiege werden durch *a* und *c* dargestellt. Daß auch hier wieder der Meßstrom eine schwache Oszillation aufzuweisen hat, ist aus den Beobachtungsdaten der Tab. 6 zu ersehen. Die graphische Darstellung der Taf. 8 läßt durch den kleineren Maßstab diese Schwankungen im Anstiege nicht mehr erkennen.

Versuche mit auf- und absteigendem Meßstrome.

Um den Wechselstromeffekt auch bei absteigendem Meßstrome zu beobachten, kam das Schaltungsschema Fig. 5 zur Anwendung.

Kontakt I dient wieder zum Kurzschluß des Meßstromes und läßt denselben erst dann durch Kontakt II und die primäre Spule des schon erwähnten Transformators in die Brückenanordnung treten, wenn er aufgeschlagen wird. Kontakt II unterbricht den fließenden Meßstrom wieder durch Öffnung, nicht wie früher durch Wiederherstellung des Kurzschlusses mit der Fallknagge.

Diese Unterbrechung des fließenden Meßstromes ist genau präzisiert, so daß der Wechselstromeffekt auch bei absteigen-

dem Meßstrome untersucht werden konnte. Kontakt III diente wieder zur Bestimmung der Kondensatorladung, Kontakt IV dagegen, um die Stromvariation zu verfolgen. Diese Messungen geschahen mit der Wismutspirale außerhalb des Feldes, der Meßdraht der Brücke war verlängert.

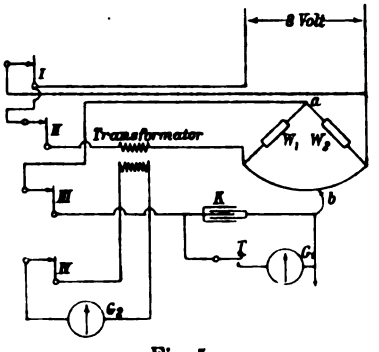


Fig. 5.

Um einen quantitativen Vergleich des Wechselstromeffektes des Wismuts wenigstens angenähert zu erhalten, wurde eine bekannte kleine Selbstinduktion L, bestehend aus 19 Windungen Kupferdraht von 1 mm Durchmesser blank, gewickelt auf ein Glasrohr von 19 mm Durchmesser und 25 mm Wicklungslänge, entweder auf die W_1- oder die W_2-Seite der Wheatstoneschen Brücke zugeschaltet, worauf dann die Nullstellung mit konstantem Strome erfolgte. Es ließ sich auf diese Weise der Effekt des Wismuts beim Felde Null vermindern durch Einschaltung von L auf die Wismutseite bzw. vermehren durch Einschaltung in den anderen Brückenarm. Auch war so ein Vergleich der in den bifilar gewickelten Widerstandssätzen doch etwas vorhandenen Selbstinduktion mit einer bekannten Selbstinduktion möglich.

Tab. 8 gibt die Kondensatorladungen und zugehörigen Stromstärken bei Anwesenheit von Wismut an, Tab. 7 dagegen dieselben bei Ersatz des Wismuts durch einen bifilar gewickelten Manganinwiderstand.

Taf. 9 stellt die Resultate graphisch dar. Die Bedeutung der einzelnen Kurven ist durch ihre Bezeichnung aus dem Kopfe der beiden Tabellen zu entnehmen.

Da mit auf- und absteigendem Meßstrome beobachtet wurde, diente zur Messung beim Aufstiege der Öffnungskontakt I, für den Abstieg dagegen der Kontakt II. Ihre Distanz war eine solche, daß der Meßstrom vor Offnung des Kontaktes II sicher stationär geworden war.

Kurve *e* zeigt den Abfall des Meßstromes bei Manganin.

Wie ersichtlich, ist er innerhalb der Beobachtungsfehler eine reine Exponentialkurve.

Wie zu erwarten war, hat der Wechselstromeffekt des Wismuts beim Zeichenwechsel von di/dt auch entgegengesetztes Vorzeichen. Die Kurven f und g, von denen die erste den Wismuteffekt bei positivem di/dt, d. h. Aufstieg des Stromes ergibt, die zweite dagegen bei negativem di/dt, d. h. Abstieg darstellt, liegen auf entgegengesetzten Seiten der Nullinie.

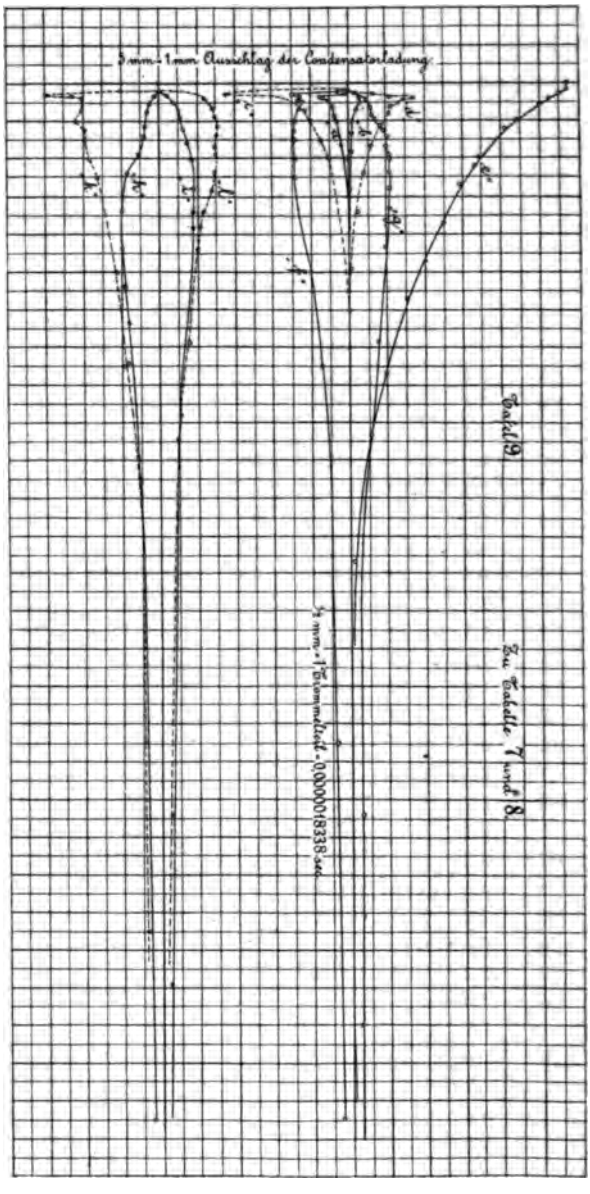
Tabelle 7. Zu Taf. 9.

Manganin im Stromkreise.

Kondensatorladung bei Aufstieg des Meßstromes		Kondensatorladung bei Abstieg des Meßstromes		Kondensatorladung bei Aufstieg des Meßstromes Selbstinduktion bei W_1 zugesch.		Kondensatorladung bei Abstieg des Meßstromes Selbstinduktion bei W_1 zugesch.		Abfall des Meßstromes durch Öffnen	
Stellung	Ausschlag mm	Stellung	Ausschlag mm	Stellung	Ausschlag mm	Stellung	Ausschlag mm	Stellung	Ausschlag mm
0,50	0	3	0	0,50	0	3	0	17,40	11,4
55	0	3,02	0,1	54	0	3,06	0	50	11,4
56	−0,2	4	0,1	56	−6,5	8	1,8	52	11
57	−1,5	6	0,1	58	−3	9	2,2	54	10,5
58	−1,3	8	0,1	60	−2,5	10	3,5	58	10
59	−1	10	0,4	65	−2,3	11	2,8	65	8,8
60	−0,9	11	0,6	70	−2	12	2,6	70	8,2
63	−0,8	12	0,6	80	−1,4	14	2,2	90	6,5
67	−0,7	13	0,7	90	−1	18	2,1	18	5,8
70	−0,6	14	0,7	1	−0,6	25	1,7	18,20	5
80	−0,2	16	0,5	1,50	0	35	1,2	40	4
90	−0,1	18	0,4	Brücke	469	50	0,9	60	3
1	0	20	0,3			70	0,5	19	2
1,50	0	22	0,3			4	0,2	20	0,2
2	0	25	0,2			4,20	0	23	0
Brücke	471,3	30	0,2			Brücke	469		
		40	0,2						
		60	0,1						
		80	0						
		Brücke	471,3						
Kurve „a“		Kurve „b“		Kurve „c“		Kurve „d“		Kurve „e“	

Tabelle 8. Zu Taf. 9. Wismut im Stromkreise.

Aufstieg des Meßstromes	Kondensatorladung bei Abstieg des Meßstromes		Kondensatorladung bei Aufstieg des Meßstromes Selbstinduktion bei W_2 zugesch.		Kondensatorladung bei Abstieg des Meßstromes Selbstinduktion bei W_2 zugesch.		Kondensatorladung bei Aufstieg des Meßstromes Selbstinduktion bei W_1 zugesch.		Kondensatorladung bei Abstieg des Meßstromes Selbstinduktion bei W_1 zugesch.	
Ausschlag mm	Stellung	Ausschlag mm	Stellung	Ausschlag mm	Stellung	Ausschlag mm	Stellung	Ausschlag mm	Stellung	Ausschlag mm
0	15,02	0	0,50	0	20,25	0	0,50	0	20	0
−0,5	4	0	56	0	30	0,5	55	0	20,20	2,5
−3	17	0	59	−0,2	33	0,8	56	−6	25	2,9
−2,5	18	0,3	60	−0,3	35	0,9	57	−4,5	30	3
−2,5	19	0,4	63	−0,4	38	1	58	−4	35	3,1
−2,4	20	0,5	64	−0,4	42	1,2	61	−4	40	3,1
−2,4	22	1	67	−0,5	48	1,3	64	−4	45	3
−2,6	23	1,1	70	−0,6	55	1,5	70	−4,4	50	3
−2,8	24	1,2	75	−0,7	63	1,7	75	−3,9	55	2,8
−2,8	25	1,1	80	−0,8	75	1,8	80	−3,8	60	3
−2,9	27	1,3	90	−1	90	1,8	90	−3,7	70	2,8
−2,8	29	1,3	1	−1,7	21	1,8	1	−3,3	80	2,3
−2,8	32	1,4	1,20	−2	22	1,1	1,50	−2,2	90	2,2
−2	35	1,5	40	−1,9	25	0,5	2	−1,8	21	2,1
−1,5	38	1,9	60	−1,8	30	0	3	−1	21,50	1,5
−1	42	2	80	−1,6	Brücke	428,5	5	−0,8	22	1
−0,8	45	2	2	−1,6			10	−0,5	24	0,5
−0,5	47	2	2,50	−1,2			15	−0,4	26	0,1
−0,4	49	2,1	3	−1			20	−0,4	30	0
−0,2	51	2,2	4	−0,8			30	0	Brücke	424,3
−0	53	2,2	6	−0,5			Brücke	424,3		
427,4	56	2,2	12	−0,2						
	60	2,2	15	−0,1						
	65	2,3	20	0						
	70	2,2	Brücke	428,5						
	80	2,2								
	16	1,9								
	16,50	1,5								
	17	1,2								
	19	0,6								
	21	0,3								
	25	0								
	Brücke	427,4								
: „f“	Kurve „g“		Kurve „h“		Kurve „i“		Kurve „k“		Kurve „l“	


3 mm = 1 mm Ausschlag der Condensatorladung
Tafel 9
Zu Tabelle 7 und 8.
3 mm = 1 Stimmgabel = 0,000018338 sec.

Der Einfluß der hinzugefügten Selbstinduktion L ist aus den gezeichneten Kurven zu entnehmen.

Aus den vorhergehenden Messungen ergibt sich, daß der Wechselstromeffekt keine Ohmsche Widerstandsänderung ist, sondern nur eine scheinbare, eine Energie aufspeichernde, ein Resultat, das ja bereits von A. Sadovsky erhalten worden ist. Das Wismut hat daher beim Strome i eine Energie $f(i)$ aufgespeichert, so daß, wie G. Sagnac[1]) darauf hinweist, die scheinbare Widerstandsänderung

$$r = \frac{1}{i^2} f'(i) \frac{di}{dt}$$

beträgt.

Die Darstellung der Funktion $f(i)$ aus den vorhergehenden Versuchsresultaten ergibt in erster Linie quadratische Abhängigkeit der Energie von der Stromstärke. Eine genaue Auswertung der Funktion $f(i)$ ließen die erhaltenen Kurven nicht zu, da sie infolge der schon erwähnten Mängel der vorhandenen und Fehlen von genauen Apparaten zu große Abweichungen untereinander zeigen. Auch müßte der Versuch bei einer größeren Anzahl von verschiedenen Feldstärken wiederholt werden, um ein Urteil über den Übergang der Kurven Taf. 9 ohne Feld in die Kurven Taf. 8 mit starkem Felde zu erlangen. Es sei daher hier nur der Hinweis gegeben, daß die verwendete Methode der Untersuchung sich zur vollsten Präzision mit geeigneten Apparaten ausbilden läßt, insbesondere durch Verwendung einer Kondensatorentladung durch eine speziell hierzu konstruierte Brückenanordnung, so daß die genaue Darstellung der Funktion $f(i)$ auf diese Weise gelingen dürfte, und man hoffen kann, aus der Art dieser Funktion einen Schluß auf den Mechanismus des Wechselstromeffektes des Wismuts zu ziehen.

Untersuchung des Wismuts mit Schwingungen.

Die Versuche der zitierten Autoren und auch die eben angegebenen Experimente hatten erwiesen, daß der Wechselstromeffekt des Wismuts nur eine scheinbare Widerstands-

1) G. Sagnac, Journ. de Phys. (4) 1. p. 237. 1902.

zunahme sei, d. h., daß durch denselben Stromenergie nicht in Joulesche Wärme übergeführt wird.

Dies mußte auch zum Ausdruck kommen, wenn das Wismut in einen gedämpften Schwingungskreis eingeschaltet wurde, indem dadurch das Dekrement dem Normalwiderstande des Wismuts entsprechen mußte und nicht dem durch den Wechselstromeffekt veränderten. Diese Untersuchung des Wismuts mit Schwingungen geschah ebenfalls mit dem Helmholtzschen Pendelunterbrecher nach einer Schaltung, die den für den gleichen Zweck der Untersuchung von Dämpfungen verwendeten Anordnungen von U. Seiler[1]), Sundell und Tallqvist[2]) ähnlich ist. Eine Beschreibung dieser Schaltung ist in der Originalarbeit enthalten.[3])

Der Versuch ergab, daß innerhalb der Beobachtungsfehler das Wismut eine seinem Normalwiderstande entsprechende Dämpfung hervorbringt, also die Widerstandsänderung für Wechselstrom keine dämpfungsändernde sein kann, wie es aus den früheren Versuchen zu erwarten war.

Eine Änderung der Schwingungsdauer durch die Gegenwart des Wismuts war nicht zu konstatieren, denn eine solche, wenn wirklich vorhanden, wäre bei vorliegenden Versuchen in die Beobachtungsfehler gefallen.

Um einen solchen Einfluß des Wismuts auf die Schwingungsdauer zu messen, müßte man den Gesamtwiderstand verkleinern, so daß die Anzahl der zu beobachtenden Schwingungen bedeutend größer wird, um auf diese Weise die Schwingungsdauer mit viel größerer Genauigkeit zu erhalten. Das gleichzeitig verkleinerte Dekrement kann dabei ebenfalls um so präziser bestimmt werden, je größer die Anzahl der beobachteten Maximalamplituden ist.

Mutmaßlicher Fehler der Eichhornschen Messung.

Erst jetzt kann näher auf die Eichhornsche Messung eingegangen werden, um den mutmaßlichen Fehler derselben zu finden.

---

1) U. Seiler, Wied. Ann. **61**. p. 44. 1897.
2) Sundell u. H. Tallqvist, Ann. d. Phys. **4**. p. 72. 1901.
3) Vgl. Diss. p. 67.

Der Autor untersucht den Widerstand seiner Wismutspirale, die sich in dem einen Brückenzweige befindet und am Rande einer rotierenden Kreisscheibe durch das feststehende Feld hindurchgeschlagen wird. Er mißt einmal das Feld aus als Funktion der Stellung der Wismutspirale bei ruhender Scheibe und dann in rascher Drehung. Bei der Drehung wurde der Ort, wo der Widerstand gemessen werden sollte, dadurch fixiert, daß ein an der Scheibe befestigter Momentankontaktmacher den Meßstrom ganz kurze Zeit in die Brückenanordnung treten ließ.

Gemessen wurde stets mit Gleichstrom und Galvanometer.

Der erste Einwand gegen diese Meßmethode ist der, daß Eichhorn bei ruhender Spirale ihren Widerstand tatsächlich mit Gleichstrom mißt, dagegen den Widerstand der bewegten Spirale bei plötzlich eingeschaltetem und wieder ausgeschaltetem Meßstrome. Dieser Momentanschluß des Stromes muß Abweichungen in folgenden Richtungen ergeben.

1. Betrachtet man eine Brückenanordnung, die mit Gleichstrom auf Null gestellt ist und speist sie sodann mit Wechselstrom, so wird im allgemeinen stets ein schwacher, alternierender Strom das vorher stromlose Galvanometer passieren, da alle bifilar gewickelten Widerstandssätze immer etwas Selbstinduktion bzw. Kapazität besitzen, wie dies ja aus den Versuchen Tab. 5 zu ersehen ist.

Dieser Wechselstrom wird keinen Ausschlag des Galvanometers hervorbringen, lineare Galvanometerfunktion vorausgesetzt, was bei dem von Eichhorn verwendeten Carpentiergalvanometer der Fall war. Nun betritt die Brücke bei momentanem Schließen und Öffnen ein Stromstoß, dieser hat zwei Selbstinduktionsstöße durch das Galvanometer zur Folge, einen Schließungs- und einen Öffnungsextrastrom.

Würden beide gleiche Elektrizitätsmengen durch das Galvanometer transportieren, so würde es keinen Ausschlag ergeben. Nun ist dies aus folgendem Grunde nicht der Fall: Beim Schließen hat man eben die Anordnung Brücke plus äußerer Stromkreis, beim Öffnen dagegen nur die Brücke allein, weil der äußere Stromkreis abgeschaltet ist. Beide betrachteten Extraströme haben, da sie in den Brückenzweigen entstehen,

einen anderen Verlauf. Die Folge ist, daß das Galvanometer stets ausschlägt.

Um das Gesagte zu erhärten, wurde das Schaltungsschema Fig. 5 verwendet, wo Kontakt I den Meßstrom einschaltet, Kontakt II ihn unterbricht. Der Kondensator K wurde abgeschaltet und die Brückenenden ständig mit dem Galvanometer verbunden, ohne Einschaltung eines Helmholtzkontaktes. Der früher verwendete Transformator war abgenommen.

Die Kontakte I und II hatten eine Entfernung von 0,1 bis 10 Skt. Sie entsprechen dem Eichhornschen Momentankontaktmacher.

Beim Fallenlassen des Pendels war stets ein Ausschlag von 0,1 bis 0,8 mm zu bemerken, der sich sofort auf 2 mm erhöhte, wenn die früher erwähnte kleine Selbstinduktion L in irgend einen Brückenzweig zugeschaltet wurde.

Wurde nun die Schaltung so umgeändert, daß Schließung und Öffnung des Meßstromes gleichen Verlauf hatten, indem einfach die Unterbrechung des Stromes nicht durch Aufschlagen des Kontaktes II erzeugt wurde, sondern durch Wiederherstellen des Kurzschlusses mit der Fallknagge des Kontaktes II, wie dies Fig. 1 zeigt, so war das Galvanometer im allgemeinen in Ruhe, oder zeigte unregelmäßige kleine Ausschläge von 0,1 bis 0,2 mm auf verschiedene Seiten.

2. Abgesehen von der eben erwähnten Unsymmetrie in der Anordnung, beobachtet aber Eichhorn den Widerstand der bewegten Spirale nicht bei Gleichstrom, sondern bei variabler Stromstärke, bei einem Stromstoße, was also den Wechselstromeffekt des Wismuts nach sich zieht, so daß er in der Bewegung tatsächlich einen anderen Widerstand erhalten muß, wie in der Ruhe.

Bei den im ersten Teile vorliegender Arbeit angegebenen Versuchen erfolgt die Messung des Wismutwiderstandes stets bei schon stationär gewordenem Meßstrome, also wirklich bei Gleichstrom. Allerdings ist der Meßstrom insofern noch variabel, als durch die Zunahme des Wismutwiderstandes die Stromstärke in der Brückenanordnung etwas sinken muß. Der hieraus entstehende Wechselstromeffekt ist aus den Resultaten Tab. 5 leicht zu berechnen:

Es steigt in diesem Versuche die Stromstärke von 0 bis 0,12 Amp. in der Zeit eines Skalenteiles. Daher ist die Variationsgeschwindigkeit

$$\frac{di}{dt} = 0{,}12$$

und dieser entspricht ein Wismuteffekt von 3 mm Galvanometerausschlag. Bei den drei Versuchen des ersten Teiles betrug die Stromstärke bei 25 Ohm Normalwiderstand des Wismuts ca. 0,2 Amp. Nimmt der Widerstand des Wismuts um 10 Ohm zu, so sinkt die Stromstärke auf ca. 0,17 Amp. Da diese Variation in einer Zeit von ca. 50 Skt. entsprechend dem Feldanstiege erfolgte, so haben wir hier

$$\frac{di}{dt} = \frac{0{,}03}{50} = \frac{1}{200}$$

der oben berechneten Variationsgeschwindigkeit. Daher wäre hier der Effekt gleich $^3/_{200}$ mm, also bei $^1/_{10}$ mm Ablesegenauigkeit nicht mehr zu konstatieren.

Weitere Fehlerquellen des Eichhornschen Versuches können in Torsion der Achse, thermoelektrischen Kräften an den Achsekontakten usw. liegen.

Sein auffälliges Resultat, daß die gefundene große Trägheit unabhängig ist von der Tourenzahl der Scheibe, sobald dieselbe eine gewisse, immerhin sehr niedrig bleibende Peripheriegeschwindigkeit erreicht hatte und des weiteren, daß die Lage seiner mit Trägheit behafteten Kurve die im Ruhezustande gemessene am absteigenden Aste schneidet, also eine Wismutvoreilung ergibt, was ja unter keiner Bedingung der Fall sein kann, lassen erkennen, daß irgend ein nicht beobachteter Umstand seinen Trägheitseffekt vorgetäuscht hat.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, treten komplizierte Verhältnisse auf, wenn man den Widerstand einer Wismutspirale im Wechselfelde untersucht. Es ergibt sich gewöhnlich der mittlere Widerstand des Wismuts kleiner, als es der effektiven Wechselfeldstärke zukommen müßte. Der Grund dieser Erscheinung ist aber nicht in einer Trägheit des Wismuts zu suchen, wie es irrtümlich von C. Carpini[1]) geschieht,

1) C. Carpini, Physik. Zeitschr. 5. p. 819. 1904.

sondern in der Versuchsanordnung selbst. Im Anschlusse an den zitierten Versuch von Carpini sei es mir erlaubt, allgemein die Verwendbarkeit der Wismutspirale zum Messen von Wechselfeldern zu diskutieren.

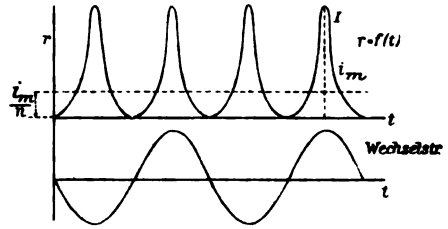
Hat man eine Wheatstonesche Brücke, deren einer Zweig von der Wismutspirale eingenommen wird, mit Gleichstrom und Galvanometer auf Null gestellt, dann wird eine kleine Verschiebung des Brückenkontaktes im Galvanometerkreis einen Strom

$$J \lambda \sigma$$

hervorrufen, wo J die Stärke des fließenden Gleichstromes ist, σ die Verschiebung des Kontaktes und λ der Proportionalitätsfaktor, eine Konstante, bedingt durch die Brückenverzweigung.

Nun wirke auf die Spirale das Wechselfeld. Der Normalwiderstand des Wismuts erfährt die Zunahme r, die sich als Funktion der Zeit darstellt, Null wird beim Hindurchgehen des Feldes durch Null, sonst stets positive Werte besitzt.

Die Art dieser Funktion $r = f(t)$ wird bei reinen, sinusförmigen Magnetfeldern ungefähr die folgende Gestalt haben:



infolge der hyperbolischen Abhängigkeit des r von der Feldstärke.

Im allgemeinen hat man es nie mit Sinusströmen zu tun, die Wechselstrommaschine selbst liefert eine von der Sinuslinie abweichende Kurvenform, der Elektromagnet läßt die „Eisendeformation" hinzutreten, das Wismut also schließlich durch seine hyperbolische Abhängigkeit seine „Wismutdeformation", so daß wir im allgemeinen $r = f(t)$ als ziemlich komplizierte Funktion zu betrachten haben.

Diese Änderung des Widerstandes r bedingt an der Wismutspirale eine Änderung der Klemmenspannung des hindurchgeleiteten Stromes, wir können die Widerstandszunahme des Wismuts durch eine Wismut–elektromotorische Kraft entgegen dem fließenden Strome ersetzen.

Diese im Wismutzweige der Brücke sitzende elektromotorische Kraft läßt einen Strom von der Form

$$\mu f(t)$$

ins Galvanometer treten, einen Strom stets von derselben Richtung, nur anwachsend und abnehmend bis Null, entsprechend der Kurve I, denn die Wismut elektromotorische Kraft ist offenbar proportional der Widerstandsänderung r, da, wie vorausgesetzt, die Brücke mit Gleichstrom gespeist wird.

Dieser das Galvanometer durchfließende „Wellenstrom" wird fast unbeeinflußt sein von der Stellung des Brückenkontaktes, wir können ihn als unabhängig von σ betrachten und haben nun den Kontakt so lange zu verschieben, bis der Wellenstrom in seiner Wirkung auf das Galvanometer aufgehoben wird durch den infolge der Verschiebung des Kontaktes jetzt ebenfalls ins Galvanometer tretenden Gleichstrom

$$J\lambda\sigma.$$

Was auch immer das Galvanometer für ein Strom anzeigendes Instrument sei, stets können wir die Wirkung eines Stromes i in der Zeit dt gleichsetzen:

$$\varphi(i)\,dt,$$

wo $\varphi(i)$ die Galvanometerfunktion bedeutet.

Ist nun der Gleichstrom im Gleichgewicht mit dem Wellenstrom, d. h. steht das Galvanometer wieder auf Null, dann gilt:

$$\int_0^1 \varphi(i - J\lambda\sigma)\,dt = \int_0^1 \varphi[\mu f(t) - J\lambda\sigma]\,dt = 0.$$

Hier bedeutet also, wie schon erwähnt, $\varphi(i)$ die Galvanometerfunktion, $f(t)$ die Stromkurve. Das Integral ist über die Stromkurve während einer Sekunde zu erstrecken oder nur über eine volle Periode, und ist in diesem Falle noch mit der Periodenzahl zu multiplizieren.

Diese Gleichung wäre nach σ aufzulösen und ergibt, daß der mittlere Widerstand des Wismuts stets bei dieser Art der Messung eine Funktion der Stromkurve ist, und auch vom verwendeten Galvanometer abhängt. Es ist eben dies dadurch bedingt, daß man einen Wellenstrom mit einem Gleichstrom kompensieren will. Der Gleichstrom ist einem mittleren Werte i_m/n des Wellenstromes äquivalent, wenn i_m die maximale Amplitude bedeutet.

Ist die Funktion $f(t)$ zu einer Mittelachse symmetrisch, so wäre $n=2$, $\varphi(i)=ai$, d. h. lineare Galvanometerfunktion vorausgesetzt; wie Kurve I zeigt, ist dies stets ausgeschlossen.

Der Wert n wird bei der Form der Kurve I sicher größer als 2 sein, einen zu kleinen Widerstand des Wismuts vortäuschen.

Nur bei solchen Galvanometerfunktionen $\varphi(i)$, die bei steigendem Werte von i sehr rasch wachsen, so daß sie größeren Werten der Stromkurve das Übergewicht erteilen, wäre es denkbar, daß der äquivalente Wert $i_m/n > i_m/2$ würde. Bei den gebräuchlichen Galvanometern ist dies jedoch nicht der Fall, i_m/n wird stets $< i_m/2$, eine Erscheinung, die nach vorliegender Betrachtung also nicht als „viskose Hysteresis" zu deuten ist.

Kommt ein Deprèzspulengalvanometer zur Anwendung mit großen Eisen- und Stahlmassen, dann ist

$$\varphi(i) = ai$$

zu setzen, also proportional $i.i_m/n$ wird dann das arithmetische Mittel.

Im Falle von Hitzdrahtinstrumenten oder Elektrodynamometern hat man

$$\varphi(i) = ai^2.$$

Zu erwähnen wäre noch ein Fall, der bei vorliegender Betrachtung nicht außer acht gelassen werden darf, das Nadelgalvanometer. Seine Funktion $\varphi(i)$ ist im allgemeinen linear, doch ist hier wohl zu beachten, daß der Momentanstrom einen größeren Wert hat im Maximum i_m, als der äquivalente Strom i_m/n. Wer haben ein größeres Stromfeld im Galvanometer, als der Ablenkung entspricht. Ist die Nadel durch die

rschiebung des Brückenkontaktes wieder auf Null gebracht, nn steht sie unter der Einwirkung des Gleichstromes $J\lambda\sigma$ d des Wellenstromes i. Die Einwirkung des Gleichstromes f die Nadel ist nun keine konstante, da der Wellenstrom n als permanent vorausgesetzten Magnetismus der Nadel ch stets ändert, die Empfindlichkeit des Galvanometers also ie periodische Funktion der Zeit wie $f(t)$ wird.

Daß dies wirklich der Fall sein kann, und eine andere nstellung des Schleifkontaktes ein anderes σ hervorruft, wie i Verwendung eines Spulengalvanometers, zeigt folgende bennte Erscheinung:

Entladet man einen Kondensator durch ein Nadelgalvanoter, so soll der ballistische Ausschlag desselben unabhängig in vom Widerstande, vorausgesetzt, daß die Entladungsdauer cht zu sehr verzögert wird, daß sie immer noch klein bleibt gen die Schwingungsdauer. Beim Spulengalvanometer ist es stets sehr weitgehend der Fall, alle Nadelgalvanometer loch zeigen beim Abnehmen des Widerstandes, d. h. beim nehmen der Momentanstromstärke, eine Abnahme des Ausschlages, obgleich dieselbe Elektrizitätsmenge ihre Windungen ssierte.[1])

Übrigens kommt bei der ganzen Betrachtung infolge der ariation des Stromes im Wismut der Wechselstromeffekt $o-c$ ch hinzu; derselbe ist jedoch von viel kleinerer Größendnung und hier zu vernachlässigen.

Das Resultat vorliegender Betrachtung können wir also den Worten zusammenfassen:

Die Wismutspirale ist zum Messen von Feldstärken nur i konstanten Feldern zu verwenden. In Wechselstromldern entspricht die mittlere Widerstandsänderung keineswegs m Effektivwerte des wechselnden Feldes, sondern ist von r Kurvenform und vom verwendeten Galvanometer mehr er weniger abhängig.

Übrigens ist ja in diesem Falle die Wismutspirale leicht tbehrlich, da sich Wechselstromfelder sehr bequem mittels

1) Siemens, Pogg. Ann. 102. p. 66. 1857.

Probespule und Dynamometer bzw. Hitzdrahtinstrument genau messen lassen.

Am Schlusse ist es mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. Th. Des-Coudres für die Anregung zu dieser Arbeit und die Liebenswürdigkeit, mit der mir die erforderlichen Apparate zur Verfügung gestellt wurden, auch an dieser Stelle zu danken.

Steinschönau, 26. Februar 1908.

(Eingegangen 29. Februar 1908.)

8. *Untersuchungen über den Ausfluß komprimierter Luft aus Kapillaren und die dabei auftretenden Turbulenzerscheinungen;*

von W. Ruckes.

(Gekürzte Würzburger Dissertation.)

I. Abschnitt.

Einleitung und Geschichtliches.

In den Jahren 1883 und 1895 veröffentlichte „Osborne Reynolds" Abhandlungen über die Bewegungserscheinungen, welche auftreten, wenn Wasser in langen, engen Röhren fließt. Er zeigte experimentell[1]) sowohl wie theoretisch[2]), daß es eine bestimmte Geschwindigkeit gibt, unterhalb welcher die einzelnen Wasserteilchen sich parallel der Röhrenachse fortbewegen, oberhalb deren aber Wirbel auftreten. Jene Geschwindigkeit bezeichnet Reynolds als „kritische Geschwindigkeit" und findet für das Kriterium, d. h. für die Stelle, an der die Wirbelbildung auftritt, den Ausdruck:

$$K = 1900 \text{ bis } 2000 = \frac{\varrho D . U_m}{\mu}.$$

Hier bedeutet:

- ϱ die Dichte,
- U_m die mittlere Geschwindigkeit des Wassers,
- μ den Reibungskoeffizienten,
- D den Durchmesser des Rohres,
- K ist eine numerische Konstante und hat für kreisförmigen Röhrenquerschnitt den Wert 1900 bis 2000.

Das in der Zeiteinheit aus der Röhre austretende Flüssigkeitsvolumen ist nun[3]):

$$V = \frac{\pi (p_a - p_e)}{8 \eta l} \left(r^4 + 4 \frac{\eta}{\varepsilon} r^3 \right).$$

1) O. Reynolds, Phil. Trans. 1883.
2) O. Reynolds, l. c. 1895.
3) A. Wüllner, Lehrbuch der Physik Bd. 1.

Es ist hier:

p_a der Druck am Anfang der Röhre,
p_e „ „ „ Ende „ „
$2r$ „ Durchmesser der Röhre,
η „ Koeffizient der inneren Reibung,
ε „ „ „ äußeren „
l „ die Röhrenlänge.

Bleibt nun die Wandschicht in Ruhe, ist also die äußere Reibung ε unendlich groß, so fällt das zweite Glied in der letzten Klammer des obigen Ausdruckes fort und es wird:

$$V = \frac{\pi (p_a - p_e)}{8 \eta l} \cdot r^4 .$$

Das aus der Kapillarröhre in der Zeiteinheit ausfließende Volumen ist also dem die Flüssigkeit treibenden Drucke und der vierten Potenz des Radius der Röhre direkt, der Länge und der inneren Reibungskonstanten der Flüssigkeit umgekehrt proportional.

Schon die Versuche von Hagen und Poiseuille[1]), welche vor Kenntnis der Theorie Versuche über den Ausfluß von Flüssigkeiten durch enge Röhren angestellt haben, führten zu einem ganz entsprechenden Ausdruck wie die letzte Gleichung, weshalb man diese auch wohl „das Poiseuillesche Gesetz" nennt. Da nun das Poiseuillesche Gesetz zur Voraussetzung hat: alle Flüssigkeitsteilchen bewegen sich parallel der Röhrenachse, so folgt aus den Untersuchungen von Reynolds, daß das Gesetz nicht für alle Geschwindigkeiten, also auch nicht für alle Drucke gilt, sondern nur für Geschwindigkeits- bzw. Druckwerte unterhalb des Kriteriums. Anschließend an die Arbeit von Reynolds ist mir nun von Hrn. Geheimrat Wien die Aufgabe gestellt, das Auftreten der Turbulenzerscheinungen bei Gasen näher zu untersuchen, bzw. den Gültigkeitsbereich des Poiseuilleschen Gesetzes näher zu erforschen.

Die von O. E. Meyer[2]) durchgeführte Theorie des Ausströmens von Gasen durch enge Röhren liefert für das in der

1) E. Hagen u. Poisseuille, Pogg. Ann. 58. p. 424.
2) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 127.

iiteinheit durchfließende Volumen einen Ausdruck, der dem i Flüssigkeiten analog ist. Es muß jedoch vorausgesetzt ırden, daß die Geschwindigkeiten unendlich klein sind, während i inkompressiblen Flüssigkeiten die Poiseuillesche Bewegung ıe immer mögliche ist. Es muß bei Gasen nur das Volumen ter dem mittleren Drucke $\frac{p_a + p_e}{2}$ gemessen werden.

Später haben dann Springmühl[1]) und Obermaier[2]) rch ausführliche Versuche noch gezeigt, daß auch hier der oeffizient ε der äußeren Reibung unendlich groß ist. Die nutzten Drucke waren sehr gering.

Wenn nun das Poiseuillesche Gesetz mit mehr oder ıniger Genauigkeit auch für Gase gilt, so muß, falls auch ar eine kritische Geschwindigkeit, ein Kriterium vorhanden , unterhalb dieser Stelle das Gesetz gelten, oberhalb nicht ehr.

Als Richtschnur für die experimentellen Untersuchungen ibe ich mir folgende Disposition aufgestellt:

1. Gibt es bei Gasen eine kritische Geschwindigkeit? riterium).

2. Wie verschiebt sich dieses Kriterium mit Durchmesser id Länge der Kapillare?

3. Wie verhält sich das Poiseuillesche Gesetz unter- id oberhalb des Kriteriums?

4. Einfluß des Kapillarenmaterials.

5. Abhängigkeit der Durchflußmenge und des Kriteriums n der Gestalt der Einflußöffnung.

6. Kann man die Wirbel sichtbar machen?

7. Temperaturverlauf längs der Kapillare.

Soviel mir bekannt, sind bis jetzt Untersuchungen über e Turbulenzerscheinungen bei Gasen, hervorgerufen durch s Strömen in Kapillaren, noch nicht gemacht. Mehrfach ıtersucht ist jedoch schon der Reibungskoeffizient selbst, ine Anderung mit Druck und Temperatur. Ich will nur

1) Springmühl, Pogg. Ann. 148. p. 1 u. 526. 1873.

2) Obermaier, Pogg. Ann. 148. p. 1 u. 526. 1873.

erwähnen die Arbeiten von Obermaier[1]), Schuhmann[2]), Kundt und Warburg[3]), Maxwell[4]), Barus[5]) u. a.

Für die Veränderung des Reibungskoeffizienten η mit dem Drucke fanden die Beobachter: „Innerhalb weiter Grenzen des Druckes ist die innere Reibung der Gase entweder gar nicht oder doch nur in sehr geringem Grade mit dem Druck veränderlich." Die Resultate in bezug auf die Änderung von η mit der Temperatur weichen noch ziemlich voneinander ab, sie stimmen aber darin überein, daß die Zunahme von η schneller erfolgt, als die Theorie verlangt.

Bei meinen Versuchen habe ich geradlinig ausgestreckte Metall- und Glaskapillaren verwendet mit kreisförmigem Querschnitt. Der Übersicht halber sei über die Dimensionen folgende Tabelle im voraus mitgeteilt:

	Länge der Kapillare	Druck	Durchmesser der Kapillare
max.	15300 mm	180 Atm.	4 mm
min.	163	7 mm H_2O	0,123 mm

II. Abschnitt.

Beschreibung der Anlage.

Zu der vorliegenden Arbeit wurde die Maschinenanlage des physikalischen Institutes benutzt. Bei der Ausführung der Versuche habe ich unterschieden zwischen einer Hochdruckanlage (Fig. 1) und einer Niederdruckanlage (Fig. 2).

1. Kapitel. Hochdruckanlage.

Die Luft wird durch den Kompressor *C*, welcher von dem Gasmotor *G* mit Hilfe der Transmission *T* angetrieben wird, aus dem Freien angesaugt und in das Reservoir *R* gedrückt.

1) Obermaier, Pogg. Ann. **168.** p. 550.
2) Schuhmann, Wiener Ber. **23.** p. 353.
3) F. Kundt u. E. Warburg, Pogg. Ann. **155.** p. 529. 1875.
4) Maxwell, Phil. Trans. 1866. p. 249.
5) C. Barus, Wied. Ann. **36.** p. 358. 1889.

Die Anlage läßt eine Kompression zu bis 200 Atm. Überdruck. Das Reservoir *R* besteht aus drei übereinandergelagerten Kesseln und ist so konstruiert, daß man sowohl die komprimierte Luft sowie auch das Wasser einzeln entnehmen kann. Der Kompressor läuft zwecks Kühlung unter Öl und Wasser, mithin wird sich stets in jedem der drei Kessel unten das Wasser, darüber die komprimierte Luft befinden. Die drei Wasserräume, sowie die drei Lufträume stehen nun je unter sich in Verbindung, so daß es durch Umklappen des Rohrstückes *Z* möglich ist, durch das Ventil *F* Luft, durch das

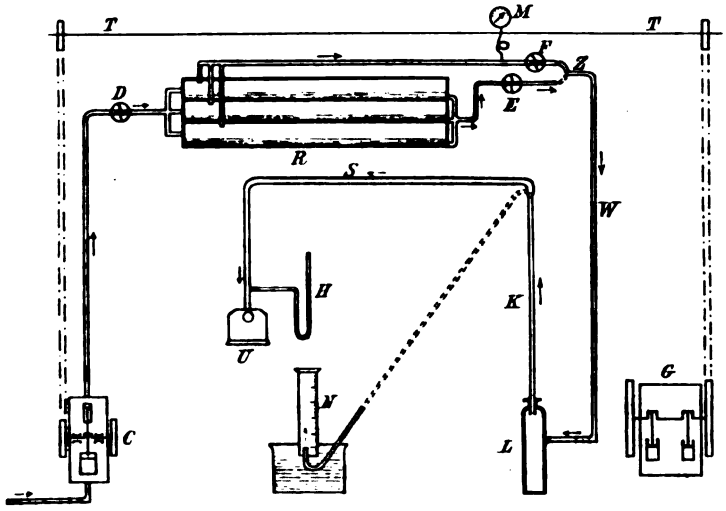


Fig. 1. Hochdruckanlage.

Ventil *E* Wasser in die Kapillare zu schicken. Die Leitung *W* ist in Wirklichkeit ganz kurz. Der Behälter *L* dient zur Verbindung der Kapillare *K* mit dem Rohr *W* bzw. mit dem Reservoir *R*. Die Konstruktion von *L* wird später erörtert. An die Kapillare schließt sich das Expansionsrohr *S* und an dieses die Gasuhr *U*. Vor der Gasuhr ist ein Wassermanometer *H*. Der erzeugte Kompressionsdruck wird an dem Metallmanometer *M* abgelesen. *D* ist ein Absperrventil. An das Ventil *F* kann für niedere Drucke (1 Atm. und weniger) ein Reduzierventil angeschraubt werden. In diesem Falle muß man dann für die Druckmessung wegen der Genauigkeit auch

noch ein Quecksilbermanometer einschalten. Wenn die durchfließende Menge wegen zu enger Kapillare zu klein wird, um mit der Gasuhr gemessen zu werden, fängt man die Luft durch den Meßzylinder *N* über Wasser auf. Hierdurch kann man einzelne Kubikzentimeter ablesen.

2. Kapitel. Niederdruckanlage.

Diese Anlage ist für Drucke bestimmt, die nur einige Millimeter oder Zentimeter Wassersäule betragen. Aus diesem Grunde ist sie naturgemäß bedeutend einfacher als die Hoch-

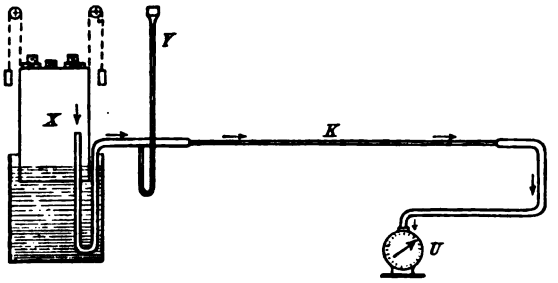


Fig. 2. Niederdruckanlage.

druckanlage. Die Luft wird komprimiert in dem Gasometer *X*, geht dann zum Wassermanometer *Y* und von hier zur Kapillare *K*. An letztere schließt sich die Gasuhr *U*. Je nach der Menge wurde bald eine große, bald eine kleine Gasuhr benutzt.

III. Abschnitt.

Ausführung der Versuche.

1. Kapitel. Allgemeines.

Bevor ich an die Versuche selbst herangehen konnte, hatte ich in der Anlage viele technische Schwierigkeiten zu überwinden. Hauptsächlich stellten sich mir bei hohen Drucken die Undichtigkeiten in den Weg, die teilweise in den Flanschen, zum größten Teil aber in den Ventilen zu suchen waren. Die

Luftventile *D* und *F* dichten durch einen Tellerverschluß (Fig. 3), das Wasserventil *E* durch einen Konus (Fig. 4).

Die Schwierigkeiten in dem Abdichten der Ventile *D* und *F* lag in dem Umstande, zu dem Dichtungsteller ein

Fig. 3 (schematisch).

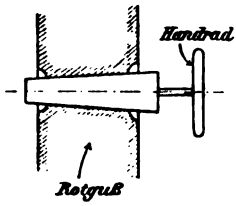


Fig. 4.

Material zu verwenden, das weder zu hart noch zu weich ist. Gummi, Blei, Zink, Leder erwiesen sich als zu weich; Kupfer, Eisen als zu hart.

Erst in dem Aluminium fand ich das rechte Mittelding. Die Aluminiumdichtungen habe ich $1^1/_2$ Jahr täglich benutzt und es war bis zum Schluß dieser Arbeit nicht erforderlich, die Dichtungsteller auch nur ein einziges Mal auszuwechseln.

Für meine persönliche Sicherheit gegen ein eventuelles Zerspringen einer Glaskapillare sorgte ich in der folgenden Weise:

Die Kapillare wurde an den freien Seiten mit Ausnahme der vorderen durch zwei dünne Stahlblechplatten abgedeckt. Vorne, an der Beobachtungsseite, hingen schwebend, um einem Anprall der Glassplitter nachgeben zu können, zwei übereinandergelegte, feinmaschige Drahtsiebe. Die Kapillare stand vertikal (Fig. 5).

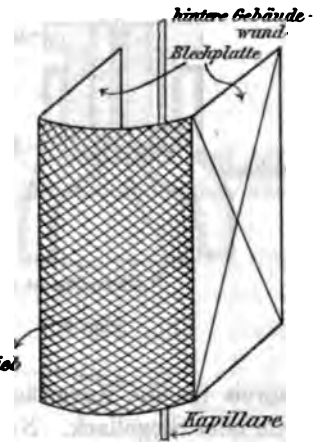


Fig. 5 (schematisch.)

Die Versuche wurden in der Weise angestellt, daß ich an dem Metall-, Quecksilber- oder Wassermanometer den jeweilig treibenden Druck, an der Gasuhr die in einer bestimmten Zeit durchgeflossene Menge konstatierte. Durch Auftragen

des Druckes und des Reibungskoeffizienten, bzw. des Druckes und der Durchflußmenge erhielt ich dann jedesmal die Stelle des Kriteriums in der Kurve. Bei kleinen Durchflußmengen, also bei engen Kapillaren, wählte ich mit Rücksicht auf die Genauigkeit der Gasuhren die Beobachtungszeit größer als bei weiten Kapillaren. Es war besonders darauf zu achten, daß zwischen Kapillare und Gasuhr eine sogenannte Expansionsleitung lag, damit die Gasuhr ohne Überdruck arbeitete.

Die Glaskapillaren sind geliefert von Karl Kramer in Freiburg (Br.). Die Metallkapillaren konnte ich in den für mich notwendigen Dimensionen in Deutschland nirgendwo erhalten. Ich bezog sie von Kipp & Zonen in Delft (Holland). Die Verbindung der Glaskapillare K mit dem Behälter L hatte nebenstehende Konstruktion. Fig. 6.

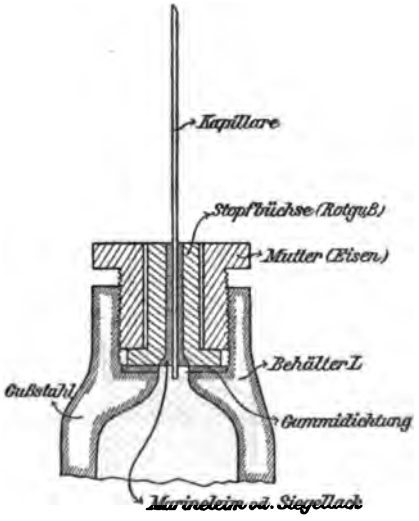


Fig. 6.

Der ganze in Fig. 6 dargestellte Dichtungsverschluß hat sich bei genügendem Anziehen der oberen Mutter als sehr gut bewährt. Die Kapillare K wurde mittels Marineleim oder Siegellack in die Stopfbüchse eingekittet (vgl. Fig. 6). Nicht ein einziges Mal ist mir während der ganzen Arbeit eine Kapillare infolge zu hohen Druckes herausgeschleudert worden, ein Beweis für die Zuverlässigkeit des Einkittens mittels Marineleim oder Siegellack. Nur muß das Einkitten bei heißer Stopfbüchse und recht langsam geschehen, damit die Luft entweichen kann. Während des Einkittens verhinderte ich das Auslaufen des Siegellacks durch Vorschieben eines Korkpfropfens. Befürchtet man bei gar zu hohen Drucken dennoch eine Verschiebung der Kapillare, so kann letztere am Einflußende noch etwas aufgeblasen werden.

Die Kapillare war nicht direkt mit dem Expansionsrohr, welches zur Gasuhr führt, verbunden, sondern es war zwischen Kapillare und Expansionsrohr noch ein Stück weiten Gummischlauches angebracht. Bei hohen Drucken nämlich gerät die Kapillare sehr leicht in kleine Schwingungen, weil sie vertikal steht, und sie bricht dann, wenn sie aus Glas besteht, jedesmal ab, sobald sie am Ausflußende nicht frei beweglich ist, Auch wäre ohne den Schlaucheinsatz ein Zentrieren der Kapillaren wohl gar zu schwierig, wenigstens bei Glas. Die Expansionsleitung selbst war aus Glas.

2. Kapitel. Vorversuche.

§ 1. Eichen der Gasuhren.

Die beiden Gasuhren wurden hintereinander geschaltet. Die große Uhr war, wie ich schon erwähnte, vom Gaswerk entliehen und zeigte bei einer Umdrehung 100 Liter an; die

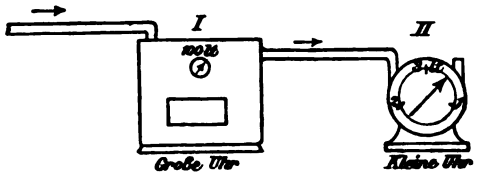
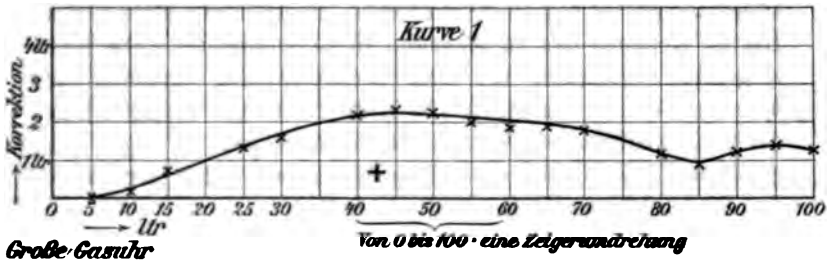


Fig. 7.

kleine Uhr gehörte zum Junkerschen Kalorimeter und zeigte bei einer Umdrehung 3 Liter an. Ich benutzte die kleine Uhr als Präzisionsinstrument.



Durch einen meiner Herren Kollegen wurde bei I von 5 zu 5 Liter ein Kommando abgegeben. Zu gleicher Zeit las ich die angezeigte Menge bei II ab. Die Differenz ergab als-

dann die Korrektion. Die Korrektionskurve ist in Kurve 1 dargestellt.

§ 2. Eichen des Hochdruckmanometers.

Das Hochdruckmanometer ist ein Metallmanometer und läßt einen Druck zu bis 250 Atm. Überdruck. Das Eichen geschah in der folgenden Weise:

Durch eine Cailletetsche Pumpe wurde durch Kompression von Wasser der hohe Druck erzeugt und dieser dann nach der Methode von Amagat durch Kolbenübertragung reduziert. Mit der Cailletetschen Pumpe war das zu eichende Metallmanometer, mit dem Amagatschen Apparat das zu vergleichende Quecksilbermanometer verbunden. Beide Pumpen waren hintereinander geschaltet (vgl. Fig. 8).

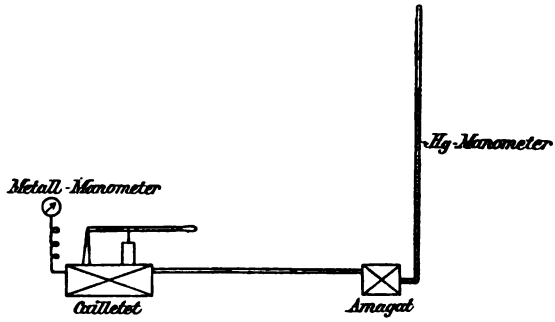
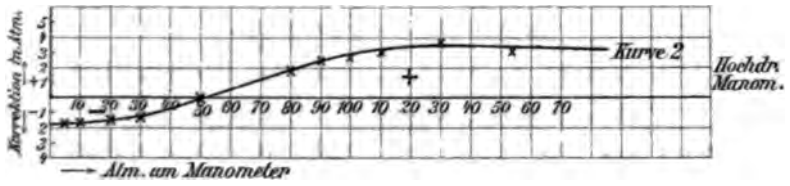


Fig. 8.

Während ich den Druck an dem vergleichenden Quecksilbermanometer regulierte und ablas, beobachtete einer meiner Herren Kollegen das zu eichende Metallmanometer. Die übertragende Flüssigkeit bei dem Amagatschen Apparat war Melasse. Höher wie bis zu 153 Atm. Überdruck konnte ich mit der Cailletetschen Pumpe nicht kommen, weil es wegen ganz geringer Undichtigkeiten nicht möglich war, den Druck für die Beobachtungszeit konstant zu halten.

Wegen näherer Einzelheiten über die Konstruktion und den Gebrauch der beiden Apparate verweise ich auf Kohlrausch.[1])

1) F. Kohlrausch, Praktische Physik.



§ 3. Eichen des Niederdruckmanometers.

Das Niederdruckmanometer war ebenfalls ein Metallmanometer und ließ einen Druck bis zu 12 Atm. zu. Ich habe es jedoch nur bei niederen Drucken verwendet und auch nur für niedere Drucke geeicht. Letzteres geschah mit dem sogenannten Mariotteschen Apparat (vgl. Fig. 9). Die Arbeitsmethode war folgende:

Wie früher, so wurde auch hier das zu eichende Manometer mit einer Quecksilbersäule verglichen. Mit der Handpumpe *A* wurde komprimierte Luft in den Mariotteschen Apparat gedrückt, alsdann der Hahn *B* geschlossen und durch Ziehen an der Ventilschnur *C* so viel Quecksilber aus dem kleinen Reservoir *R* in das Manometerrohr *D* gelassen, bis die Quecksilberoberfläche in dem erweiterten Rohrstück *E* sichtbar wurde. Die Quecksilbersäule hält alsdann dem Luftdruck in *E* das Gleichgewicht. Die Differenz der Quecksilbermenisken in *D* und *E* ergibt alsdann den Druck, der mit dem zu eichenden Manometer *G* zu vergleichen ist. Der Hahn *B* ist eingeschaltet, damit das Luftvolumen bzw. der Druck konstant bleibt, Hahn *K* dient zum Ablassen des Quecksilbers.

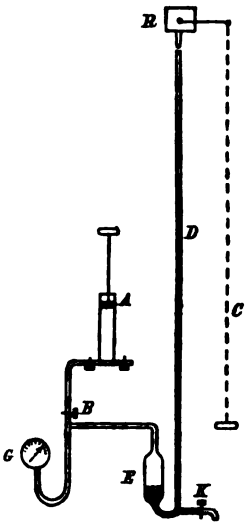
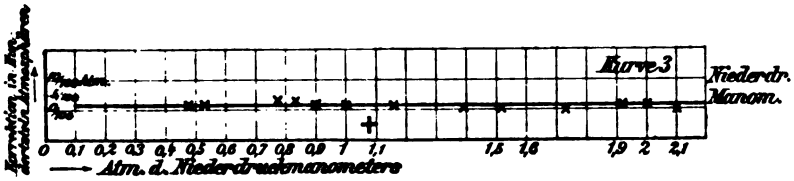


Fig. 9 (schematisch.)



3. Kapitel. Hauptversuche.

§ 1. Untersuchung des Kriteriums bei Glaskapillaren.

Wie schon erwähnt, wurden die Messungen in der Weise gemacht, daß ich Druck und Durchflußvolumen beobachtete. Ich zeichnete hierauf die Volumendruckkurve und erhielt unmittelbar das Kriterium, indem die Kurve an jener kritischen Stelle einen deutlichen Knick zeigte. Auch einige Werte des Reibungskoeffizienten η habe ich ausgerechnet und zwar nach dem Poiseuilleschen Gesetz, unter der Voraussetzung, daß das Volumen unter dem mittleren Druck $\frac{p_a + p_e}{2}$ gemessen wird. Naturgemäß bricht dann auch die Druck-η-Kurve an derselben Stelle, an der die Druckvolumenkurve das Kriterium zeigt. Ich werde nachfolgend bei der ersten Kapillare ein Beispiel der Beobachtung in Zahlen angeben und bei den folgenden Kapillaren nur noch die Kurven darstellen, da aus ihnen ja alle Beobachtungswerte ersichtlich sind. Der Durchmesser der Glaskapillare wurde durch Quecksilberwägung bestimmt und dann optisch mit dem Mikroskop kontrolliert. Bei gar zu engen Kapillaren wurde der Quecksilberwägung eine Berechnung des Durchmessers aus dem Poiseuilleschen Gesetz bei ganz niedrigem Drucke vorgezogen. Die erste Glaskapillare hatte einen Durchmesser von 0,123 mm und eine Länge von 1055 mm.

Einige Beobachtungswerte. (Hierzu Kurve 4) **Kapillare 1.**

Atm. Druck abgelesen am Manometer	Druck korrigiert in Atm.	Durchfluß-volumen in ccm	Strömungs-zeit in sec	Bemerkungen
1,0	1,02	2,7	60	Niederdruck-manometer
2,11	2,13	4,0	30	
2,52	2,54	5,4	„	
2,90	2,92	6,5	„	
3,40	3,42	7,3	„	
3,63	3,65	9,5	„	
4,00	4,02	11,5	„	
4,40	4,42	12	„	

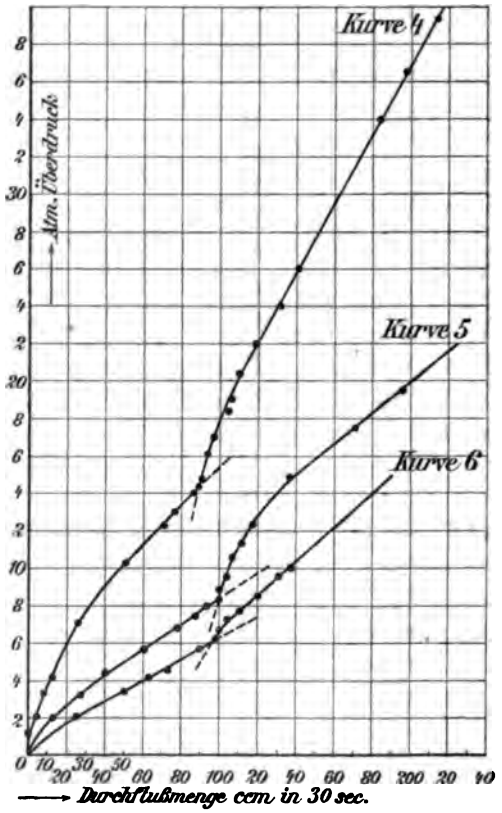
Einige Beobachtungswerte (Fortsetzung).

Atm. Druck abgelesen am Manometer	Druck korrigiert in Atm.	Durchfluß-volumen in ccm	Strömungs-zeit in sec	Bemerkungen
4,69	4,71	14	30	
5,01	5,03	15,6	„	
5,50	5,52	17,3	„	
5,80	5,82	19,5	„	Niederdruck-manometer
6,18	6,20	22	„	
6,86	6,88	26,8	„	
7,15	7,17	27,6	„	
12,0	10,2	51	„	
13,0	11,2	60	„	
14,1	12,3	70	„	
14,9	13,1	76	„	
16,0	14,2	89	„	
16,2	14,5	90	„	
16,6	15,0	92	„	
18,0	16,2	96	„	
20,0	18,4	103	„	Hochdruck-manometer
22,0	20,4	109,5	„	
23,5	22	119	„	
27,5	26,1	140	„	
30,0	28,7	158	„	
32,8	31,7	177	„	
35,1	34,1	183	„	
37,3	36,5	197	„	
40,0	39,3	214	„	
42,0	41,4	224	„	

Die in der Tabelle angegebenen Durchflußmengen sind nun ihrerseits wiederum der Mittelwert aus mehreren Messungen. Der Druck blieb nämlich, besonders bei engen Kapillaren, längere Zeit konstant, und während dieser Zeit beobachtete ich dann alle 30 Sek. die Ausflußmenge. Wenn z. B. in der Tabelle einem Druck von 5,01 Atm. eine Durchfluß-

menge von 15,6 ccm entspricht, so ist 15,6 ccm der Mittelwert aus den Einzelmessungen:

15 cm	30 Sek.	Druck 5,01 Atm.
17 „	30 Sek.	
16 „	30 Sek.	
14 „		
16 „		
15 „		
16 „		
16 „		
15,6 cm		



Glaskapillare. Durchmesser 0,123 mm.

Kurve 4: l = 1055 mm. Kurve 5: l = 295 mm.
Kurve 6: l = 163 mm.

NB. Am Einflußende nicht aufgeblasen.

Für die Berechnung des Reibungskoeffizienten η gilt:

$$\eta = \left(\frac{\pi . r^4 . 981}{8 . l}\right) . \left(\frac{p\,t}{v}\right)$$

$$= C . \frac{p\,t}{v}$$

muß unter dem Drucke $\frac{p_a + p_e}{2}$ gemessen werden).

Der erste Klammerausdruck bleibt bei der gleichen apillare konstant, es ändert sich mit dem Druck nur der weite Faktor, die letzte Klammer. Hat man C für eine apillare berechnet, so folgen die η-Werte für verschiedene rucke aus $\eta = C . (p\,t/v)$.

Bei der ersten Kapillare war

$$l = 105{,}5\text{ cm}, \quad 2r = 0{,}0123\text{ cm},$$

wird also

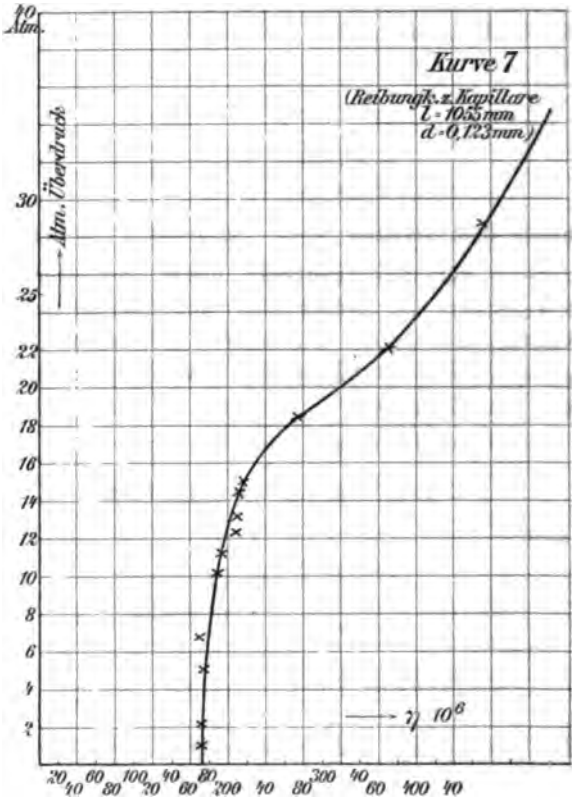
$$C = \frac{3{,}14\left(\frac{0{,}0123}{2}\right)^4 . 981}{8 . 105{,}5} = 522 . 10^{-11},$$

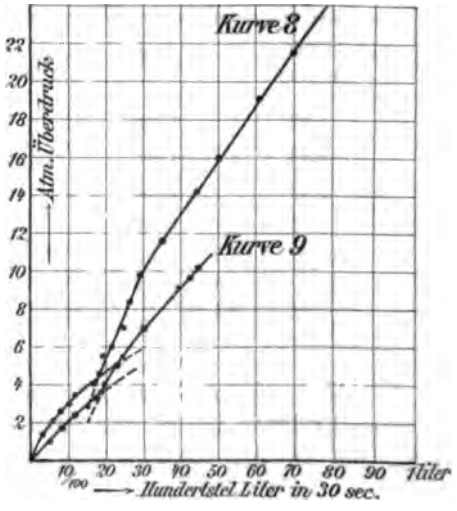
$$\eta = 522 . 10^{-11} . \frac{p\,t}{v} .$$

Nachfolgend einige Zahlenwerte des Reibungskoeffizienten ei verschiedenen Drucken. (Hierzu Kurve 7.)

Druck in Atm.	$\eta . 10^7$	Druck in Atm.	$\eta . 10^7$
1,02	1775	13,1	2036
2,13	1722	14,5	2088
5,03	1722	15,0	2130
6,88	1722	18,4	2766
10,2	1879	22	3497
11,2	1931	28,7	4332
12,3	2088	39,3	5690

In den nachfolgenden Kurven nun habe ich Kapillaren on verschiedener Länge und verschiedenem Durchmesser benutzt, um so die Verschiebung des Kriteriums festzustellen.



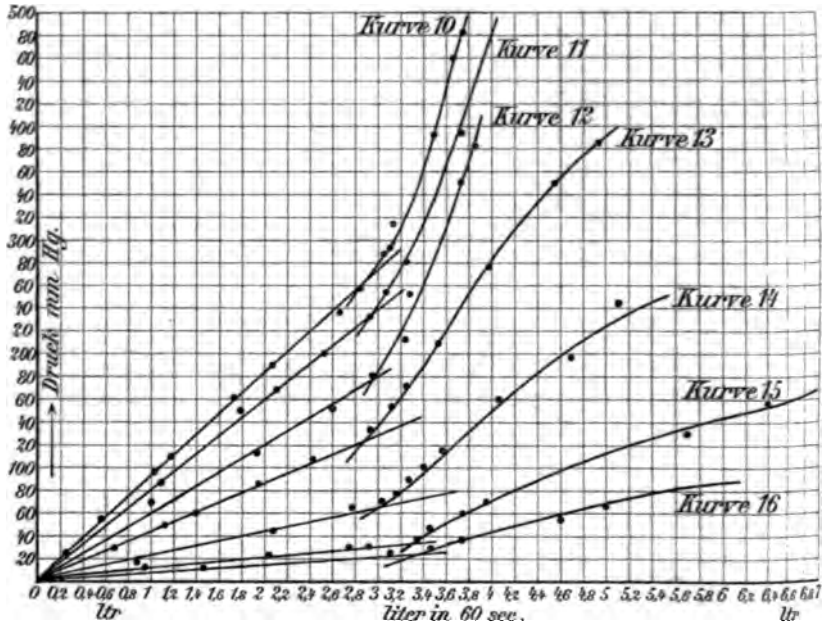


Glaskapillare.
Durchmesser 0,241 mm.
Kurve 8: l = 1054 mm
„ 9: l = 599 „

NB. Am Einflußende nicht aufgeblasen.

Versuchstabelle.

Kapillare Nr.	Durchmesser in mm	Länge in mm	Kriterium liegt bei einem Drucke von	Kurve (Liter) Nr.	Durchflußmenge an der kritischen Stelle in 30 sec	Bemerkungen
1 *a*	0,123	1055	14,2 Atm.	4	87 ccm	Am Einflußende nicht aufgeblasen
1 *b*		295	8,5 „	5	100 „	
1 *c*		168	6,8 „	6	98 „	
2 *a*	0,241	1054	4,5 „	8	0,180 Liter	desgl.
2 *b*		599	3,6 „	9	0,185 „	
3 *a*	2,00	15300	260 mm Hg	10	1,45 „	
3 *b*		12150	234 „ „	11	1,47 „	
3 *c*		9170	182 „ „	12	1,50 „	
3 *d*		6080	133 „ „	13	1,51 „	desgl.
3 *e*		2880	170 „ „	14	1,53 „	
3 *f*		1550	34 „ „	15	1,68 „	
3 *g*		1030	24 „ „	16	1,70 „	
5	3,80	3120	noch tiefer als 7 mm H_2O	18	—	desgl.
6 *a*	0,430	1030	2,1 Atm.	19; 22; 24; 27	0,45 Liter	konisch aufgeblasen (jedoch wenig)
6 *b*		570	1,6 „	20; 23; 25; 28	0,52 „	
6 *c*		278	1,5 „	21; 26	0,86 „	



Glaskapillare. Durchmesser 2,0 mm.

Kurve 10:	$l = 15{,}30$ m	Kurve 14:	$l = 2{,}88$ m
„ 11:	$l = 12{,}15$ „	„ 15:	$l = 1{,}55$ „
„ 12:	$l = 9{,}17$ „	„ 16:	$l = 1{,}03$ „
„ 13:	$l = 6{,}08$ „		

Einflußende nicht aufgeblasen.

Die Kapillaren $3a$ bis $3g$ wurden auf dem Hofe des Instituts aufgebaut, da mein Versuchsraum solche Längen nicht zuließ. Die ganze lange Röhre bestand aus einzelnen ungefähr je 2 m langen Kapillaren, die mit den Enden genau aneinanderstießen und durch Gummi zusammengehalten wurden (Fig. 10).

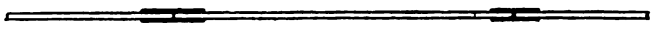
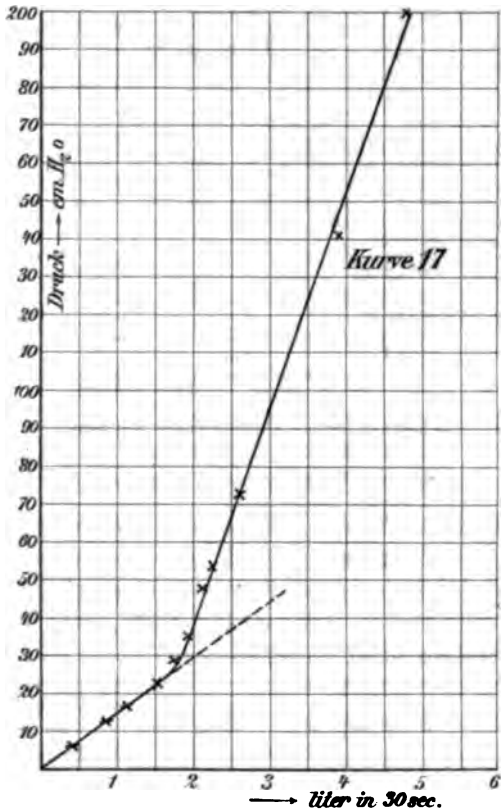


Fig. 10.

Ich habe mich durch mehrere Messungen überzeugt, daß der Zusammenstoß der Enden ohne Einfluß blieb, indem ich eine Kapillare in Stücke zerschnitt und diese dann in der geschilderten Weise wieder zusammenfügte. In beiden Fällen

waren die Resultate genau dieselben. Auch eine etwaige Krümmung im Expansionsrohr zwischen Kapillaren und Gasuhr war ohne Einfluß. Natürlich muß das Expansionsrohr weit sein im Vergleich zur Kapillare, besonders bei hohem Druck.



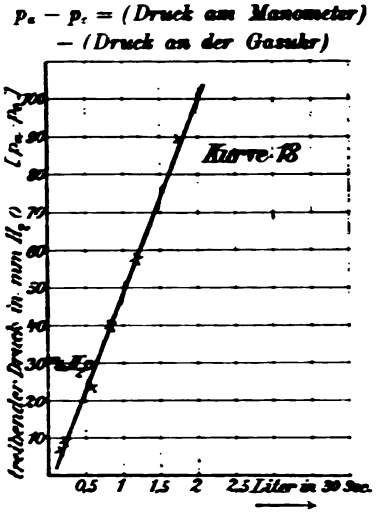
Glaskapillare. Durchmesser 2,2 mm.

Kurve 17: $l = 1555$ mm.

NB. Einflußende nicht aufgeblasen.

Bei Kapillare Nr. 5, Kurve 18 konnte ich wegen des großen Durchmessers ein Kriterium überhaupt nicht feststellen. In der Literkurve ist der Knick bis 7 mm H_2O abwärts noch nicht aufgetreten und auch η hat hier (7 mm H_2O) noch einen

Wert größer als $2000 . 10^{-1}$. Mithin hat das Poiseuillesche Gesetz keine Gültigkeit.



Glaskapillare. Durchmesser 3,8 mm.
Kurve 18: $l = 3120$ mm.
NB. Einflußende nicht aufgeblasen.

Die folgende Tabelle gibt einige Geschwindigkeiten an der kritischen Stelle an wie sie sich berechnen würden, wenn am Ausflußquerschnitt das ausströmmende Gas schon die Dichtigkeit der ausfließenden Atmosphäre hätte, was bei größeren Geschwindigkeiten nicht zutreffen wird.

Kapillare Nr.	Durchmesser in mm	Länge in m	Geschwindigkeit an der kritischen Stelle in m
1 *a*	0,123	1,055	244,33
1 *b*	„	0,295	280,84
1 *c*	„	0,163	272,41
2 *a*	0,241	1,054	131,77
2 *b*	„	0,599	135,43
3 *a*	2,0	15,300	15,39
3 *b*	„	12,150	15,60
3 *c*	„	9,170	15,92
3 *d*	„	6,080	15,95
3 *e*	„	2,880	16,24
3 *f*	„	1,550	17,82
3 *g*	„	1,030	18,05

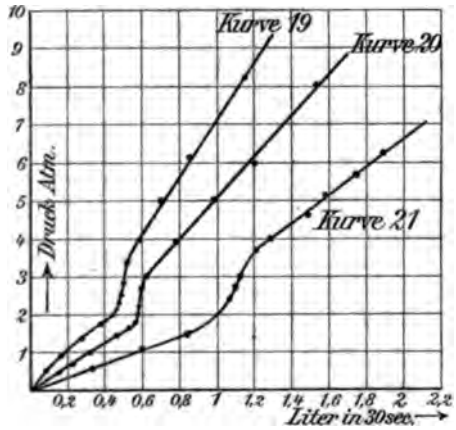
Glaskapillare.
Durchmesser 0,430 mm.

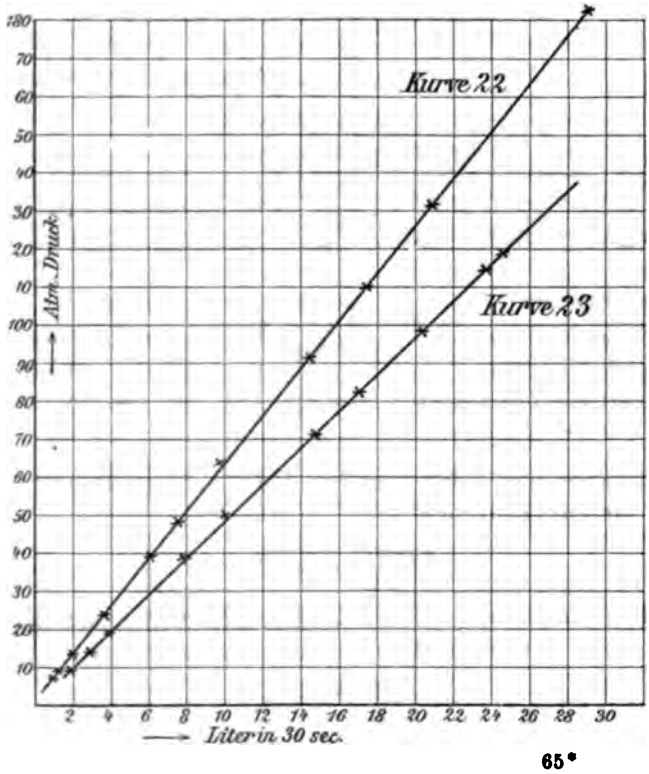
Kurve 19, „ 22 } l = 1030 mm

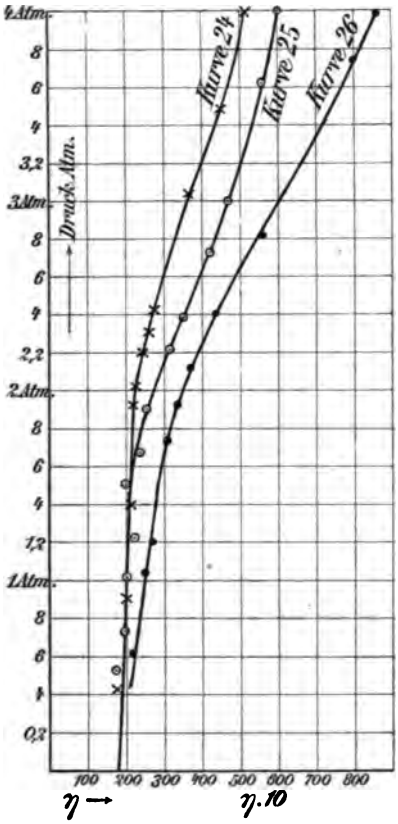
Kurve 20, „ 23 } l = 570 mm

Kurve 21 l = 278 mm

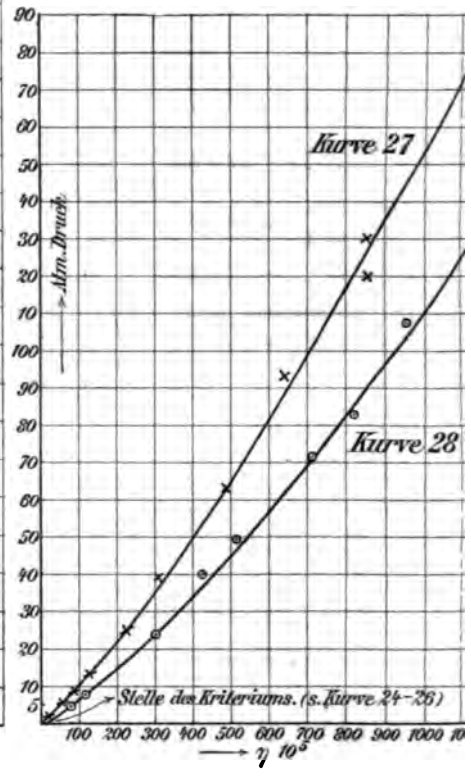
NB. Einflußende nicht aufgeblasen.







Glaskapillare.
Durchmesser 0,430 mm.
Kurve 24: l = 1030 mm
„ 25: l = 570 „
„ 26: l = 278 „



Glaskapillare.
Durchmesser 0,430 mm.
Kurve 27: l = 1030 mm
„ 28: l = 570 „

Es zeigt sich, daß der von Reynolds gefundene Ausdruck für das Kriterium

$$\frac{\varrho\, D\, U_m}{\mu} = \sim 2000$$

auch auf Gase anzuwenden ist. Ich will hier einige Zahlenwerte dieses kritischen Ausdruckes angeben, wobei ich setze:

$$\mu = 1800 . 10^{-7},$$
$$\varrho = 0{,}0012 .$$

Durchmesser in mm	Länge in m	$\frac{\varrho D U_m}{\mu}$
0,128	1,055	2003
„	0,295	2302
„	0,163	2234
0,241	1,054	2112
„	0,599	2160
2,0	15,300	2042
„	6,080	2126
„	1,030	2400

§ 2. Untersuchung des Kriteriums bei Metallkapillaren.

Der Querschnitt der Metallkapillaren war nicht so genau kreisrund wie derjenige der Glaskapillaren. Es hängt dies mit der Schwierigkeit der Herstellung von Metallkapillaren von großer Wandstärke zusammen.

Die Beobachtungen sind, wie in § 1, so auch hier direkt in Kurven niedergelegt.

Tabelle.

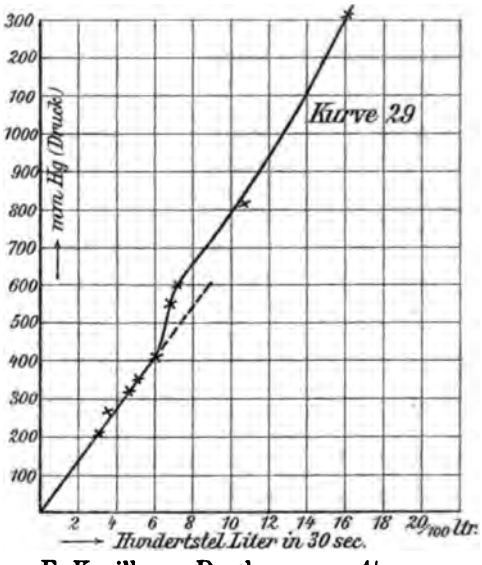
Kapillare Nr.	Kurve Nr.	Kriterium liegt bei	Material	Durchmesser in mm	Länge in m
7	29 und 30	430 mm Hg	Eisen	~0,4	1,480
8	31	nur bei hohem Druck mit Kap. Nr. 7 verglichen	Kupfer	~0,4	1,500
9	32	78 mm H_2O	Kupfer	1,95	1,380
10	33	nicht gefunden	Messing	4,0	3,120

Die kritische Geschwindigkeit bei Kapillare Nr. 7 (Kurve 30 und 31) ist: 16,46 m. Der Ausdruck

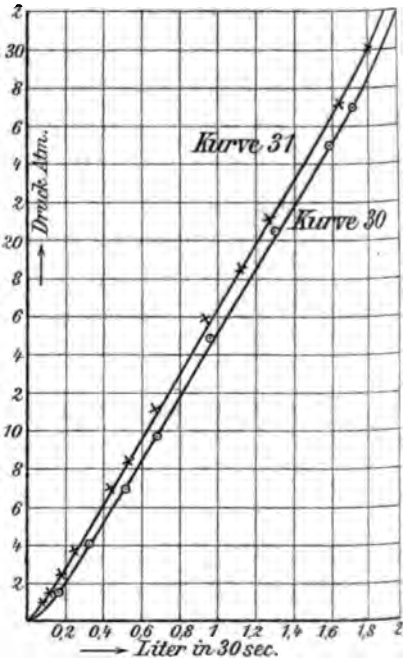
$$\frac{\varrho D U_m}{\mu} = 439;$$

für Kapillare Nr. 9 (Kurve 32) wird die kritische Geschwindigkeit 3,80 m — der Ausdruck

$$\frac{\varrho D U_m}{\mu} = 494.$$



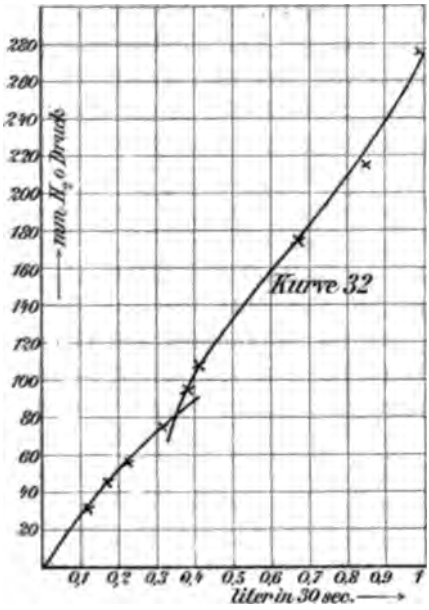
Fe-Kapillare. Durchmesser $\sim {}^{4}/_{10}$ mm.



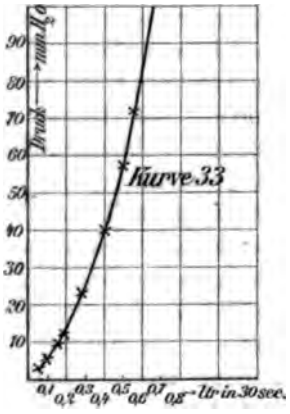
Kurve 29: $l = 1480$ mm
„ 30: $l = 1480$ „
„ 31: $l = 1500$ „

⊙ Fe-Kapillare.
Durchmesser $\sim {}^{4}/_{10}$ mm.

× Cu-Kapillare.
Durchmesser $\sim {}^{4}/_{10}$ mm.



Cu-Kapillare.
Durchmesser 1,95 mm.
Kurve 32: l = 1380 mm.



Messingkapillare.
Durchmesser 4,0 mm.
Kurve 33: l = 3120 mm.

Es zeigt sich also, daß zwar der kritische Ausdruck

$$\frac{\varrho D U_m}{\mu}$$

auch bei Metallkapillaren ein Kriterium darstellt, daß aber sein numerischer Wert bei Glas und Metall verschieden ist. Während ich bei Glaskapillaren gefunden hatte:

$$\frac{\varrho D U_m}{\mu}$$

ist im Kriterium ungefähr 2000, finde ich für Metallkapillaren:

$$\frac{\varrho D U_m}{\mu}$$

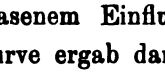
ist ungefähr 4—500.

§ 8. Versuch, die Wirbel optisch sichtbar zu machen.

Mit Hilfe verschiedener Methoden versuchte ich, die Vorgänge im Innern der Kapillare, die Wirbel, optisch sichtbar

zu machen. Zuerst brachte ich unter das Einflußende der Kapillare in geeigneter Weise während des Durchströmens der komprimierten Luft den Rauch von brennendem Zunder. Ich dachte, auf diese Weise vielleicht durch die Rauchwolken im Innern der Kapillare etwas Näheres zu entdecken. Jedoch die Kapillare wurde so heiß, daß ich diese Methode alsbald wieder verlassen mußte. Dann nahm ich statt des Zunders ein feines, gelbes Pulver. Aber auch hier sah ich im Innern der Kapillare trotz der schärfsten Beobachtung nichts als eine Wolke. Als letztes Hilfsmittel versuchte ich nun die sogenannte Schlierenmethode, welche bekanntlich die kleinsten Unterschiede in dem Lichtbrechungsvermögen an den einzelnen Stellen eines Raumes erkennen läßt und dadurch sonst ganz unsichtbare Erscheinungen sichtbar und beobachtbar macht. Ich habe sowohl die Anordnung von Prandtl,[1]) wie diejenige von Töpler[2]) benützt. Wegen der Einzelheiten des Aufbaues verweise ich auf die Originalabhandlungen von Prandtl und Töpler selbst. Lange Zeit habe ich mit dieser Methode nach den verschiedensten Richtungen hin herumprobiert, jedoch ohne Erfolg. Meiner Ansicht nach lag das Versagen der sonst so empfindlichen Schlierenmethode allein in den optischen Unebenheiten des Kapillarenmateriales, des Kapillarenglases.

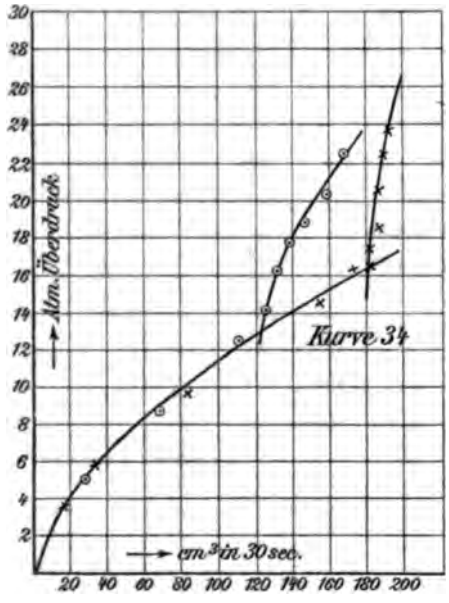
§ 4. Einfluß der Gestalt des Einflußendes der Kapillare in bezug auf das Durchflußvolumen und das Kriterium.

Wie früher, so sind auch hier die Beobachtungen wieder direkt in Kurven niedergelegt. Ich hätte eigentlich nicht geglaubt, daß der Einfluß der Gestalt des Einflußendes so groß sei, als sich in der Tat herausgestellt hat. Die Untersuchungen wurden in der Weise gemacht, daß ich das Durchflußvolumen verschiedener Kapillaren feststellte, und zwar einmal mit nicht aufgeblasenem Einflußende , das andere Mal mit aufgeblasenem Einflußende  . Die Literdruckkurve ergab dann das Kriterium.

---

1) Prandtl, Physik. Zeitschr. 8. 1907.

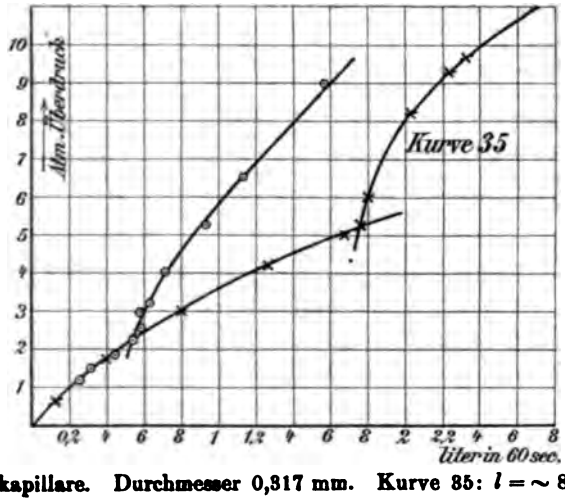
2) Töpler, Pogg. Ann. 131.



× × × *Kapillare am Einflußende aufgeblasen*

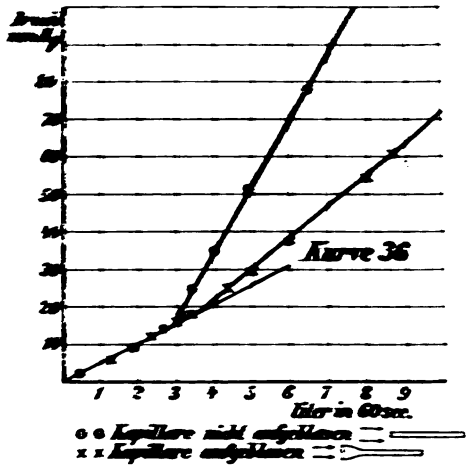
⊙ ⊙ ⊙ *Kapillare nicht aufgeblasen*

Glaskapillare. Durchmesser 0,153 mm. Kurve 34: $l = 1{,}35$ m.



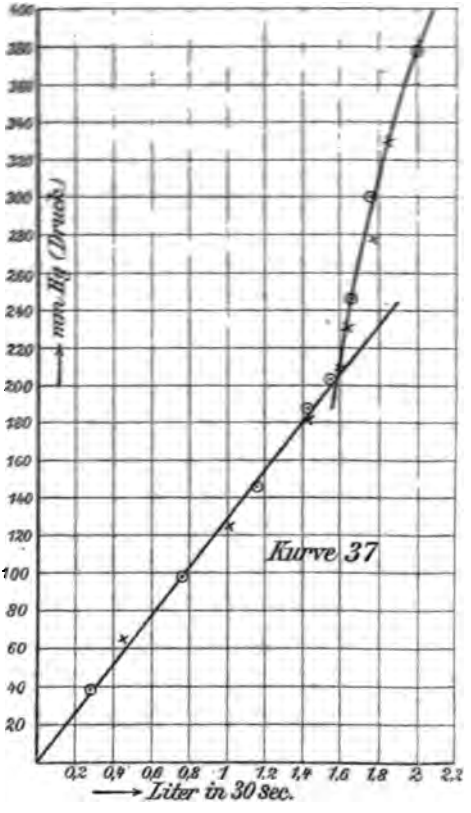
Glaskapillare. Durchmesser 0,317 mm. Kurve 35: $l = \sim 80$ cm.

Glaskapillare.
Durchmesser 2 mm.
Kurve 36: $l = 1$ m.



⊙ *Kapillare nicht aufgeblasen.*
× *Kapillare aufgeblasen.*

Glaskapillare.
Durchmesser 2 mm.
Kurve 37: $l = 10{,}95$ m.



Der Übersicht halber will ich noch folgende Tabelle angeben, welche alle bisher untersuchten Glaskapillaren zusammenfaßt.

Durchmesser in mm	Länge in m	U_m gemessen in m	$\frac{\varrho D U_m}{\mu}$ aus den Messungen	Bemerkungen
0,123	1,055	244,33	2003	nicht aufgeblasen
	0,295	280,84	2302	
	0,163	272,41	2234	
0,241	1,054	131,77	2112	"
	0,599	135,48	2160	
2,0	15,300	15,39	2042	"
	21,150	15,60	↓	
	9,170	15,92	↓	
	6,080	15,95	2126	
	2,880	16,24	↓	
	1,550	17,82	↓	
	1,030	18,05	2400	
2,2	1,555	15,35	1998	"
0,153	1,350	225,8	2250	"
		333,70	3337	aufgeblasen
0,317	0,800	120,69	2536	nicht aufgeblasen
		379,32	~ 8000	aufgeblasen
2	1,000	15,85	2113	nicht aufgeblasen
		20,21	2694	aufgeblasen
2	10,950	16,80	2240	nicht aufgeblasen
		16,80	2240	aufgeblasen
0,430	1,030	104,40	~ 8000	aufgeblasen (nur schwach)
	0,570	117,18	> 8000	
	0,278	197,59	> 5000	

§ 5. Temperaturuntersuchungen längs der Kapillare (vgl. Fig. 11).

Die beiden Kapillaren *B* und *C* wurden in das eigens zu diesem Zwecke konstruierte Gefäß *A* eingekittet. Das Rädchen *R* diente zur Führung des Thermodrahtes, der durch die beiden Kapillaren gezogen war. Das zum Thermodraht verwendete Material war Kupfer und Konstantan. Die Hauptlötstelle *U*

(Kupfer–Konstantan) befand sich in der rechten Kapillare B und wurde durch vorsichtiges Ziehen in der Kapillare verschoben. Der Behälter D enthielt Wasser und hatte den Zweck, die kleinen mit Öl gefüllten Gefäße E und F auf konstanter Temperatur zu halten, weil hier sich noch die beiden Anschlußlötstellen für das Galvanometer G befanden. Die Leitungen EG und FG bestanden aus Kupfer. H war ein Fernrohr und diente zur Beobachtung der Ausschläge von G. Durch das Verschieben der Lötstelle U erhielt ich somit den Temperaturverlauf längs der Kapillare. Bei sorgfältiger Be-

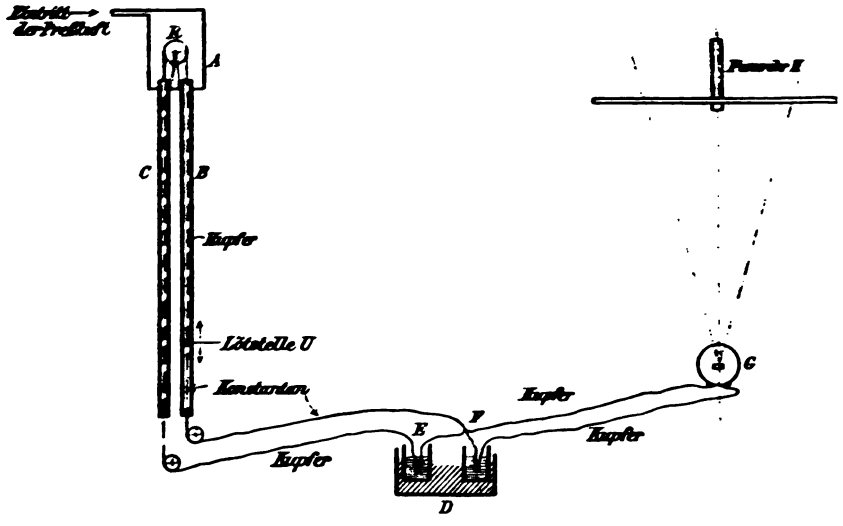
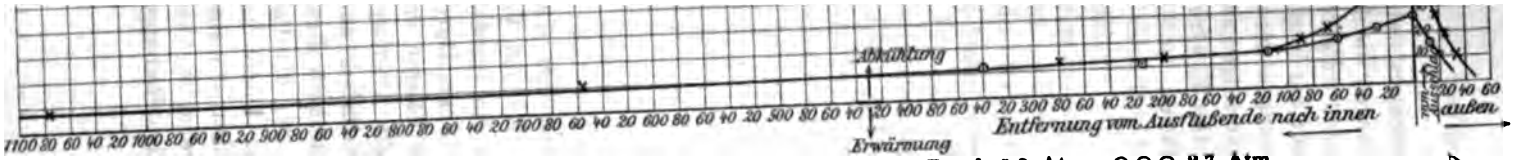
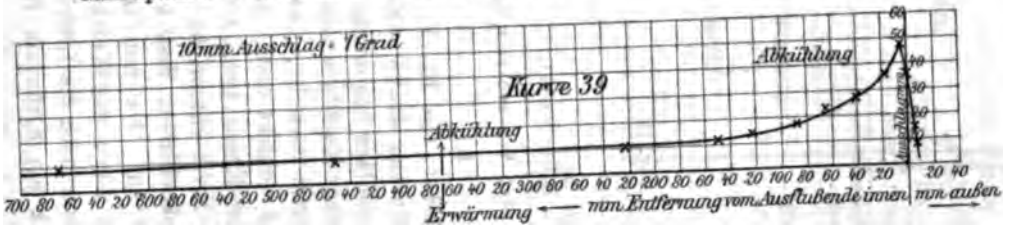


Fig. 11. Temperaturuntersuchung.

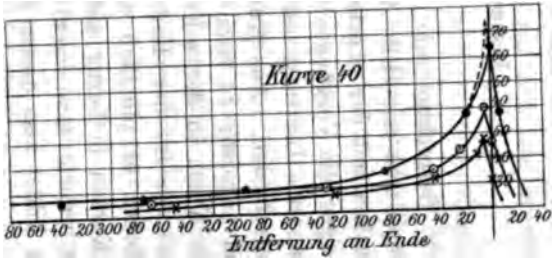
handlung konnte ich sogar die Lötstelle noch einige Zentimeter aus der Kapillare herausziehen und auch die Temperaturvorgänge an dieser Stelle feststellen. Während der Beobachtung mußte natürlich die komprimierte Luft durch die Kapillare strömen. Den Druck hielt ich durch Nachpumpen konstant. Das Eichen des Galvanometerausschlages ergab: 10 mm Ausschlag auf der Fernrohrskala entsprechen einer Temperaturänderung von $\sim 1°$ C., und zwar: Ausschlag nach rechts = Erwärmung, Ausschlag nach links = Abkühlung. Beobachtet wurde der treibende Druck, die Entfernung der Lötstelle vom Ausflußende der Kapillare B und die Temperatur.



Glaskapillare. Durchmesser 2 mm. Kurve 38: l = 1220 mm. × × × Druck 5,3 Atm. ⊙⊙⊙ 2,7 Atm.



Glaskapillare.
Durchmesser $^9/_{10}$ mm.
Kurve 39: l = 1270 mm.
Druck = 5,3 Atm.



Temperaturuntersuchungen.

gemessen

wahrscheinlich wirklicher Verlauf

Glaskapillare.
× × × Durchmesser $^5/_{10}$ mm.
⊙⊙⊙ „ „
• • • „ „

Kurve 40:
× × × l = 950 mm. Druck = 5,3 Atm.
⊙⊙⊙ l = 950 „ „ = 9 „
• • • l = 480 „ „ = 9 „

Ich will auch hier wie früher auf die Beobachtungstabellen verzichten und dafür der besseren Übersicht wegen die Beobachtungskurven angeben. — Als Koordinaten sind aufgetragen die Entfernungen der Lötstelle U vom Ausflußende der Kapillare und die Galvanometerausschläge. Die Entfernungen der Lötstelle innerhalb der Kapillare sind nach links, diejenigen außerhalb der Kapillare nach rechts aufgetragen. Die Erwärmung ist nach unten, die Abkühlung nach oben gedacht.

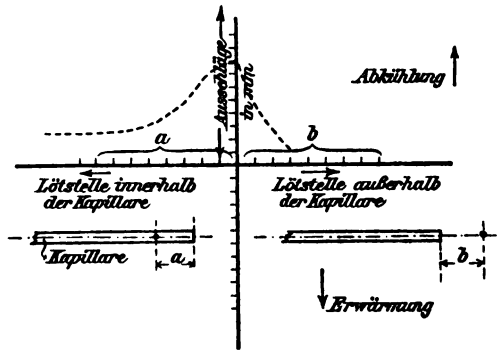


Fig. 12.

IV. Abschnitt.

Diskussion der Versuchsresultate.

I.

Betrachten wir zunächst die Erscheinungen bei Glaskapillaren mit Hilfe der Kurven 4—28. Es ist bei den Versuchen mit der engsten Kapillare begonnen. Die Kurven 4—7 zeigen die Vorgänge bei einer Kapillare von 0,123 mm Durchmesser. Letzterer ist überall derselbe, nur die Längen sind verschieden. Aus Kurve 4 ersieht man, daß die Literkurve bei ungefähr 14 Atm. einen Knick hat, dem natürlich auch ein Knick in der η-Kurve Nr. 7 entspricht. Unterhalb dieses Knickes ist der Reibungskoeffizient fast konstant, oberhalb wächst er plötzlich stark an. Da nun immer Liter- und η-Kurven in bezug auf die Lage des Knickes identisch sind, so braucht man eigentlich nur noch die Literkurve zu zeichnen. Es bildet also dieser Knick ein Kriterium für den Reibungs-

koeffizienten, demnach auch ein Kriterium für das Poiseuillesche Gesetz. Daß das Kriterium von der Länge abhängig ist in bezug auf den Druck, ergeben die Kurven 5 und 6. Je länger die Kapillare, desto höher liegt das Kriterium, desto später tritt es ein. Bei $l = 1055$ mm (Kurve 4) finden wir die kritische Stellung bei ~14 Atm., bei $l = 295$ mm (Kurve 5) liegt es bei ~ 8 Atm. und bei $l = 163$ mm (Kurve 6) sehen wir es bei ~ 6 Atm. Mit fallender Länge fällt also auch das Kriterium, d. h. dem Drucke nach. Dagegen scheinen sich die Durchflußmengen an der kritischen Stelle um einen bestimmten Mittelwert herum zu bewegen; das hieße also, die Geschwindigkeiten sind an den 3 Kriterien bei allen 3 Kapillaren fast gleich. Es würde sich also hier, wie bei Flüssigkeiten, eine ganz bestimmte kritische Geschwindigkeit zeigen.

Der Ausdruck, den Reynolds für das Kriterium bei Flüssigkeiten aufstellte, hat auch hier überall denselben Wert. Bei Kurve 4—9 ist überall $\varrho D U_m/\mu$ rund 2000. Die Kurven 10—16 nun zeigen die Kriterien bei noch weiteren und längeren Kapillaren. Der Durchmesser bei diesen Messungen war 2 mm. Die Länge variierte zwischen ~ 16 m und 1 m. Auch hier sind die Geschwindigkeiten wieder gleich, der Ausdruck $\varrho D U_m/\mu$ hat wieder den Wert ~ 2000.

Ich habe früher schon einige Werte und den Ausdruck $\varrho D U_m/\mu$ angegeben, um zu zeigen, wie gut sich alle Werte der Zahl 2000 nähern.

Kurve 17 zeigt die Literkurve einer noch weiteren Kapillare vom Durchmesser 2,2 mm. Das Kriterium liegt hier bei ~ 25 cm H_2O (Druck). Noch weiter habe ich den Durchmesser wachsen lassen. Kurve 18 gilt für einen Durchmesser von 3,8 mm. Hier zeigt sich bei einem Druck von 7 mm H_2O noch kein Kriterium, der Wert des Reibungskoeffizienten ist zu groß, das Poiseuillesche Gesetz gilt nicht mehr. Es ist also auch in dem Wachsen des Durchmessers eine Grenze gesetzt.

Die Kurven 19—27 stellen die Versuchsresultate bei einer Kapillare von $^4/_{10}$ mm Durchmesser dar. Diese Kapillare war im Vergleich zu allen bisherigen am Einflußende ganz wenig erweitert. Ich bringe sie erst hier am Schlusse, weil ich hier einige Messungen bei den höchsten, möglichen Drucken gemacht habe.

Die Kurven 19—21 zeigen die Kriterien in der Litermenge. Die Geschwindigkeiten stimmen nicht mit denen von Reynolds überein. Der Wert $\varrho D U_m/\mu$ ist zu groß (3000 und größer). Es kommt dieses daher, daß das Einflußende wenig aufgeblasen war. Bisher haben wir die Kurven alle nur in der Gegend des Kriteriums betrachtet. Wie verhalten sich denn nun Liter- und η-Kurven, wenn wir hoch über das Kriterium mit dem Druck hinausgehen? In Kurve 4—6 sieht man schon, daß nach dem Kriterium mit steigendem Druck die Litermenge anfangs langsamer, später wieder schneller wächst. In Kurve 4 z. B. liegt das Kriterium bei ~ 14 Atm. Dann wächst die Litermenge nur langsam bis zu einem Drucke von ~ 20 Atm., um von hier ab wieder schneller und zwar geradlinig zu steigen. Analoges zeigt sich bei den Kurven 5 und 6, 8 und 9. Die Kurven 10—16 lassen erkennen, daß dieser Unterschied zwischen dem erst langsamen und dann schnelleren Steigen der Litermenge mit wachsendem Durchmesser schwächer wird. In Kurve 17 ist, weil der Durchmesser schon 2,2 mm ist, dieser Unterschied ganz verschwunden; die Literkurve biegt um und verläuft dann steiler, aber geradlinig. Um nun zu zeigen, daß auch bei ganz hohen Drucken, noch höher als 40 Atm., die Literkurve linear verläuft, sind die Kurven 22 und 23 gezeichnet, sie gehen bis zu einem Drucke von 180 Atm. Überdruck. Während nun oberhalb des Kriteriums die Literkurve als gerade Linie sich darstellt, verläuft die η-Kurve als direkte Kurve; die Kurven 27 und 28 stellen η für eine mittlere Kapillare ($^4/_{10}$ mm Durchmesser) dar bis zu einem Drucke von 180 Atm. Das Kriterium ist natürlich bei den Kurven, die bis zu solch hohen Drucken gehen, wegen des Maßstabes nicht angegeben.

Eine Diskussion der Vorgänge bei solch hohen Drucken wie hier (180 Atm.) ist zurzeit noch nicht möglich. Es seien daher diese ganz hohen Druckmessungen zunächst nur als orientierende Messungen mitgeteilt.

II.

Wir hatten bisher stets Glaskapillaren. Es fragt sich nun, wie verhalten sich die ganzen Vorgänge bei Metall? Zur Beantwortung dieser Fragen dienen die Kurven 29—33.

Kurve 29 zeigt das Kriterium für eine Eisenkapillare von $^4/_{10}$ mm Querschnitt und 1480 mm Länge. Es liegt der Knick bei einem Druck von ungefähr 400 mm Hg. Ein Vergleich mit den gleich dimensionierten Glaskapillaren beweist, daß das Kriterium bei Metall niedriger liegt als bei Glas. In Kurve 29 steigt die Literkurve nach dem Kriterium erst langsam, dann schneller. Dies stimmt mit den Vorgängen bei Glaskapillaren überein. In Kurve 30 sind die Litermengen für die Eisenkapillare bei hohen Drucken bis zu 33 Atm. aufgetragen. Ich wollte damit zeigen, daß, wie bei Glas, auch hier bei Metall die Literkurve geradlinig verläuft. In Kurve 31 ist zum Vergleich mit Eisen eine Kupferkapillare von denselben Dimensionen bei hohen Drucken untersucht. Man sieht, daß die Literkurven bis zu den höchsten Drucken fast zusammenfallen. Die geringe Differenz in der Durchflußmenge zwischen Kurve 30 und 31 mag vielleicht daher rühren, daß die Kupferkapillare $\sim$ 2 cm länger war als diejenige aus Eisen. Immerhin laufen die zwei Kurven ausgezeichnet parallel und man darf wohl den Schluß ziehen, daß die Art des Metalles ohne Einfluß ist. In 32 sehen wir die Literkurve einer Kapillare aus Kupfer mit einem Durchmesser von 1,95 mm und einer Länge von 1,380 m. Das Kriterium liegt bei 78 mm Wassersäulendruck; also auch tiefer als bei fast der gleichen Glaskapillare. Um nun auch noch eine ganz weite Metallröhre zu haben, ist Kurve 33 gezeichnet. Das Material dieser Kapillare war Messing, der Durchmesser 4 mm, die Länge 3,120 m. Hier ist, wie auch bei der fast gleichen Glaskapillare, gar kein Kriterium mehr vorhanden, der Durchmesser ist zu groß, das Poiseuillesche Gesetz gilt nicht. Vergleichen wir nun die kritische Geschwindigkeit bei den Metallkapillaren mit derjenigen bei Glasröhren.

Bei der Eisenkapillare von $^4/_{10}$ mm Durchmesser (Kurve 30 und 31) ist die kritische Geschwindigkeit 1646 cm/sec, der Ausdruck $\varrho D U_m/\mu$ hat den Wert 439.

Für die Kupferkapillare von 1,95 mm Durchmesser (Kurve 32) ist die kritische Geschwindigkeit 380 cm/sec; der Ausdruck $\varrho D U_m/\mu$ hat den Wert 494.

Es zeigt sich also, daß das Kriterium bei Metallkapillaren eher eintritt, also bei einem niedrigeren Drucke, als bei Glas-

röhren, daß aber der Ausdruck $\varrho D U_m/\mu$ bei Metallkapillaren unter sich ebenfalls ein Kriterium darstellt, nur mit einem anderen Zahlenwerte als bei Glas. Bei Glas hatten wir für das Kriterium

$$\frac{\varrho D U_{ai}}{\mu} = \sim 2000$$

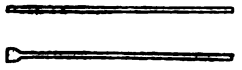
für das Metall dürfen wir wohl angeben:

$$\frac{\varrho D U_m}{\mu} = \sim 400-500.$$

Worin kann denn nun der Grund liegen für dieses Verhalten der Metallröhren gegenüber den Glaskapillaren? Ich sehe die Ursache in der Beschaffenheit der inneren Wandfläche der Metallkapillaren. Es ist aus technischen Gründen unmöglich, enge Metallkapillaren mit derselben glatten inneren Wand herzustellen wie z. B. Glaskapillaren.

III.

Die bisher verwendeten Glaskapillaren waren am Einflußende nicht aufgeblasen. Es muß jedoch die Frage aufgeworfen werden: Ist die Gestalt des Einflußendes der Kapillare ohne Einfluß? Ist es gleich für die Durchflußmenge, für das Kriterium, ob die Kapillare konisch aufgeblasen ist oder nicht?



Die Kurven 34 und 37 sollen uns dies näher erläutern. Es sind verschiedene Durchmesser und verschiedene Längen untersucht. Kurve 34 zeigt eine Kapillare von 0,153 mm Durchmesser und 1,350 m Länge in nicht aufgeblasenem und aufgeblasenem Zustande. Ist die Kapillare nicht aufgeblasen, so liegt das Kriterium bei fast 13 Atm., ist sie konisch aufgeblasen, so tritt es erst bei $\sim$ 16,5 Atm. ein. Durch das Aufblasen wird also das Kriterium in die Höhe gedrückt. Man sieht ferner, daß unterhalb des Kriteriums die zwei Literkurven zusammenfallen, oberhalb desselben nicht, die aufgeblasene Röhre hat das größere Durchflußquantum. Was nun die kritische Geschwindigkeit anbelangt, so ist bei der nicht aufgeblasenen Kapillare $U_m = 225$ m. Der Ausdruck $\varrho D U_m/\mu$ wird 2250.

Bei der aufgeblasenen Kapillare ist $U_m = 333$ m 70 cm, $\varrho D U_m/\mu = 3337$. Es scheint also die Reynoldssche Formel nur dann zu gelten, wenn die Kapillare nicht aufgeblasen ist. Kurve 36 zeigt dasselbe für eine Kapillare von 0,317 mm Durchmesser. Kurve 35 bringt die Unterschiede für eine noch weitere Kapillare. Der Durchmesser bei Kurve 35 ist 2 mm, die Länge 1 m. Hier liegen die 2 Kriterien schon ganz nahe beisammen. Die kritische Geschwindigkeit bei der nicht aufgeblasenen Kapillare ist $U_m = 15{,}85$ m. Der Ausdruck $\varrho D U_m/\mu = 2113$. Die kritische Geschwindigkeit bei der aufgeblasenen Kapillare ist 21,21 m, $\varrho D U_m/\mu = 2694$. Man sieht, daß das Reynoldssche Kriterium genauer für die nicht aufgeblasene gilt. Jedoch ist der Unterschied schon kleiner als bei der früher untersuchten ganz engen Röhre. Bei der Kapillare vom Durchmesser 0,153 mm war der Unterschied $\varrho D U_m/\mu$ für aufgeblasen und nicht aufgeblasen ~ 1000, hier bei 2 mm Durchmesser ist er nur ~ 500. Kurve 37, wo der Durchmesser zwar auch 2 mm ist, die Länge aber 10 m beträgt, läßt überhaupt keinen Unterschied zwischen einer aufgeblasenen und nicht aufgeblasenen Kapillare mehr erkennen. Man sieht also, daß der Einfluß der Form des Einflußendes um so größer ist, je enger die Kapillare, und daß bei ganz langen und weiten Röhren überhaupt kein Einfluß der Gestalt sich mehr geltend macht. Wie könnten wir diesen Vorgang uns nun wohl deuten? Ich erkläre mir diese Erscheinung, indem ich Strahlbildung an der scharfen Ecke, der scharfen inneren Peripherie des Einflußendes annehme.

Aus der am Schlusse von § 4 aufgestellten Tabelle ergibt sich, daß die Werte von $\varrho D U_m/\mu$, sofern sie vom Werte 2000 erheblich abweichen, sämtlich größer als dieser Wert sind. Hieraus folgt, daß der dem Poiseuilleschen Gesetz folgende Bewegungszustand auch dann noch unter Umständen erhalten wird, wenn die kritische Grenze bereits überschritten ist. Besonders tritt dies ein, wenn die Einströmungsöffnung allmählich sich erweitert. Dann können, wie besonders die Kurven 34 und 35 zeigen, sehr erhebliche Überschreitungen der Grenze stattfinden, die dann wohl als labile Zustände aufzufassen sind. Aber auch die Länge der Röhre ist von Einfluß auf diese Verhältnisse. Je länger die Röhre ist, um

so mehr nähert sich die kritische Grenze dem Reynoldsschen Wert. Bei kurzen Röhren findet eine erhebliche Überschreitung des Reynoldsschen Wertes statt. Die Turbulenz bedarf, wie es scheint, einer gewissen Länge, um schon bei dem Reynoldsschen Wert der Strömung die Bewegung zu beeinflussen.

IV.

Die noch folgenden Kurven 38—40 zeigen uns den Temperaturverlauf längs der Kapillare. Kurve 38 zeigt die Untersuchungen für einen Durchmesser von 2 mm und eine Länge von 1,220 m; jedoch sind die Drucke verschieden. Man erkennt, daß die Temperatur längs der ganzen Kapillare konstant bleibt bis fast zum Ausflußende. Hier beginnt infolge der Expansion eine allmähliche Abkühlung. Die Abkühlung ist natürlich um so heftiger, je höher der Druck ist. Immerhin ist sie nicht sehr groß, sie beträgt umgefähr 6 Grad im Maximum der Abkühlung. Kurve 39 zeigt die Temperaturergebnisse für eine etwas engere Kapillare von $^9/_{10}$ mm Durchmesser. Es ergibt auch hier dasselbe wie in 38. Kurve 40 gilt nun für eine abermals noch engere Kapillare; der Durchmesser beträgt $^5/_{10}$ mm. Jedoch Länge und Druck sind verschieden. Längs der Kapillare fallen hier fast sämtliche Kurven zusammen, d. h. die Temperatur ist überall ohne Sprung. Am Ende natürlich müssen die Abkühlungen bei großem Durchmesser bzw. hohem Druck größer sein als bei kleinem Druchmesser, bzw. kleinem Druck.

Aus den ganzen Betrachtungen folgt, daß nirgendwo längs der Kapillare Unstetigkeiten in der Temperatur auftreten. Es scheint sich demnach das Gas wie ein Ganzes durch die Kapillare hindurch zu bewegen, ohne große Dichteänderungen, ähnlich wie eine Flüssigkeit.

V. Abschnitt.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Bei Versuchen mit Strömungen der Luft durch enge Röhren hat sich ergeben, daß der kritische Wert von Reynolds auch hier maßgebend ist für den Beginn turbulenter Strömung.

Die zahlenmäßige Übereinstimmung ist in vielen Fällen auffallend gut. Abweichungen haben sich immer nach einer Richtung gezeigt, so daß in diesen Fällen die Turbulenz erst bei stärkerer Strömung eintritt.

2. Die Abweichungen werden vorzugsweise durch zwei Umstände veranlaßt:

a) Geringere Röhrenlänge,

b) Allmähliche Erweiterung der Einströmungsöffnung.

3. Metallkapillaren geben für den kritischen Wert erheblich kleinere Werte als der Reynoldsschen Zahl entspricht. Wodurch diese auffallende Abweichung bedingt ist, bedarf näherer Untersuchung.

4. Die Temperaturmessung mit Hilfe von Thermoelementen, die in der Kapillare verschiebbar angebracht waren, ergab das hauptsächlichste Temperaturgefälle in der Nähe der Ausflußmündung. Es muß daher auf das wesentliche Druckgefälle und der hauptsächlichste Widerstand in der Nähe des Röhrenendes liegen.

Zum Schluß habe ich die angenehme Pflicht zu erfüllen, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Geheimrat Dr. Wien, für die Anregung zu der Arbeit und für das Interesse, das er derselben in freundlichster Weise stets entgegenbrachte, meinen innigsten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 4. März 1908.)

9. *Über die Erhitzung von Elektrolyten an kleinen Elektroden bis zur Siedetemperatur*[1] *(zur Berichtigung von Hrn. Paul Ludewig);* *von F. Richarz.*

Bei meinen Versuchen zur Bestimmung der galvanischen Polarisation bei großer Stromdichtigkeit[2]) kam ich durch Beobachtung eigentümlicher Erscheinungen zu dem Schlusse, daß infolge der großen Stromdichtigkeit die Flüssigkeit in der Nähe der kleinen Drahtelektrode so stark erhitzt werde, daß sie dort verdampfe, und infolge der sich bildenden Dampfhülle die Stromstärke auf einen sehr kleinen Wert sinke. Zur Kontrolle meiner Schlußfolgerung veranlaßte ich Hrn. Wilhelm Ziegler[3]) zu Temperaturmessungen des Elektrolyten in der Nähe der kleinen Drahtelektrode vermittelst eines dorthin gebrachten Thermoelementes. Er fand meine Erklärung jenes Phänomens bestätigt; denn aus seinen Versuchen ging zunächst hervor, daß, wie vermutet, bei Steigerung der Stromintensität die Erhitzung der Flüssigkeit wirklich bis zum Siedepunkt wächst; sodann bewiesen die Messungen von Hrn. Wilhelm Ziegler, daß die Erscheinung der Stromunterbrechung stets gerade dann eintritt, wenn die Temperatur der Flüssigkeit bis zum Siedepunkt gestiegen ist.

Diese Erscheinung ist die erste Phase des Prozesses bei den elektrolytischen Stromunterbrechern; die bei ihr wesentliche Verdampfung der Elektrolyten tritt auch auf, wenn an einer anderen Stelle als an der Elektrode eine starke Querschnittsverengerung vorhanden ist, an welcher die Stromdichte sehr groß wird. Letzteres haben Hr. Wehnelt[4]) und Hr. H. Th. Simon[5]) gefunden.

1) Wieder abgedruckt aus Sitzungsber. d. Marburger Gesellsch. vom 13. November 1907. Nr. 8. p. 194.

2) F. Richarz, Wied. Ann. **39.** p. 67 u. 201; 1890; **47.** p. 567. 1892.

3) F. Richarz u. W. Ziegler, Wied. Ann. **63.** p. 261. 1897; W. Ziegler, Inaug.-Diss. Greifswald 1897.

4) A. Wehnelt, Wied. Ann. **68.** p. 262. 1899.

5) H. Th. Simon, Wied. Ann. **68.** p. 861. 1899.

Beide Herren haben, nachdem sie meine und Wilhelm Zieglers ältere Arbeiten über die Erhitzung der einer kleinen Elektrode anliegenden Flüssigkeitsschichten bis zum Verdampfen anfänglich übersehen hatten, später unsere Priorität in bezug auf die Beobachtung und Erklärung dieser ersten Phase des Vorganges bei den elektrolytischen Unterbrechern selbst anerkannt.[1] [2])

In einer kürzlich veröffentlichten Göttinger Inauguraldissertation führt Hr. Paul Ludewig[3]) zwar in der Literaturzusammenstellung die Mehrzahl der bezüglichen Arbeiten von mir und Wilhelm Ziegler an. Der vorstehend auseinandergesetzte Sachverhalt ist aber im Text teils nicht angegeben, teils irrig dargestellt, so daß ich mich außer zu dem Hinweis auf das von mir soeben bereits Gesagte noch zu folgenden Berichtigungen im einzelnen genötigt sehe.

Inwieweit ich die Bildung der Dampfhülle mit dem Leidenfrostschen Phänomen in Parallele gestellt habe, geht aus folgender Stelle[4]) einer meiner älteren Arbeiten hervor, an der ich sage, die Erscheinung sei „dem Leidenfrostschen Phänomen vergleichbar, indem das Wesentliche eine Dampfhülle ist, welche die Elektrode umgibt, und welche um so leichter auftritt, je größer die Stromdichtigkeit ist. Während aber beim Leidenfrostschen Phänomen die Erhitzung der Unterlage des Tropfens das erste ist, und die Flüssigkeit von ihrer Unterlage her erwärmt wird, geschieht bei der Erscheinung an Elektroden die Wärmeentwickelung in der Grenzschicht der Flüssigkeit selbst, indem diese durch den Strom bis zur Siedetemperatur erhitzt wird. Eine einfache Rechnung ergibt, daß in 50 proz. Schwefelsäure die Temperatur der Flüssigkeitsschicht, welche einer Drahtelektrode von 0,08 mm Dicke und 10 mm Länge unmittelbar anliegt, durch den Strom von 1 Amp., abgesehen von Fortführung der Wärme, in $^1/_7$ Sekunde bis zum Siedepunkt steigt.“[5])

1) A. Wehnelt, Elektrotechn. Ztschr. p. 187. Febr. 1899; P. Spiess u. A. Wehnelt, Verh. Deutsch. Physik. Gesellsch. 1. p. 53. 1899.

2) H. Th. Simon, Wied. Ann. 68. p. 275. 1899.

3) P. Ludewig, Auszug: Ann. d. Phys. 25. p. 467. 1908.

4) F. Richarz, Wied. Ann. 47. p. 579. 1892.

5) F. Richarz, Wied. Ann. 39. p. 83. 1890.

An der soeben zitierten Stelle[1]) meiner Habilitationsschrift hatte ich bereits diejenige Überschlagsberechnung mit der richtigen Schlußfolgerung angestellt, welche 1897 auf meine Veranlassung Hr. Wilhelm Ziegler in vollkommenerer Weise ausgeführt hat. Nach Hrn. P. Ludewigs Erwähnung auf p. 19 seiner Dissertation wäre eine solche Berechnung Klupathy 1902 zuzuschreiben, der aber falsche Schlußfolgerungen aus ihr zog. Diese letzteren wollte bereits Hr. Wilhelm Ziegler selbst berichtigen nach Versuchen, die er angestellt hatte über das Spannungsgefälle im Elektrolyten in der Nähe sehr kleiner Elektroden. Leider unterblieb die Publikation dieser[2]) und anderer[3]) Versuche von Hrn. Wilhelm Ziegler infolge seiner Berufung an die Universität zu Santiago in Chile. Sonst vielleicht, und wenn Hr. P. Ludewig die spätere Bemerkung des Hrn. Wilhelm Ziegler[4]) und die Arbeit des Hrn. K. Klüpfel[5]) gekannt hätte, würde Hrn. P. Ludewig der richtige Sachverhalt nicht entgangen sein.

Marburg i. H., Physikalisches Institut, März 1908.

1) F. Richarz, Wied. Ann. **39.** p. 88. 1890.

2) Soll demnächst erfolgen.

3) Inzwischen zum Teil publiziert in den Marb. Sitzungsber. vom 11. Dez. 1907. Nr. 9. p. 220.

4) W. Ziegler, Wied. Ann. **69.** p. 718. 1899.

5) F. Richarz, Marb. Sitzungsber. Juli 1903. p. 47; Klüpfel, Inaug.-Diss. 14. Nov. 1903, Marburg; Ann. d. Phys. **16.** p. 574. 1905, insbesondere die Stellen p. 579 und 580.

(Eingegangen 25. März 1908.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1908. № 1.

ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. G. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 25. HEFT 1.

DER GANZEN REIHE 330. BANDES 1. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINEM PORTRÄT.

LEIPZIG, 1908.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
ROSSPLATZ 17.

Bestellungen auf die „Annalen" werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.

(Ausgegeben am 17. Januar 1908.)

Inhalt.

		Seite
	Lord Kelvin. Nachruf. (Mit Porträt)	1
1.	Max Wien. Über die Verstimmung gekoppelter Systeme	7
2.	Eugen Klupathy. Die magnetische Wirkung der Kathodenstrahlen	31
3.	Adolf Heydweiller. Über Dämpfung und Widerstand in Kondensatorfunken	48
4.	G. A. Schott. Über den Einfluß von Unstetigkeiten bei der Bewegung von Elektronen	63
5.	G. Athanasiadis. Das Verhältnis der Beleuchtung zum Leitungsvermögen des Selens	92
6.	W. v. Ignatowsky. Diffraktion und Reflexion, abgeleitet aus den Maxwellschen Gleichungen	99
7.	Otto Fischer. Über ein von Max Wien geäußertes Bedenken gegen die Helmholtzsche Resonanztheorie des Hörens	118
8.	P. Riebesell. Über die Theorie des Gleichstromgenerators	135
9.	H. A. Bumstead. Bemerkung zu der Abhandlung des Hrn. Angerer: „Ursprung der Wärmeentwickelung bei Absorption von Röntgenstrahlen"	152
10.	Emil Kohl. Über die Entropiefunktion beim Umsatz von chemischer und elektrischer Energie	155
11.	J. Laub. Zur Optik der bewegten Körper	175

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Geh. Hofrat Prof. Dr. W. Wien, Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

MAX KOHL, Chemnitz i. S.

Arbeits-(Praktikanten-)Tische

in allen möglichen Ausführungen, ganz den jeweiligen örtlichen Verhältnissen angepaßt.

Experimentier-Schalttafeln

für Lehranstalten u. Laboratorien, als Wandtableau und in Form fahrbarer Tische ausgeführt, gestatten die Verwendung des Stromes städtischer Centralen bis 110, 160, 220 Volt u. 20 oder 50 Amp. für alle im Experimentalunterricht vorkommende Arbeiten. Die Schalttafeln sind für kleine und große Stromstärken bei beliebigen Spannungen von 0,5 bis 110 resp. 220 Volt zu verwenden. Höhere Spannungen als wir eingestellt, treten nach bei Stromunterbrechung nicht auf. — Es ist damit also einem wirklichen, langgefühlten Bedürfnis abgeholfen.

s. Referenzen. *Man verlange Special-Prospekt!*

D. D. Thermoskope nach Kolbe

in neuester, verbesserter Ausführung.

Radiumbromid

von überraschender Wirkung; chemisch rein. Preis auf Anfrage.

Neu!

Öl-Luftpumpen

System Kohl, D.R.P. 169180.

Allein-Vertrieb

und Alleinberechtigung zur Fabrikation.

Die Pumpe verdünnt bis auf 0,0006 mm und **verspritzt während des Pumpens kein Öl! Sie eignet sich vorzüglich zum Auspumpen von Röntgen-Röhren.**

Man verlange Special-Prospekt!

Neue rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpe

nach Dr. Gaede, D.R.P. angemeldet.

Einfachste Konstruktion, sehr hohes Vakuum, geringe Wartung, einfachste Handhabung.

Hochvakuum-Pumpen liefern Vakua bis zu 0,000 15 mm in 14 Minuten in einem Raum von 300 ccm.

Weltausstellung Lüttich 1905: 2 Grands Prix!

Weltausstellung St. Louis 1904: Grand Prix und Gold. Medaille,

ersteren in der Sonderausstellung des Königl. Preuss. Unterrichtsministeriums in Berlin für die im Auftrage der Regierung ausgestellte Einrichtung eines physikalischen Hörsaales, letztere in der deutschen Unterrichtsausstellung, Abteilung: wissenschaftliche Instrumente.

Ehrendiplom der Ausstellung der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, Düsseldorf 1898.

Goldene Medaillen Leipzig 1897, Weltausstellung Paris 1900, Aussig 1901, Athen 1904.

Listen mit ausführlichen Kostenanschlägen, Beschreibungen, Referenzen usw. gratis und franko.

E. Leybold's Nachfolger

Cöln a. Rh.

Neu! Neu!

Gaede-Pumpe

mit neuer Porzellantrommel

D. R. P. angemeldet.

Unzerbrechlich bei plötzlichem Eintreten von Luft.

(Vergl. Physikalische Zeitschrift. 8. Jahrgang. No. 23. p. 852.)

Garantierte Luftleere $^1/_{100000}$ mm.

Während die Pumpe unter **hohem Vakuum** steht, kann man durch Abreißen des Schliffes **plötzlich** Luft einlassen, ohne daß die Trommel Schaden leidet.

Dieser Versuch kann beliebig oft wiederholt werden.

Unsere neuen Ventiltrommeln haben vor Metalltrommeln den großen Vorzug, daß sie mit ätzenden Substanzen gereinigt werden können, was bei Metalltrommeln nicht zulässig ist.

Die neue Gaede-Pumpe ist nur direkt von uns zu beziehen.

Alleinige Inseratenannahme durch: Max Gelsdorf, Leipzig-Gohlis, Ulrichstr.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1908. № 5.

ANNALEN
DER
PHYSIK

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 25. HEFT 5.

DER GANZEN REIHE 330. BANDES 5. HEFT

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

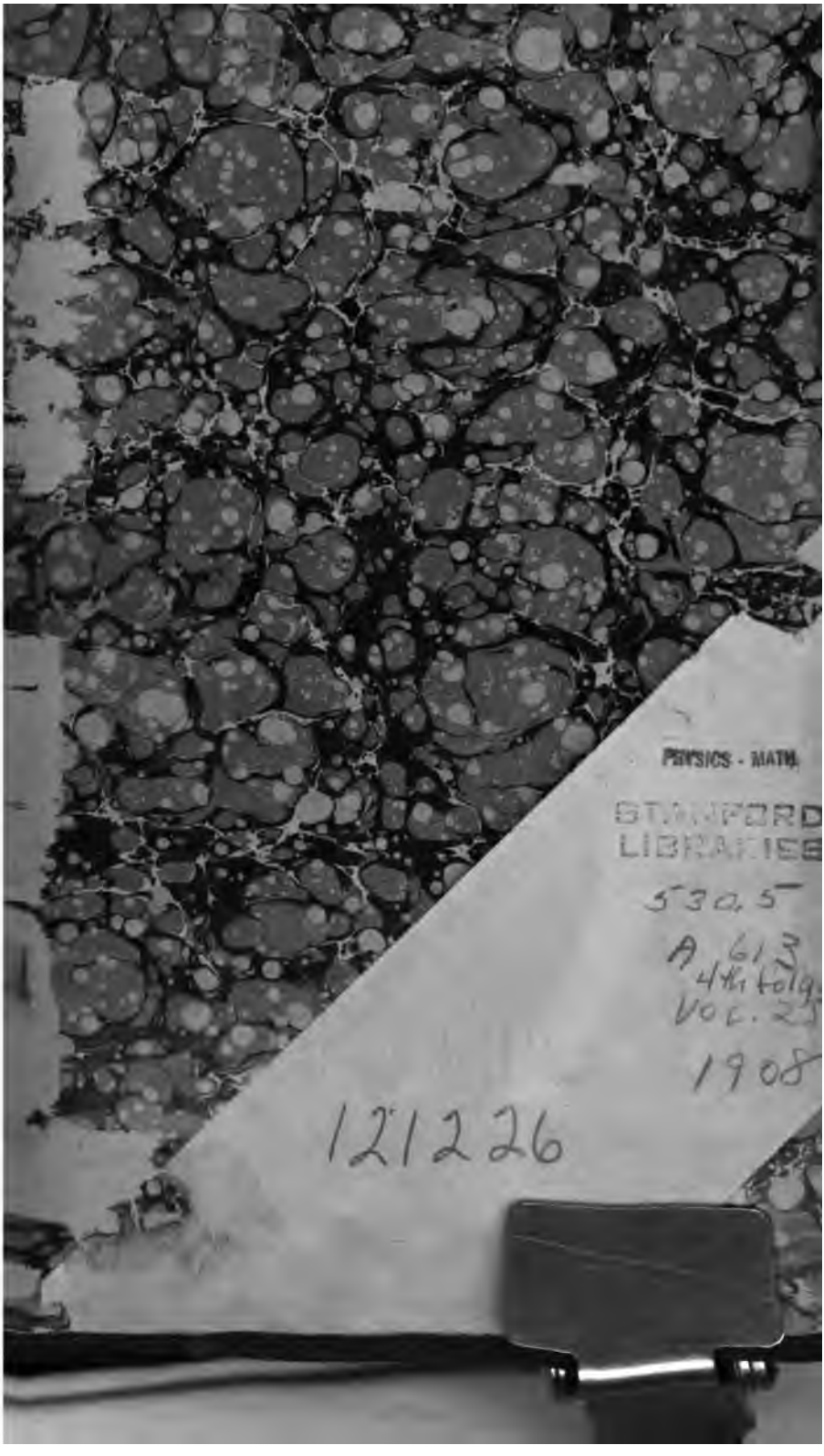
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

LEIPZIG, 1908.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
DORNDORFSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen" werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.


PHYSICS - MATH.
STANFORD
LIBRARIES
530.5
A 613
4th folg.
Vol. 25
1908
121226